# Algèbres quasi-stratifiées

par

Charles Paquette

mémoire présenté au Département de mathématiques
en vue de l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, avril 2006

# SOMMAIRE

Dans ce mémoire, nous introduisons une nouvelle classe d'algèbres que nous appelons algèbres quasi-stratifiées. Ces algèbres généralisent naturellement les algèbres standardement stratifiées lesquelles sont très étudiées. Nous démontrons ensuite, pour cette classe d'algèbres, la conjecture du déterminant de Cartan et sa réciproque ainsi que la conjecture d'abscence de boucles. Nous donnons aussi une preuve de la conjecture forte d'abscence de boucles pour les algèbres qui sont quasi-stratifiées d'un seul côté.

# REMERCIEMENTS

Je tiens d'abord à remercier mon directeur de maîtrise M. Shiping Liu sans qui ce projet de recherche n'aurait pas été si fructueux. Je le remercie sincèrement pour son temps consacré à la rédaction de l'article que nous avons conjointement écrit ainsi que le soutien financier qu'il m'a offert pour assister à une conférence au Mexique. Remerciements aussi à l'équipe de théorie des représentations des algèbres de l'Université de Sherbrooke et de l'Université Bishops pour son soutien moral et social. Je tiens aussi à remercier mon colocataire Laurent pour ses conseils quant à la rédaction de mon mémoire. Finalement, merci au Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada (CRSNG) pour son aide financière ainsi qu'à l'ISM pour son soutien financier pour assister à un colloque.

# TABLE DES MATIÈRES

# INTRODUCTION

En mathématiques, plusieurs énoncés dont on croit la véracité demeurent toujours sans preuves. Certains sont vieux de plus de cent ans et d'autres sont très récents. Ces affirmations sans preuves, connues aussi sous le nom de conjectures, apparaissent dans toutes les branches des mathématiques dont l'algèbre.

Dans la théorie des algèbres artiniennes, il existe deux conjectures homologiques bien connues qui portent les noms de conjecture du déterminant de Cartan et conjecture d'abscence de boucles. Ces deux conjectures ont été démontrées dans certains cas particuliers, c'est-à-dire pour certaines classes d'algèbres. Mais en général, ces deux conjectures restent encore aujourd'hui ouvertes. Leur compréhension nous permet d'établir un lien entre des propriétés homologiques d'une algèbre et d'autres, purement algébriques ou combinatoires.

Les algèbres dites standardement stratifiées constituent une classe d'algèbres pour laquelle les deux conjectures ci-haut ont été vérifiées. L'étude de ces algèbres fait intervenir inévitablement la notion d'algèbre quasi-héréditaire. Celles-ci correspondent aux algèbres standardement stratifiées dont la dimension globale est finie.

Dans ce mémoire, nous introduisons une nouvelle classe d'algèbres, dites quasi-stratifiées, qui généralisent naturellement les algèbres standardement stratifiées. La notion d'algèbre quasi-stratifiée fait intervenir une classe d'algèbres qu'on appelle algèbres ultimement héréditaires : ce sont les algèbres quasi-stratifiées dont la dimension globale est finie.

Ensuite, après avoir établi plusieurs propriétés homologiques pour ces nouvelles algèbres, nous démontrons, entre autres, les deux conjectures mentionnées ci-haut.

Le chapitre un constitue un rappel des notions d'algèbres de carquois liés : ces algèbres seront utilisées extensivement à des fins d'exemples. Dans le chapitre deux, nous étudions les idéaux projectifs d'une algèbre ainsi que les propriétés homologiques qui relient une algèbre avec ses quotients par des idéaux projectifs. On définit ensuite les notions d'algèbres quasi-stratifiées et d'algèbres ultimement héréditaires. Au chapitre trois, après avoir rappelé quelques notions sur le déterminant de Cartan d'une algèbre et donné un bref historique sur la conjecture du déterminant de Cartan, nous étudions le déterminant de Cartan des algèbres quasi-stratifiées. Nous démontrons la conjecture du déterminant de Cartan ainsi que sa réciproque pour les algèbres quasi-stratifiées. Au chapitre quatre, nous définissons une classe d'algèbres de carquois lié que nous appelons algèbres homogénéisables. Nous donnons une preuve de la conjecture du déterminant de Cartan pour cette classe d'algèbres. Dans le chapitre cinq, nous étudions les auto-extensions des modules simples sur une algèbre quasi-stratifiée. Nous démontrons ensuite la conjecture d'abscence de boucles pour les algèbres quasi-stratifiées ainsi que la conjecture forte d'abscence de boucles pour les algèbres qui sont quasi-stratifiées d'un seul côté. Enfin, dans le chapitre six, nous donnons un exemple d'une algèbre ultimement héréditaire qui n'est pas positivement graduée ni quasi-héréditaire.

# CHAPITRE 1

# Algèbres élémentaires et carquois

Il est très fréquent en mathématiques de représenter des objets abstraits au moyen de structures visuelles. Par exemple, on représente souvent une fonction réelle à l'aide d'une courbe dans le plan cartésien ou encore un nombre complexe à l'aide d'un vecteur de $\mathbb{R}^2$. En algèbre, on peut souvent représenter une algèbre à l'aide d'une structure visuelle qu'on appelle carquois.

Dans cette optique, les algèbres dites de carquois liés constituent une classe importante d'algèbres artiniennes qui admettent une telle structure visuelle. Cette structure nous permet de visualiser les problèmes de façon intuitive sans trop restreindre la généralité. Dans ce chapitre, nous définissons ce que nous entendons par algèbres élémentaires et algèbres de carquois liés et nous donnons la relation qui relie ces deux types d'algèbres. Ces algèbres seront utilisées ultérieurement dans ce mémoire à titre d'exemples.

Partout dans ce chapitre, $k$ note un corps commutatif quelconque et $A$ une $k$-algèbre de dimension finie sur $k$. Finalement, pour alléger le texte de ce mémoire, on appelle idéal de $A$ tout idéal bilatère de $A$.

## 1.1 Algèbres de chemins

Notre objectif premier dans cette section est de définir une algèbre à partir d'un carquois quelconque. On commence par une définition de nature combinatoire.

**Définition 1.1.1** *Un* **carquois** $Q = (Q_0,Q_1,s,t)$ *est un quadruplet avec* $Q_0$ *et* $Q_1$ *des ensembles et* $s : Q_1 \to Q_0$, $t : Q_1 \to Q_0$ *des applications. Les éléments de* $Q_0$ *sont appelés des* **sommets** *ou des* **points** *et les éléments de* $Q_1$ *des* **flèches**. *Pour une flèche* $\alpha \in Q_1$, *on dit que* $s(\alpha)$ *est sa* **source** *et* $t(\alpha)$ *son* **but**. *Finalement, on dit que le carquois* $Q$ *est* **fini** *si les ensembles* $Q_0$ *et* $Q_1$ *sont finis.*

Il est important de noter qu'il peut y avoir plusieurs flèches qui vont d'un sommet $a$ vers un sommet $b$ dans un carquois. De plus, rien n'interdit la présence de boucles. Le lecteur aura remarqué la ressemblance des concepts de carquois et de graphes orientés. Toutefois, dans un graphe orienté, il ne peut y avoir plus d'une flèche allant d'un sommet $a$ vers un sommet $b$. Dans ce mémoire, un carquois $Q = (Q_0,Q_1,s,t)$ est souvent noté brièvement par $(Q_0,Q_1)$ ou encore par $Q$ lorsqu'il n'y a aucun risque de confusion. Pour une flèche $\alpha \in Q_1$ avec $s(\alpha) = a$ et $t(\alpha) = b$, on écrit souvent $\alpha : a \to b$.

**Exemple 1.1.2** Voici deux exemples de carquois finis :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "\alpha"] \arrow[r, bend right, "\beta"'] & 2 \arrow[loop right, "\gamma"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[d, bend right, "\beta"'] \arrow[d, bend left, "\gamma"] \\ & 3 \arrow[ul, "\delta"] \end{tikzcd}$$

et un exemple de carquois infini :

$$1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \xrightarrow{\alpha_2} 3 \xrightarrow{\alpha_3} 4 \xrightarrow{\alpha_4} \cdots$$

Voici maintenant la définition de chemin dans un carquois.

**Définition 1.1.3** *Soit $Q = (Q_0,Q_1,s,t)$ un carquois. Un* **chemin** *$\omega$ de $Q$ est une suite $\omega = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ de flèches de $Q_1$ telle que $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$ pour $i = 1,2,\ldots,n-1$. La* **longueur** *du chemin $\omega$ est définie comme étant l'entier $n$. La* **source** *et le* **but** *de $\omega$ correspondent à la source de $\alpha_1$ et au but de $\alpha_n$, respectivement.*

*On définit également, pour chaque $a \in Q_0$, un* **chemin stationnaire** *de longueur $0$, noté $e_a$, ayant comme source et but le sommet $a$.*

On définit maintenant l'objet principal de cette section.

**Définition 1.1.4** *Soit $Q$ un carquois.* **L'algèbre des chemins** *$kQ$ de $Q$ sur $k$ est la $k$-algèbre dont le $k$-espace vectoriel sous-jacent admet l'ensemble des chemins de $Q$ comme base. La multiplication des éléments de base est définie de la façon suivante : si $\omega_1$ et $\omega_2$ sont deux chemins de $Q$, alors le produit $\omega_1\omega_2$ est défini comme étant la concaténation des chemins $\omega_1$ et $\omega_2$ si le but de $\omega_1$ et la source de $\omega_2$ coïncident et $0$, sinon. La multiplication de deux éléments quelconques de $kQ$ est alors déduite de celle des éléments de base de $kQ$ en utilisant la distributivité.*

Cette définition nous indique que l'algèbre des chemins d'un carquois est une algèbre de dimension infinie sur le corps $k$ si le carquois $Q$ admet des cycles orientés ou encore si $Q$ n'est pas fini. Cependant, si le carquois est fini et n'admet aucun cycle orienté, l'algèbre $kQ$ est de dimension finie sur $k$.

On note d'ailleurs que si $Q$ est fini, alors $kQ$ admet $\sum_{a\in Q_0} e_a$ comme identité. De plus, on remarque que $kQ$ n'est pas nécessairement commutative. Par exemple, si $Q_1$ contient des flèches qui ne sont pas des boucles, alors l'algèbre $kQ$ n'est pas commutative. Pour le reste de ce mémoire, on utilisera toujours des carquois finis.

Désignons par ${Q_1}^i$ l'ensemble des chemins de longueur $i$ pour $i \geq 0$ et posons $kQ_1^i$ pour le $k$-espace vectoriel engendré par $Q_1^i$. En tant que $k$-espaces vectoriels, on déduit que

$$kQ = \bigoplus_{i=0}^{\infty} kQ_1^i$$

et $(kQ_1^i)(kQ_1^j) \subseteq kQ_1^{i+j}$, de sorte que $kQ$ est une $k$-algèbre graduée.

De plus, on note $R_Q$ l'idéal de $kQ$ engendré par les flèches de $Q_1$. On remarque qu'en tant que $k$-espaces vectoriels, on a $R_Q = \bigoplus_{i=1}^{\infty} kQ_1^i$.

**Exemple 1.1.5** Soit $Q = (Q_0,Q_1)$ avec $Q_0 = \{1,2,3,4\}$ et $Q_1 = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ le carquois donné par le graphe suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & 3 \\
1 \arrow[r, bend left, "\alpha"] \arrow[r, bend right, "\beta"'] & 2 \arrow[ur, "\gamma"] \arrow[dr, "\delta"'] & \\
 & & 4
\end{tikzcd}$$

Comme $Q_0$ et $Q_1$ sont finis et que le carquois $Q$ n'admet aucun cycle orienté, $kQ$ est de dimension finie sur $k$. En fait, il est aisé de voir que $\dim_k kQ_1^0 = 4$, $\dim_k kQ_1^1 = 4$, $\dim_k kQ_1^2 = 4$ et $\dim_k kQ_1^i = 0$ si $i$ est supérieur à deux. Ainsi, $\dim_k kQ = 12$.

## 1.2 Carquois liés

Les algèbres de chemins définies dans la section précédente sont très utiles et faciles à utiliser : elles donnent lieu à plusieurs exemples. Dans cette section, nous construisons une classe d'algèbres de dimension finie sur $k$ qui généralisent la classe d'algèbres introduite dans la section précédente. Comme nous le verrons, ces algèbres constituent un outil puissant qui nous permet d'exprimer de façon visuelle plusieurs algèbres de dimension finie sur un corps. Étant donné un carquois $Q$, nous allons définir une certaine classe d'idéaux bilatères de $kQ$ que nous appelons idéaux admissibles. Nous allons ensuite considérer les quotients de l'algèbre des chemins de $Q$ par ce type d'idéaux.

**Définition 1.2.1** *Soit $Q = (Q_0,Q_1)$ un carquois. Un idéal $I$ de $kQ$ est dit* **admissible** *s'il existe un entier $m \geq 2$ tel que $R_Q^m \subseteq I \subseteq R_Q^2$. Dans ce cas, la paire $(Q,I)$ s'appelle un* **carquois lié**. *L'algèbre quotient $A = kQ/I$ est appelée l'***algèbre du carquois lié** *$(Q,I)$ ou simplement une* **algèbre de carquois lié**.

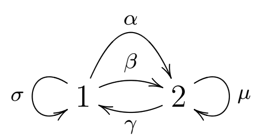
Nous expliquons un peu plus loin la motivation de la définition d'idéal admissible. Pour l'instant, nous montrons que les générateurs d'un idéal admissible peuvent être choisis pour satisfaire à un certain critère. Soit $(Q,I)$ un carquois lié et soient $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n$ des chemins de $Q$ de mêmes sources et de mêmes buts et de longueur au moins 2. Enfin, soient $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ des éléments non nuls de $k$. L'élément $\rho = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\omega_i \in I$ s'appelle une **relation** sur $Q$. On appelle $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n$ les **composantes** de $\rho$.

Par ailleurs, si $n \geq 2$ et si pour tout sous-ensemble propre et non-vide $\Omega$ de $\{1,2,\ldots,n\}$, on a $\sum_{i\in\Omega} \lambda_i\omega_i \notin I$, alors $\rho$ est une **relation minimale**. Dans le cas où $n = 1$, on dit que $\rho$ est une relation **monomiale**. Enfin, si toutes les composantes d'une relation sont de même longueur, on dit que la relation est **homogène**. On peut vérifier sans difficultés qu'étant donné un idéal admissible $I$ de $kQ$, il est toujours possible de choisir des relations minimales et monomiales comme générateurs de $I$.

Le lecteur peut se demander pourquoi on doit se restreindre aux idéaux admissibles dans la définition de carquois liés. La raison est très simple. Dans la définition d'idéaux admissibles, on demande d'une part qu'il existe $m \geq 2$ tel que $R_Q^m \subseteq I$ pour ne pas avoir de chemins arbitrairement longs dans l'algèbre, c'est-à-dire pour que $A$ soit de dimension finie sur $k$. D'autre part, on demande que $I \subseteq R_Q^2$ afin qu'il n'y ait pas de flèches redondantes dans le carquois. En effet, soit $\omega \in I$ un élément tel que $\omega \notin R_Q^2$.

Alors il existe $\lambda \in k_*$, $\alpha \in Q_1$ et $\rho$ une combinaison linéaire de chemins de $kQ$ telles que $\omega = \lambda\alpha + \rho$. En utilisant le fait que $R_Q^m \subseteq I$, on peut montrer qu'il est possible de choisir $\omega$ d'une telle sorte que $\alpha$ n'apparaît pas dans les composantes de $\rho$. Par conséquent, l'expression $\alpha + I = -\lambda^{-1}\rho + I$ fait de $\alpha$ une flèche redondante dans l'algèbre $A$.

**Exemple 1.2.2** Soit $Q$ le carquois suivant :




et $I$ l'idéal de $kQ$ engendré par les relations monomiales $\sigma^2$, $\mu^2$, $\gamma\sigma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\mu$, $\mu\gamma$ et la relation minimale $\alpha\gamma - \beta\gamma$. On peut vérifier sans difficultés que $(Q,I)$ est un carquois lié car $R_Q^6 \subseteq I \subseteq R_Q^2$. De plus, un calcul simple permet de vérifier que l'algèbre correspondante $A = kQ/I$ est de dimension 19 sur $k$ alors que l'algèbre des chemins $kQ$ est de dimension infinie sur $k$ car le carquois $Q$ admet des cycles orientés.

Soit $A = kQ/I$ une $k$-algèbre donnée par un carquois lié $(Q,I)$. On peut vérifier sans peine que le radical de Jacobson de $A$ est donné par $\mathrm{rad}(A) = R_Q/I$, ce qui correspond à l'idéal de $A$ engendré par les classes d'équivalences des flèches de $Q$, modulo l'idéal $I$. Cette dernière observation est particulièrement utile dans l'étude des $A$-modules simples. En effet, on peut en déduire l'affirmation suivante : si $|Q_0| = n$, alors l'algèbre $A$ admet exactement $n$ modules simples à gauche (respectivement, à droite) deux-à-deux non-isomorphes. De plus, tout $A$-module simple est de dimension un sur le corps $k$. Pour démontrer ce fait, il suffit de remarquer que l'ensemble $\{e_a |\ a \in Q_0\}$ est un ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux de $A$ et que les $A$-modules simples (à droite) sont donnés par $\{\overline{e_a}A/\overline{e_a}\mathrm{rad}(A) |\ a \in Q_0\}$ où $\overline{e_a} = e_a + I$.

## 1.3 Algèbres élémentaires

Dans cette courte section, nous nous intéressons aux algèbres de dimension finie sur $k$ qui sont élémentaires. Nous verrons que ces algèbres correspondent, à isomorphisme près, aux algèbres de carquois liés.

On commence par donner la définition d'algèbres élémentaires.

**Définition 1.3.1** *Une $k$-algèbre de dimension finie $A$ est dite* **élémentaire** *si tous les $A$-modules simples sont de dimension un.*

Selon cette définition, on déduit immédiatement que toute algèbre de carquois lié est élémentaire. D'ailleurs, la réciproque est aussi vraie, dans le sens du théorème suivant. Pour une preuve, le lecteur est invité à consulter [4, Page 65].

**Théorème 1.3.2** *Soit $A$ une $k$-algèbre élémentaire. Alors il existe un carquois fini $Q$ et un idéal admissible $I$ de $kQ$ tel que, en tant que $k$-algèbres, on a $A \cong kQ/I$.*

# CHAPITRE 2

# Idéaux projectifs et quasi-stratifications

Dans ce chapitre, nous étudions les idéaux projectifs d'une algèbre après y avoir introduit les définitions nécessaires. Nous donnons ensuite quelques résultats qui nous permettent de comprendre davantage ceux-ci. Finalement, nous comparons les propriétés homologiques d'une algèbre $A$ avec une algèbre quotient $A/I$, lorsque $I$ est un idéal projectif de $A$.

Tout au long de ce chapitre, $k$ désigne un anneau commutatif artinien et $A$ une $k$-algèbre d'Artin (c'est-à-dire que $A$ est un $k$-module de type fini). Le lecteur est invité à consulter [2, 4] pour de plus amples détails concernant les algèbres d'Artin.

Nous introduisons maintenant quelques notations qui seront utilisées tout au long de ce chapitre ainsi que dans le reste de ce mémoire. Nous désignons par Mod-$A$ (ou $A$-Mod) la catégorie des $A$-modules à droite (ou à gauche) et par mod-$A$ (ou $A$-mod) la catégorie des $A$-modules à droite (ou à gauche, respectivement) de type fini. Comme $A$ est une algèbre d'Artin, les dimensions globales à gauche et à droite de $A$ coïncident et la valeur commune s'appelle la dimension globale de $A$, que l'on note dim.gl$(A)$. Enfin, comme dans le chapitre précédent, on note rad$(A)$ le radical de $A$.

Pour un module $M$ dans Mod-$A$, on désigne par $\mathrm{dp}_A(M)$ sa dimension projective. On note de la même façon la dimension projective d'un module dans $A$-Mod. De plus, si $M$ est de type fini, on note $\ell\ell(M)$ sa longueur de Loewy. Cette dernière est définie comme étant le plus petit entier $n$ pour lequel $\mathrm{rad}^n(M) = M\mathrm{rad}(A)^n = 0$ lorsque $M$ est un $A$-module à droite. On la définit de la même façon pour les $A$-modules à gauche. Pour un $A$-module $M$, on note $\mathrm{top}(M)$ sa coiffe, c'est-à-dire $\mathrm{top}(M) = M/\mathrm{rad}(M)$.

Pour un idéal $I$ de $A$, les modules sur l'algèbre $A/I$ sont vus comme les $A$-modules qui sont annulés par $I$ ou, de façon équivalente, Mod-$A/I$ est identifiée à la sous-catégorie pleine de Mod-$A$ des $A$-modules annulés par $I$.

Finalement, afin de ne pas alourdir les notations, un élément $\omega + I$ d'une algèbre de carquois lié $A = kQ/I$ sera simplement noté $\omega$, lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion.

## 2.1 Idéaux projectifs

On débute avec une définition simple : celle d'idéal projectif.

**Définition 2.1.1** *Soit $I$ un idéal de $A$. On dit que $I$ est un* **idéal projectif à droite** *(ou à gauche) si le $A$-module à droite (ou à gauche, respectivement) $I$ est projectif. On dit aussi que $I$ est un* **idéal projectif** *si $I$ est projectif à droite ou à gauche.*

Soit à présent $I$ un idéal de $A$. On obtient une chaîne descendante d'idéaux de $A$ :

$$I \supseteq I^2 \supseteq \cdots \supseteq I^{t-1} \supseteq I^t \supseteq \cdots$$

et comme $A$ est une algèbre d'Artin, il existe un entier $t > 0$ tel que $I^t = I^{t+1}$. Le plus petit tel entier est appelé l'**idempotence** de $I$. Soit donc $t$ l'idempotence de $I$. On remarque que l'idéal $I^t$ est tel que $(I^t)^2 = I^t$, c'est-à-dire que $I^t$ est idempotent. Or, selon [9, Statement 6], il existe un idempotent $e$ de $A$ (c'est-à-dire un élément $e$ de $A$ tel que $e^2 = e$) tel que $I^t = AeA$. On remarque aussi que $J = I^t$ est le plus grand idéal idempotent de $A$ contenu dans $I$. On appelle $J$ la **partie idempotente** de $I$.

On constate, par exemple, que $I$ est nilpotent si et seulement si la partie idempotente de $I$ est nulle. On note également que $I$ est un idéal idempotent si et seulement si l'idempotence de $I$ est de 1. Voici un exemple qui illustre ces différentes notions.

**Exemple 2.1.2** Soit $Q$ le carquois suivant :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[rr, "\alpha"] & & 2 \arrow[dl, "\beta"] \\ & 3 \arrow[ul, "\gamma"] & \end{tikzcd}$$

et $I$ l'idéal admissible de $kQ$ engendré par les relations $\alpha\beta$ et $\beta\gamma$. Considérons l'idéal $J$ de $A = kQ/I$ admettant comme base les éléments suivants : $\{e_1,\alpha,\gamma,\gamma\alpha,\beta\}$. Alors $J^2$ est engendré par les éléments $\{e_1,\alpha,\gamma,\gamma\alpha\}$ et $J^3 = J^2$. Ainsi, l'idempotence de $J$ vaut 2 et sa partie idempotente (à savoir $J^2$) est engendrée par l'idempotent $e_1$. On note aussi que $J$ n'est pas projectif. Par contre, $J^2$ est projectif à gauche et à droite.

Le prochain lemme s'avère utile pour construire des idéaux projectifs à partir d'un autre idéal projectif. On ne donne ici que la version "à droite", mais la version "à gauche" est tout aussi valide. Par ailleurs, afin d'alléger les énoncés, seules les versions à droite sont données. Les versions à gauche sont aussi valides et leur preuve est similaire.

**Lemme 2.1.3** *Soit $I$ un idéal de $A$ et $B = A/I$ l'algèbre quotient de $A$ par $I$. Alors*

1. *Tout module projectif de* Mod-$B$ *est isomorphe à $P/PI$ avec $P$ un module projectif de* Mod-$A$.

2. *Si $I$ est projectif à droite, alors $PI$ est projectif dans* Mod-$A$ *lorsque $P$ est projectif dans* Mod-$A$.

**Démonstration**. Montrons d'abord que $P/PI$ est un $B$-module projectif lorsque $P$ est un $A$-module projectif. Soient $f : M \to N$ et $g : P/PI \to N$ des morphismes de $B$-modules avec $f$ un épimorphisme. Soit enfin $\pi : P \to P/PI$ la projection canonique. Comme $P$ est projectif dans Mod-$A$, il existe $h : P \to M$ tel que $g\pi = fh$. Maintenant, puisque $M$ est un $A/I$-module, on a $h(PI) = h(P)I \subseteq MI = 0$. Par conséquent, $PI \subseteq$ Ker$h$ et donc, en vertu du théorème d'isomorphisme, il existe $\phi : P/PI \to M$ tel que $\phi\pi = h$. Ainsi, on a $g\pi = f\phi\pi$ et $\pi$ étant un épimorphisme, on trouve $g = f\phi$, ce qui montre que $P/PI$ est projectif. Montrons maintenant que si $Q$ est un module projectif de Mod-$B$, alors il existe un module projectif $P$ de Mod-$A$ tel que $Q \cong P/PI$. Pour ce faire, soit $\varepsilon : P \to Q$ une couverture projective de $Q$ dans Mod-$A$ avec noyau $\Omega$. Alors $\text{top}(Q) \cong \text{top}(P)$. De plus, on a

$$\text{top}(P/PI) = \frac{P/PI}{(\text{rad}(P) + PI)/PI} \cong P/(\text{rad}(P) + PI)$$

et, $\varepsilon$ étant une couverture projective de $Q$, on trouve que $\Omega \subseteq \text{rad}(P)$. De plus, $\varepsilon(PI) = \varepsilon(P)I = QI = 0$ et donc, $PI \subseteq \Omega \subseteq \text{rad}(P)$ et ceci montre que $\text{top}(P/PI) \cong \text{top}(P)$. Comme on a un épimorphisme $P/PI \to Q$ et que $P/PI$ est projectif avec $\text{top}(P/PI) \cong \text{top}(Q)$, on obtient que $Q \cong P/PI$. Ceci termine la preuve de (1).

Montrons maintenant l'énoncé (2). Soient $P$ un module projectif de Mod-$A$ et $L$ un $A$-module libre tel que l'on ait un épimorphisme $L \to P$ avec noyau $\Omega$. Comme $P$ est projectif, on obtient $L \cong P \oplus \Omega$ et donc $LI \cong PI \oplus \Omega I$. Pour montrer que $PI$ est projectif, il suffit donc de montrer que $LI$ est projectif. Soit $\Lambda$ un ensemble tel que

$$L \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} A.$$

On trouve

$$LI \cong (\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} A)I = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} I$$

lequel est projectif puisque $I$ est projectif par hypothèse. $\square$

**Lemme 2.1.4** *Soit $I$ un idéal projectif à droite de $A$ d'idempotence $t$ tel que sa partie idempotente est engendrée par l'idempotent $e$. Alors $AeA$ et $I/AeA$ sont des idéaux projectifs à droite de $A$ et de $A/AeA$, respectivement.*

**Démonstration**. Il suffit de remarquer que $AeA = I^t$ et que $I/AeA = I/I^t = I/I^{t+1} = I/IAeA$ et d'appliquer le lemme précédent. $\square$

Voici maintenant un lemme bien connu qui est essentiel lors de l'étude des dimensions projectives de modules reliés par une suite exacte. On peut trouver sa preuve dans [2, Page 275].

**Lemme 2.1.5** *Soit $0 \to L \to M \to N \to 0$ une suite exacte courte de $A$-modules à droite. Alors*

1. $\mathrm{dp}_A(L) \leq \sup\{\mathrm{dp}_A(M),\mathrm{dp}_A(N)-1\}$. *Il y a égalité si* $\mathrm{dp}_A(M) \neq \mathrm{dp}_A(N)$.
2. $\mathrm{dp}_A(M) \leq \sup\{\mathrm{dp}_A(L),\mathrm{dp}_A(N)\}$. *Il y a égalité si* $\mathrm{dp}_A(N) \neq \mathrm{dp}_A(L)+1$.
3. $\mathrm{dp}_A(N) \leq \sup\{\mathrm{dp}_A(M),\mathrm{dp}_A(L)+1\}$. *Il y a égalité si* $\mathrm{dp}_A(M) \neq \mathrm{dp}_A(L)$.

À l'aide de ce lemme, on peut démontrer le résultat suivant qui est à la base de tous les résultats établis dans cette section :

**Lemme 2.1.6** *Soit $I$ un idéal projectif à droite de $A$ d'idempotence $t$. Si $M$ est un $A/I$-module à droite, alors*

1. $\mathrm{dp}_A(M) \leq \mathrm{dp}_{A/I}(M)+1$,

*2.* $\mathrm{dp}_{A/I}(M) \leq \mathrm{dp}_A(M) + 2(t-1)$.

**Démonstration**. La démonstration de l'énoncé (1) est bien connue. Par exemple, elle se trouve dans [9, Statement 1]. Pour prouver (2), on constate qu'il suffit de montrer l'énoncé lorsque $\mathrm{dp}_A(M)$ est fini. On procède donc par récurrence sur $r = \mathrm{dp}_A(M)$. Si $r = 0$, alors $M$ est projectif dans Mod-$A$. Comme $M$ est également un $A/I$-module, on a $MI = 0$. Ceci donne que $M = M/MI$ est projectif dans Mod-$A/I$. Ainsi, l'énoncé est vérifié pour $r = 0$. Maintenant, supposons que $r = 1$. Dans ce cas, on a une résolution projective

$$0 \longrightarrow Q \xrightarrow{j} P \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

de $M$ dans Mod-$A$ avec $j$ un morphisme d'inclusion. On a $\varepsilon(PI) = \varepsilon(P)I = MI = 0$ et donc, $PI \subseteq Q$. On trouve ainsi une chaîne de sous-modules de $P$

$$PI^{t+1} \subseteq QI^t \subseteq PI^t \subseteq \cdots \subseteq QI \subseteq PI \subseteq Q \subseteq P.$$

Ceci induit une suite exacte

$$(*) \quad PI^t/QI^t \to QI^{t-1}/QI^t \to PI^{t-1}/PI^t \to \cdots \to Q/QI \to P/PI \to M \to 0$$

avec les morphismes canoniques. En effet, des applications successives du lemme du serpent nous permettent d'obtenir les suites exactes :

$$0 \to Q/PI \to P/PI \to M \to 0$$

$$0 \to PI/QI \to Q/QI \to Q/PI \to 0$$

$$0 \to QI/PI^2 \to PI/PI^2 \to PI/QI \to 0$$

$$\vdots$$

$$0 \to QI^{t-1}/PI^t \to PI^{t-1}/PI^t \to PI^{t-1}/QI^{t-1} \to 0$$

$$0 \to PI^t/QI^t \to QI^{t-1}/QI^t \to QI^{t-1}/PI^t \to 0.$$

La suite exacte (*) est obtenue en racollant ces dernières suites exactes courtes. Or, comme $PI^t = PI^{t+1} \subseteq QI^t \subseteq PI^t$, on a $PI^t/QI^t = 0$. De plus, selon le lemme 2.1.3, les termes de la suite exacte (*) sont projectifs dans Mod-$A/I$ et donc, (*) est une résolution projective de $M$ dans Mod-$A/I$. En particulier, on obtient $\mathrm{dp}_{A/I}(M) \leq 2t-1 = r+2(t-1)$. Donc, le résultat est vérifié pour $r=1$. Supposons à présent que $r>1$. Soit

$$0 \longrightarrow \Omega \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

une suite exacte courte dans Mod-$A$ avec $P$ projectif. On a alors $\mathrm{dp}_A(\Omega) = r-1$ et, comme plus haut, $PI \subseteq \Omega$. En utilisant le lemme du serpent, on obtient une suite exacte $0 \to \Omega/PI \to P/PI \to M \to 0$ de $A$-modules avec $P/PI$ projectif dans Mod-$A/I$. Or, selon le lemme précédent, on trouve

$$\begin{aligned} \mathrm{dp}_{A/I}(M) &\leq \sup\{\mathrm{dp}_{A/I}(P/PI), \mathrm{dp}_{A/I}(\Omega/PI)+1\} \\ &= \mathrm{dp}_{A/I}(\Omega/PI)+1. \end{aligned}$$

De plus, la suite exacte $0 \to PI \to \Omega \to \Omega/PI \to 0$ dans Mod-$A$ donne

$$\begin{aligned} \mathrm{dp}_A(\Omega/PI) &\leq \sup\{\mathrm{dp}_A(\Omega), \mathrm{dp}_A(PI)+1\} \\ &= \sup\{\mathrm{dp}_A(\Omega), 1\} \\ &= \mathrm{dp}_A(\Omega) = r-1. \end{aligned}$$

Donc, selon l'hypothèse de récurrence, on obtient $\mathrm{dp}_{A/I}(\Omega/PI) \leq \mathrm{dp}_A(\Omega/PI)+2(t-1)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathrm{dp}_{A/I}(M) &\leq \mathrm{dp}_{A/I}(\Omega/PI)+1 \\ &\leq \mathrm{dp}_A(\Omega/PI)+2(t-1)+1 \\ &\leq r-1+2(t-1)+1 \\ &= r+2(t-1). \end{aligned}$$

□

Ce dernier lemme affirme, entre autres, que si la dimension globale de $A$ est finie, alors il en est de même pour l'algèbre $A/I$. Mais la réciproque est fausse : il est possible que la dimension globale de $A/I$ soit finie sans que celle de $A$ le soit. En fait, nous avons besoin de vérifier que l'idéal $I$ satisfait à une certaine condition pour conclure que la dimension globale de $A$ est finie. Le résultat suivant explicite ce fait. Nous convenons que $\mathrm{dim.gl}(0) = -1$.

**Proposition 2.1.7** *Soit $I$ un idéal projectif de $A$ d'idempotence $t$ dont la partie idempotente est engendrée par l'idempotent $e$. Alors on a*

1. $\mathrm{dim.gl}(A/I) \leq \mathrm{dim.gl}(A) + 2(t-1)$,
2. $\mathrm{dim.gl}(eAe) \leq \mathrm{dim.gl}(A) \leq \mathrm{dim.gl}(eAe) + \mathrm{dim.gl}(A/I) + 2$.

**Démonstration**. La partie (1) se déduit directement de l'inégalité (2) du lemme précédent. Pour démontrer la partie (2), on suppose que $I$ est projectif à droite : la preuve de l'autre cas est semblable.

Nous commençons par prouver la première inégalité dans (2). Dans un premier temps, soit $P$ un module projectif de mod-$A$. On a $Pe = PAe = P(AeA)e$. Comme $I$ est projectif à droite, il en est de même pour $AeA$ selon le lemme 2.1.4. Selon le lemme 2.1.3, $PAeA$ est projectif et sa coiffe est engendrée par des éléments de $Pe$. On obtient ainsi que $PAeA$ est un facteur direct de $(eA)^r$ pour un $r \geq 0$. Par conséquent, $Pe = PAeAe$ est un facteur direct de $(eAe)^r$, ce qui montre que $Pe = \mathrm{Hom}_A(eA,P)$ est projectif dans Mod-$eAe$. De plus, puisque le foncteur $F = \mathrm{Hom}_A(eA,-)$ est exact, $F$ transforme les résolutions projectives finies de mod-$A$ en résolutions projectives finies de mod-$eAe$. On obtient ainsi la première inégalité dans (2).

Maintenant, nous montrons la seconde inégalité dans (2). Il est clair que l'on peut se restreindre aux cas où dim.gl$(eAe) = r < \infty$ et dim.gl$(A/I) = s < \infty$. On commence par démontrer l'affirmation suivante :

Si $M$ est un $A$-module à droite pour lequel il existe $i > 0$ tel que $MI^i = 0$, alors $\mathrm{dp}_A(M) \leq s + 1$.

D'abord, si $i = 1$, alors $M$ est un $A/I$ module qui, selon la proposition 2.1.6, est tel que $\mathrm{dp}_A(M) \leq \mathrm{dp}_{A/I}(M) + 1 \leq s + 1$. Supposons maintenant, par récurrence, que le résultat soit vérifié pour $i > 0$. Soit $M$ un $A$-module tel que $MI^{i+1} = 0$. Ceci donne $(MI)I^i = 0$ et donc, selon l'hypothèse de récurrence, $\mathrm{dp}_A(MI) \leq s + 1$. De même, $\mathrm{dp}_A(M/MI) \leq s + 1$ puisque $(M/MI)I = 0$. La suite exacte courte

$$0 \to MI \to M \to M/MI \to 0$$

dans Mod-$A$ donne alors lieu, selon le lemme 2.1.5, à

$$\mathrm{dp}_A(M) \leq \sup\{\mathrm{dp}_A(MI), \mathrm{dp}_A(M/MI)\} \leq s + 1,$$

ce qui achève la preuve de l'affirmation ci-haute. Maintenant, soit $M$ un $A$-module de type fini et

$$\cdots \to P_r \to P_{r-1} \to \cdots P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

une résolution projective de $M$ dans mod-$A$ avec $r$-ième noyau $\Omega_r$. En appliquant le foncteur exact $\mathrm{Hom}_A(eA, -)$ à cette suite exacte, on obtient une suite exacte

$$0 \to \Omega_r e \to P_r e \to P_{r-1} e \to \cdots P_1 e \to P_0 e \to Me \to 0$$

de $eAe$-modules avec les $P_i e$ projectifs pour $i = 0, 1, \ldots, r$. Comme $\mathrm{dp}_{eAe}(Me) \leq$ dim.gl$(eAe)$ $= r$, $\Omega_r e$ est un $eAe$-module projectif.

Maintenant, pour les fins de la preuve, étudions les propriétés du $A$-module $\Omega_r eA$. Soit $\varepsilon : P \to \Omega_r eA$ une couverture projective de $\Omega_r eA$ avec noyau $L$. La suite exacte courte

$$0 \to L \to P \to \Omega_r eA \to 0$$

de mod-$A$ induit une suite exacte courte

$$0 \to Le \to Pe \to \Omega_r e \to 0$$

dans mod-$eAe$, car $\Omega_r eAe = \Omega_r e$. Comme la coiffe du $A$-module $\Omega_r eA$ est engendrée par des éléments de $\Omega_r e$, $P$ est un facteur direct de $(eA)^t$ pour un certain entier $t$. Donc, $\mathrm{rad}_{eAe}(Pe) = Pe(\mathrm{rad}(A))e = \mathrm{rad}(P)e$ et, comme $L \subseteq \mathrm{rad}(P)$, on obtient que $Pe$ est une couverture projective de $\Omega_r e$. Par conséquent, $Le = 0$, ou de façon équivalente, $LI^t = 0$. Selon l'affirmation plus haut, on obtient $\mathrm{dp}_A(L) \leq s+1$, ce qui donne $\mathrm{dp}_A(\Omega_r eA) \leq s+2$. La suite exacte courte

$$0 \to \Omega_r eA \to \Omega_r \to \Omega_r/\Omega_r eA \to 0$$

de mod-$A$ donne $\mathrm{dp}_A(\Omega_r) \leq \sup\{\mathrm{dp}_A(\Omega_r eA), \mathrm{dp}_A(\Omega_r/\Omega_r eA)\} \leq \sup\{s+2, s+1\} = s+2$, car le $A$-module $\Omega_r/\Omega_r eA$ est annulé par $AeA = I^t$. Ainsi, on obtient $\mathrm{dp}_A(M) \leq s+r+2$, ce qui termine la preuve de (2). $\square$

Comme application directe de cette proposition, on a le résultat suivant, fort intéressant.

**Corollaire 2.1.8** *Soit $I$ un idéal projectif de $A$ dont la partie idempotente est engendrée par l'idempotent $e$. Alors la dimension globale de $A$ est finie si et seulement si la dimension globale de $eAe$ et celle de $A/I$ sont finies.*

## 2.2 Chaînes d'idéaux et quasi-stratifications

Dans cette section, nous nous intéressons aux chaînes d'idéaux projectifs qui ont la propriété que les quotients successifs des idéaux admettent une partie idempotente "assez petite". Nous définirons ce que nous entendons par "assez petite". Nous donnons ensuite les définitions de deux classes d'algèbres basées sur l'existence de telles chaînes d'idéaux. Enfin, nous étudions quelques propriétés de ces algèbres.

Avant de continuer l'investigation, nous introduisons quelques définitions concernant les idempotents et les chaînes d'idéaux de $A$.

**Définition 2.2.1** *Soit $e$ un idempotent de $A$. On dit que $e$ est* **simple** *si $e$ est primitif tel que $e \operatorname{rad}(A)\, e = 0$. On convient aussi que $e$ est* **pseudo-primitif** *si $e$ est primitif ou nul et* **pseudo-simple** *si $e$ est simple ou nul.*

Jusqu'à maintenant, nous avons montré que si $I$ est un idéal projectif, alors les propriétés homologiques des algèbres $A$ et $A/I$ sont reliées. En vertu du corollaire précédent, pour contrôler la dimension globale de $A$ lorsque l'on passe de l'algèbre $A/I$ vers l'algèbre $A$, il faut contrôler la dimension globale de $eAe$. Or, si $e$ est pseudo-primitif, la dimension globale de $eAe$ est finie si et seulement si $e \operatorname{rad}(A)\, e = 0$. Ceci motive les définitions suivantes.

**Définition 2.2.2** *On dit qu'un idéal $I$ de $A$ est*

1. **quasi-stratifiant à droite** *(ou* **quasi-stratifiant à gauche***) si $I$ est projectif à droite (ou à gauche, respectivement) et si sa partie idempotente est engendrée par un idempotent pseudo-primitif. On convient aussi que $I$ est* **quasi-stratifiant** *s'il est quasi-stratifiant à gauche ou à droite*

2. **quasi-héréditaire à droite** *(ou* **quasi-héréditaire à gauche***) si $I$ est projectif à droite (ou à gauche, respectivement) et et si sa partie idempotente est engendrée par un idempotent pseudo-simple. On convient aussi que $I$ est* **quasi-héréditaire**

*s'il est quasi-héréditaire à gauche ou à droite*

On doit souligner que si $e$ est un idempotent primitif qui engendre la partie idempotente d'un idéal $I$, alors $e$ n'est pas unique. Cependant, on constate le fait suivant :

Si $I$ est un idéal quasi-stratifiant à droite de $A$ dont la partie idempotente est engendrée par l'idempotent $e$, alors $I$ est quasi-héréditaire à droite si et seulement si $e\ \mathrm{rad}(A)\ e = 0$.

La suffisance est évidente. Pour montrer la nécessité, supposons que $I$ est quasi-héréditaire à droite avec $e'$ un générateur idempotent de la partie idempotente de $I$ tel que $e'\ \mathrm{rad}(A)\ e' = 0$. Comme $AeA = Ae'A$, on trouve que $e = \sum_{i=0}^{l} a_i e' b_i$ avec $a_i, b_i \in A$. Donc, $e\ \mathrm{rad}(A)\ e = (\sum_{i=0}^{l} a_i e' b_i)\ \mathrm{rad}(A)\ (\sum_{i=0}^{l} a_i e' b_i) \subseteq Ae'\ \mathrm{rad}(A)\ e'A = 0$.

Illustrons ces définitions à l'aide d'une algèbre de carquois lié.

**Exemple 2.2.3** Soit $A$ l'algèbre donnée par le carquois lié $(Q,I)$ avec $Q$ le carquois

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[rr, "\alpha"] & & 2 \arrow[ll, bend right, "\delta"'] \arrow[dl, "\beta"] \\
& 3 \arrow[ul, "\gamma"] &
\end{tikzcd}$$

et $I$ l'idéal engendré par les relations $\beta\gamma$, $\delta\alpha$. Considérons les idéaux $I_1 = Ae_2A$ et $I_2 = A\gamma A$. On peut vérifier sans difficultés qu'en tant que $A$-modules à droite, on a $I_1 \cong (e_2A)^3$ et $I_2 \cong e_1A$. Donc, selon les définitions plus haut, $I_1$ et $I_2$ sont deux idéaux quasi-stratifiants de $A$. Leurs parties idempotentes sont engendrées par $e_2$ et 0, respectivement. Comme $e_2\ \mathrm{rad}(A)\ e_2 = 0$, $I_1$ et $I_2$ sont également quasi-héréditaires.

Dans [8], on montre qu'une algèbre $A$ est **standardement stratifiée** (ou **quasi-héréditaire**) si et seulement s'il existe une chaîne

$$0 = I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_{n-1} \subset I_n = A$$

d'idéaux de $A$ telle que $I_{i+1}/I_i$ est un $A/I_i$-module projectif et engendré par un idempotent primitif (ou simple, respectivement) de $A/I_i$, pour $i = 0,1,\ldots,n-1$.

Le lecteur est invité à consulter [11] pour des conditions équivalentes pour les algèbres standardement stratifiées. Il suit du corollaire 2.1.8 que toute algèbre quasi-héréditaire est de dimension globale finie (en vertu d'une récurrence simple sur l'entier $n$ de la chaîne ci-dessus). Dans [14], il est démontré qu'une algèbre standardement stratifiée est de dimension globale finie si et seulement si elle est quasi-héréditaire. Mentionnons que les algèbres standardement stratifiées portent le nom d'algèbres QH-1 dans ce dernier article.

Nous introduisons maintenant de nouvelles classes d'algèbres d'Artin qui, comme on le verra, généralisent les concepts d'algèbres standardement stratifiées et d'algèbres quasi-héréditaires.

**Définition 2.2.4** *On dit que $A$ est* **quasi-stratifiée** *si $A$ admet une chaîne d'idéaux*

$$0 = I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_{r-1} \subset I_r = A$$

*telle que $I_{i+1}/I_i$ est un idéal quasi-stratifiant de $A/I_i$ pour $i = 0,1,\ldots,r-1$. Une telle chaîne d'idéaux est appelée une* **quasi-stratification** *de $A$.*

**Définition 2.2.5** *On dit que $A$ est* **ultimement héréditaire** *si $A$ admet une chaîne d'idéaux*

$$0 = I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_{r-1} \subset I_r = A$$

*telle que $I_{i+1}/I_i$ est un idéal quasi-héréditaire de $A/I_i$ pour $i = 0,1,\dots,r-1$. Une telle chaîne d'idéaux est appelée une chaîne* **quasi-héréditaire** *de $A$.*

Ainsi, on voit comment ces algèbres généralisent les algèbres standardement stratifiées et les algèbres quasi-héréditaires.

Nous interrompons l'investigation pour présenter le résultat suivant qui est très utile pour déterminer si un idéal est projectif lorsque l'algèbre $A$ est élémentaire.

**Proposition 2.2.6** *Soit $A$ une algèbre élémentaire de dimension finie sur un corps $k$. Soit $I$ un idéal de $A$ engendré par des éléments de $eAf$ avec $e$ et $f$ des idempotents primitifs. Alors*

1. *Le module $I_A$ est projectif si et seulement si $\dim_k I = \dim_k(\mathrm{top} I_A)\dim_k(fA)$. Dans ce cas, $I_A \cong (fA)^r$ avec $r = \dim_k(\mathrm{top} I_A)$.*
2. *Le module ${}_AI$ est projectif si et seulement si $\dim_k I = \dim_k(\mathrm{top}_A I)\dim_k(Ae)$. Dans ce cas, ${}_AI \cong (Ae)^s$ avec $s = \dim_k(\mathrm{top}_A I)$.*

**Démonstration**. L'énoncé (2) étant dual à l'énoncé (1), nous nous contentons de démontrer (1). Notons $S_f$ le $A$-module simple associé à l'idempotent $f$, c'est-à-dire $S_f = fA/f\mathrm{rad}(A)$. Comme $I$ est engendré par des éléments de $eAf$, on voit aisément que $\mathrm{top} I_A = S_f^r$ pour un certain $r \geq 0$. En fait, comme $A$ est élémentaire, on a $r = \dim_k(\mathrm{top} I_A)$. Soit donc

$$(fA)^r \to I_A \to 0$$

une couverture projective du $A$-module $I_A$. Alors $I_A$ est projectif si et seulement si $I_A \cong (fA)^r$ et cette dernière affirmation est équivalente à $\dim_k I = \dim_k(fA)^r = \dim_k(\mathrm{top} I_A)\dim_k(fA)$. $\square$

On continue l'investigation en donnant des exemples d'algèbres quasi-stratifiées et d'algèbres ultimement héréditaires.

**Exemple 2.2.7** Voici maintenant deux exemples d'algèbres : la première est une algèbre quasi-stratifiée et l'autre, une algèbre ultimement héréditaire. Le lecteur peut utiliser le résultat précédent afin de vérifier la projectivité des idéaux impliqués dans les deux exemples.

1. Soit $A$ l'algèbre donnée par le carquois lié $(Q,I)$ avec Q le carquois

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "\sigma"] \arrow[r, bend left=60, "\alpha"] \arrow[r, bend left=15, "\beta"] & 2 \arrow[loop right, "\mu"] \arrow[l, bend left=15, "\gamma"] \end{tikzcd}$$

   et $I$ l'idéal engendré par les relations $\sigma^2$, $\sigma\alpha$, $\gamma\alpha$, $\beta\gamma$, $\mu\gamma$, $\beta\mu$, $\gamma\sigma$, $\mu^2$. Un calcul simple permet de vérifier que $A$ n'est ni standardement stratifiée ni quasi-héréditaire. Cependant, on peut montrer que $A$ est quasi-stratifiée. En effet, posons $I_1 = A\alpha A$, $I_2 = A\alpha A + A\beta A$ et $I_3 = Ae_1A$. Alors, la chaîne d'idéaux

$$0 \subset \ I_1 \ \subset \ I_2 \ \subset \ I_3 \ \subset A$$

   est telle que $I_1$ est un idéal quasi-stratifiant à droite de $A$, $I_2/I_1$ est un idéal quasi-stratifiant à gauche de $A/I_1$ et $I_3/I_2$ est un idéal quasi-stratifiant à gauche de $A/I_2$. Ainsi, $A$ est une algèbre quasi-stratifiée.

2. Soit $B$ l'algèbre donnée par le carquois lié $(Q',I')$ avec $Q'$ le carquois

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left=15, "\delta"'] \arrow[r, bend right=60, "\beta"'] & 2 \arrow[l, bend right=15, "\gamma"'] \arrow[l, bend right=60, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

   et $I'$ l'idéal engendré par les relations $\gamma\beta$, $\delta\gamma$, $\alpha\beta$, $\alpha\delta$. Comme les idempotents $e_1$ et $e_2$ ne sont pas simples, il est facile de vérifier que $B$ n'est pas quasi-héréditaire.

Toutefois, on peut vérifier que

$$0 \subset < \alpha > \subset < \alpha,\beta > \subset < e_1 > \subset B$$

est une chaîne quasi-héréditaire de $B$, ce qui donne que $B$ est ultimement héréditaire.

Maintenant, nous étudions ce qui se passe lorsque l'algèbre $A$ admet une quasi-stratification de longueur un. Le lecteur est invité à consulter [2, Page 212-216] pour la définition d'équivalence de Morita de deux algèbres, la définition de progénérateurs de Mod-$A$ et pour le théorème de Morita. Ces notions sont utilisées dans le prochain lemme.

**Lemme 2.2.8** *Supposons que $A$ admet une quasi-stratification de longueur un. Alors $A$ est Morita-équivalente à l'algèbre $eAe$ pour tout idempotent primitif $e$ de $A$. Dans ce cas, $A$ est ultimement héréditaire si et seulement si $A$ est héréditaire.*

**Démonstration**. Par hypothèse, l'idéal $A$ est quasi-stratifiant sur $A$. Comme $A$ est idempotent, $A = Ae_0A$ pour un certain idempotent primitif $e_0$ de $A$. Ainsi, si $e$ est un idempotent primitif de $A$, alors la coiffe de $eA = eAe_0A$ est engendrée par des éléments de $Ae_0$ et ainsi, $eA \cong e_0A$. Ceci montre que $eA$ est un progénérateur de Mod-$A$. Ainsi, selon le théorème de Morita, $A$ est Morita-équivalente à l'algèbre $\mathrm{End}_A(eA) \cong eAe$.

Supposons maintenant que $A$ est ultimement-héréditaire et soit $I$ un idéal quasi-héréditaire non-nul de $A$. Nous considérons seulement le cas où $I$ est projectif à droite : le cas où $I$ est projectif à gauche est similaire. Comme $I_A$ est projectif, on a $I_A \cong (e_0A)^r$ pour un certain $r > 0$. Par conséquent, $\ell\ell(I_A) = \ell\ell(e_0A) = \ell\ell(A_A)$ et, en particulier, $I_A$ n'est pas nilpotent. Par conséquent, $I_A = AeA = A$ pour un certain idempotent primitif $e$ de $A$. Comme $A$ est ultimement héréditaire, l'idéal $I_A = A_A$ est quasi-héréditaire et donc $e\,\mathrm{rad}(A)\,e = 0$ et ainsi l'algèbre $eAe$ est une algèbre simple. Comme $A$ est Morita-équivalente à $eAe$, on trouve que $A$ est héréditaire. La réciproque étant évidente, la preuve est terminée. $\square$

On termine cette section en donnant une borne sur la dimension globale d'une algèbre ultimement héréditaire et en particulier, on montre que toute algèbre ultimement héréditaire est de dimension globale finie. Cette borne est fonction du nombre de classes d'isomorphisme de $A$-modules simples et de la longueur d'une chaîne quasi-héréditaire de l'algèbre.

**Proposition 2.2.9** *Soit $A$ une algèbre ultimement héréditaire admettant $n$ classes d'isomorphisme de $A$-modules simples. Supposons de plus que $A$ admet une chaîne quasi-héréditaire de longueur $r$. Alors*

$$\text{dim.gl}(A) \leq \min\{2(r-1), n+r-2\}.$$

**Démonstration**. Nous procédons par récurrence sur $r$. Si $r = 1$, alors le lemme précédent nous indique que $A$ est Morita-équivalente à une algèbre de la forme $eAe$ avec $e$ simple. Comme $A$ est Morita-équivalente à une algèbre de dimension globale nulle, il en est de même pour $A$ et le résultat est vérifié. Supposons donc, par récurrence, que $r > 1$ et que le résultat soit vrai pour toute algèbre ultimement héréditaire admettant une chaîne quasi-héréditaire de longueur $r-1$. Soit

$$0 = I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_r = A$$

une chaîne quasi-héréditaire de $A$. On voit sans difficultés que

$$0 = I_1/I_1 \subset I_2/I_1 \subset \cdots \subset I_r/I_1 = A/I_1$$

est une chaîne quasi-héréditaire de longueur $r-1$ de $A/I_1$. Soit $e$ un idempotent pseudo-simple qui engendre la partie idempotente de $I_1$. On distingue deux cas, selon que $e = 0$

ou $e$ est primitif. Si $e = 0$, alors l'algèbre $A/I_1$ admet $n$ classes d'isomorphisme de $A$-modules simples. On obtient, selon la proposition 2.1.7 et l'hypothèse de récurrence, que

$$\begin{aligned} \operatorname{dim.gl}(A) &\leq \operatorname{dim.gl}(A/I_1) + 1 \\ &\leq \min\{2((r-1)-1), n + (r-1) - 2\} + 1 \\ &\leq \min\{2(r-1), n + r - 2\}. \end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration du premier cas. Supposons maintenant que $e$ est primitif. On remarque que l'algèbre $A/I_1$ admet $n-1$ classes d'isomorphisme de $A$-modules simples. Selon la proposition 2.1.7, on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{dim.gl}(A) &\leq \operatorname{dim.gl}(A/I_1) + 2 \\ &\leq \min\{2((r-1)-1), (n-1) + (r-1) - 2\} + 2 \\ &\leq \min\{2(r-1), n + r - 2\}. \end{aligned}$$

$\square$

# CHAPITRE 3

# Le déterminant de Cartan

Dans ce chapitre, nous étudions le déterminant de Cartan des algèbres quasi-stratifiées. Nous montrons que celui-ci est toujours positif et, en particulier, que la conjecture du déterminant de Cartan est vérifiée pour ces algèbres. Plus généralement, nous démontrons qu'une algèbre quasi-stratifiée est de dimension globale finie si et seulement si son déterminant de Cartan vaut un. Nous montrons également que chacune de ces deux conditions est équivalente à dire que l'algèbre est ultimement héréditaire.

Nous commençons le chapitre avec une section contenant certains rappels sur le déterminant de Cartan d'une algèbre. Nous donnons ensuite un bref historique de la conjecture du déterminant de Cartan. La dernière section est consacrée à l'étude du déterminant de Cartan des algèbres quasi-stratifiées.

En outre, nous gardons les hypothèses du chapitre précédent, à savoir que $A$ désigne une algèbre d'Artin sur un anneau commutatif $k$. Pour un $A$-module $M$ dans mod-$A$, on note $\ell(M)$ sa longueur de composition.

## 3.1 Rappel sur le déterminant de Cartan

Soit $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ un ensemble d'idempotents primitifs et orthogonaux de $A$. On dit que cet ensemble est **sobre** si $e_1A,e_2A,\ldots,e_nA$ est un ensemble complet de représentants des classes d'isomorphisme des modules projectifs et indécomposables de mod-$A$. Supposons que $\mathcal{E} = \{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ est un tel ensemble. Pour un module $M$ dans mod-$A$, on note $c_i(M)$ le nombre de facteurs de composition de $M$ qui sont isomorphes à top$(e_iA)$, pour $i = 1,2,\ldots,n$. Il est facile de vérifier que $c_i(M) = \ell((Me_i)_{e_iAe_i})$ pour tout $i$. Les idempotents $e_1,e_2,\ldots,e_n$ étant donnés, on peut définir la matrice $(c_i(e_jA))_{n\times n} = \big(\ell(\mathrm{Hom}_A(e_iA,e_jA))_{e_iAe_i}\big)_{n\times n}$. Soit $\mathcal{E}' = \{f_1,f_2,\ldots,f_n\}$ un autre ensemble sobre d'idempotents primitifs orthogonaux de $A$. On peut vérifier sans difficultés qu'il existe un élément inversible $a$ de $A$ et une permutation $\sigma$ de $\mathcal{S}_n$ tels que $f_i = ae_{\sigma(i)}a^{-1}$ pour $i = 1,2,\ldots,n$. Comme, manifestement, $c_i(f_jA) = c_i(ae_{\sigma(j)}a^{-1}A) = c_i(e_{\sigma(j)}A)$, on trouve que la matrice $(c_i(f_jA))_{n\times n}$ est équivalente à la matrice $(c_i(e_jA))_{n\times n}$ à permutation simultanée près des lignes et des colonnes.

**Définition 3.1.1** *Soit $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ un ensemble sobre d'idempotents primitifs orthogonaux de $A$. La matrice $C(A_A) = (c_i(e_jA))_{n\times n}$ est appelée la* **matrice de Cartan à droite** *de $A$. Celle-ci n'est définie qu'à permutation simultanée près de ses lignes et de ses colonnes.*

On peut donc définir sans ambiguité le nombre $\det(C(A_A))$ qui est appelé le **déterminant de Cartan à droite** de $A$. De la même façon, on peut définir la **matrice de Cartan à gauche** de $A$, $C({}_AA)$, ainsi que **le déterminant de Cartan à gauche** de $A$. On peut démontrer que, comme $A$ est une algèbre d'Artin, le déterminant de Cartan à gauche et le déterminant de Cartan à droite de $A$ coïncident et la valeur commune s'appelle **le déterminant de Cartan** de $A$ que l'on note $\mathrm{cd}(A)$. Pour une preuve de ce dernier énoncé, le lecteur est invité à consulter [12, Page 53].

Voici maintenant l'énoncé de la fameuse conjecture du déterminant de Cartan pour les algèbres d'Artin.

**Conjecture 3.1.2 (Conjecture du déterminant de Cartan)** *Si la dimension globale de $A$ est finie, alors* $\mathrm{cd}(A) = 1$.

Afin de comprendre la nature de cette conjecture, regardons le résultat suivant, qui est dû à Samuel Eilenberg. C'est l'énoncé qui est à l'origine de la conjecture. Pour une preuve, on peut consulter, par exemple, [12, Page 53].

**Proposition 3.1.3** *Si la dimension globale de $A$ est finie, alors* $\mathrm{cd}(A) = \pm 1$.

L'idée de la preuve de la proposition précédente est de construire un inverse de la matrice $C(A_A)$ (dans l'anneau des matrices à coefficients entiers). $C(A_A)$ étant inversible, son déterminant doit valoir plus un ou moins un.

Jusqu'à maintenant, personne n'a réussi à trouver une algèbre d'Artin de dimension globale finie dont le déterminant de Cartan vaut moins un, d'où la conjecture.

Mentionnons aussi que la réciproque de la conjecture est fausse : on peut trouver des algèbres d'Artin de dimension globale infinie dont le déterminant de Cartan vaut 1. En voici un exemple :

**Exemple 3.1.4** Soit $A$ l'algèbre donnée par le carquois lié $(Q,I)$ avec $Q$ le carquois :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[r, bend left, "\beta"] & 2 \arrow[l, bend left, "\gamma"] \end{tikzcd}$$

et $I$ l'idéal engendré par les relations $\alpha^2$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\gamma\beta$. On peut vérifier facilement que la dimension projective du module $\mathrm{top}(e_1A)$ (le $A$-module simple associé au sommet 1) est infinie et donc que la dimension globale de $A$ est infinie. En revanche,

$$C(A_A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est la matrice de Cartan à droite de $A$ dont le déterminant vaut 1. Donc, le déterminant de Cartan de $A$ vaut 1 malgré le fait que la dimension globale de $A$ soit infinie.

## 3.2 Historique de la conjecture

L'origine de la conjecture du déterminant de Cartan semble remonter dans les années 50, lorsque S. Eilenberg publia un article contenant la proposition 3.1.3. Par la suite, plusieurs mathématiciens ont tenté de démontrer que la valeur $-1$ du déterminant n'est jamais atteinte lorsque la dimension globale de l'algèbre est finie. Malheureusement, personne n'a réussi, à ce jour, à démontrer ce fait. Dan Zacharia, dans son article [16] au début des années 80, a explicitement énoncé la conjecture comme on la retrouve dans 3.1.2.

Dans cette section, nous donnons un bref résumé des travaux qui ont été faits sur la conjecture du déterminant de Cartan. Nous ne donnons que les grandes lignes de ce développement, puisque une revue complète prendrait certainement plus de 20 pages. Pour une revue exhaustive (jusqu'à 1992), le lecteur peut consulter [12].

Le premier résultat en faveur de cette conjecture, outre celui d'Eilenberg, remonte à 1957 lorsque J. Jans et T. Nakayama ont montré que la conjecture est vérifiée lorsque $A$ est une algèbre dont le carré du radical de Jacobson s'annule. Ils ont également montré que la conjecture est vérifiée lorsque $A$ est un quotient d'une algèbre héréditaire. Pour une preuve, on peut consulter [13].

Le prochain résultat d'une importance considérable, dans l'ordre chronologique, est celui de Dan Zacharia : il démontra que la conjecture est confirmée si la dimension globale de $A$ est au plus deux. Il fût le premier à utiliser des méthodes de réductions matricielles pour simplifier le calcul du déterminant de Cartan d'une algèbre. L'idée de sa preuve repose sur le fait qu'une algèbre de dimension globale deux possède au moins un module simple de dimension projective plus petite ou égale à un. Soit $S$ un tel module simple (à droite). Soient $e_1,e_2,\ldots,e_r$ des idempotents primitifs et orthogonaux tels que $Se_i = S$ pour tout $i$. On peut montrer que la dimension globale de $(1-\sum_{i=1}^{r} e_i)A(1-\sum_{i=1}^{r} e_i)$ est plus petite ou égale à deux et son déterminant de Cartan coïncide avec celui de $A$. On peut alors utiliser une récurrence simple pour conclure.

Par la suite, G. V. Wilson, dans son article "The Cartan map on categories of graded modules" (voir [15]), développa une toute nouvelle idée pour attaquer la conjecture du déterminant de Cartan :

On peut associer, à une algèbre d'Artin $A$ respectant certaines conditions, une matrice de Cartan filtrée $\overline{C}(A_A)$ dont les coefficients sont des polynômes à coefficients entiers. Pour une définition de cette matrice, le lecteur est invité à consulter [12, page 61]. En évaluant chacun de ces polynômes en 1, on obtient la matrice de Cartan "standard" de $A$. On peut montrer, par construction de la matrice de Cartan filtrée, que le déterminant de $\overline{C}(A_A)$ est toujours de la forme $1 + tp(t)$ avec $p(t)$ un polynôme à coefficients entiers. Pour montrer la conjecture, il suffit donc de montrer que $p(t) = 0$ lorsque la dimension globale de $A$ est finie. Pour ce faire, il suffit de montrer que la matrice de Cartan filtrée est inversible dans l'anneau des matrices à coefficients polynomiaux. En effet, la matrice $\overline{C}(A_A)$ étant inversible, on doit avoir que $1 + tp(t)$ est inversible et donc, $p(t) = 0$.

En fait, G. V. Wilson démontra la conjecture du déterminant de Cartan, en utilisant cet outil, pour les algèbres dites positivement graduées.

Quelques années après le résultat de G. V. Wilson, en utilisant des principes analogues à ceux de Dan Zacharia, les mathématiciens W. Burgess, K. Fuller, E. Voss et B. Zimmermann-Huisgen ont démontré la conjecture ainsi que sa réciproque dans le cas où l'algèbre $A$ est sérielle à gauche. La démonstration est analogue à celle de D. Zacharia dans le sens que pour ces algèbres, il est aussi possible de trouver un module simple de dimension projective au plus un lorsque la dimension globale est finie. Le lecteur est invité à consulter [7] pour une preuve.

Peu après, K. Fuller et B. Zimmermann-Huisgen (voir [12]) généralisèrent le résultat de Wilson aux algèbres dites filtrées de Cartan. La définition de ces algèbres se trouve dans [12, page 64]. On tire deux conséquences importantes de ce résultat :

1. La conjecture du déterminant de Cartan est établie pour les algèbres dont le radical au cube s'annule,

2. La conjecture du déterminant de Cartan est confirmée pour les algèbres sérielles à droite.

Par la suite, vers la fin des années 80, W. Burgess et K. Fuller ont démontré la conjecture du déterminant de Cartan pour les algèbres quasi-héréditaires, c'est-à-dire les algèbres standardement stratifiées dont la dimension globale est finie. La preuve utilise des réductions matricielles et une récurrence sur le nombre de modules simples de l'algèbre. Pour une preuve, le lecteur peut consulter [6] ou encore le théorème 3.3.5 de la prochaine section, qui généralise le résultat de [6].

## 3.3 Le déterminant de Cartan des algèbres quasi-stratifiées

Nous commençons cette section avec un résultat très intéressant qui nous permet, par des méthodes de réduction, de simplifier le calcul du déterminant de Cartan d'une algèbre étant donné un idéal projectif de $A$. Pour simplifier, on convient que $\mathrm{cd}(0) = 1$.

**Proposition 3.3.1** *Soit $I$ un idéal projectif de $A$ avec $e$ un idempotent de $A$ qui engendre la partie idempotente de $I$. Alors,*

$$\mathrm{cd}(A) = \mathrm{cd}(eAe)\,\mathrm{cd}(A/I).$$

**Démonstration**. Nous considérons seulement le cas où $I$ est projectif à droite : l'autre cas est semblable. Fixons-nous $\mathcal{E} = \{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ un ensemble sobre d'idempotents primitifs orthogonaux de $A$. Notons $C(A)$ la matrice de Cartan à droite de $A$ donnée par $(c_i(e_jA))_{n\times n}$. Enfin, posons $B = A/I$ et, pour $a \in A$, $\overline{a} = a + I \in B$.

(1) Nous commençons par considérer le cas où $e = 0$, c'est-à-dire le cas où $I$ est nilpotent. Comme on a convenu que $\mathrm{cd}(0) = 1$, on doit montrer dans ce cas que $\mathrm{cd}(A) = \mathrm{cd}(B)$. Maintenant, puisque $I$ est nilpotent, une preuve élémentaire permet de vérifier que $\overline{\mathcal{E}} = \{\overline{e_1},\overline{e_2},\ldots,\overline{e_n}\}$ est un ensemble sobre d'idempotents primitifs orthogonaux de $B$. On note, pour un $B$-module à droite $N$, $d_i(N)$ le nombre de facteurs de composition de $N$ qui sont isomorphes à $\mathrm{top}(\overline{e_i}B)$ pout tout $i$. Or $\overline{e_i}B \cong_B e_iA/e_iI$ pour tout $i$ de sorte que $C(B) = (d_i(e_jA/e_jI))_{n\times n}$ est la matrice de Cartan à droite de $B$. De plus, en utilisant le fait que pour un $A$-module $M$ dans mod-$A$, on a $c_i(M) = \ell((Me_i)_{e_iAe_i})$, on constate que si $M$ est un $B$ module à droite, alors $c_i(M_A) = d_i(M_B)$ pour tout $i$. Étudions maintenant les $A$-modules projectifs $e_1I,e_2I,\ldots,e_nI$. Pour ce faire, on peut supposer, sans perdre de

généralité, que

$$\ell\ell(e_1A_A) \leq \ell\ell(e_2A_A) \leq \cdots \leq \ell\ell(e_nA_A).$$

Comme $I$ est nilpotent, $I \subseteq \mathrm{rad}(A)$ et ainsi $\ell\ell(e_1I_A) < \ell\ell(e_1A_A)$. Puisque $e_1I$ est projectif, on en conclut que $e_1I = 0$. Maintenant, soit $1 < j \leq n$. Étant donné que $\ell\ell(e_jI_A) < \ell\ell(e_jA_A)$, on trouve que

$$e_jI \cong \bigoplus_{i=1}^{j-1}(e_iA)^{n_{ij}},\ n_{ij} \geq 0.$$

Ceci donne, pour $1 \leq i,j \leq n$,

$$\begin{aligned} d_i(e_jA/e_jI) &= c_i(e_jA/e_jI) \\ &= c_i(e_jA) - c_i(e_jI) \\ &= c_i(e_jA) - \sum_{k=1}^{j-1} n_{kj}c_i(e_kA). \end{aligned}$$

On en conclut que la première colonne de $C(A)$ coïncide avec la première colonne de $C(B)$ et que, pour $1 < j \leq n$, la $j$-ème colonne de $C(B)$ est une combinaison linéaire des $j-1$ premières colonnes de $C(A)$. Par conséquent, une récurrence simple permet de montrer que $\det C(A) = \det C(B)$ ce qui termine la preuve de ce premier cas.

(2) Ensuite, considérons le cas où $I = AeA$ avec $e$ un idempotent non-nul de $A$ et avec $I$ différent de $A$. On peut supposer, sans perdre de généralité, que $\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$ avec $1 \leq m < n$ est un ensemble sobre d'idempotents primitifs orthogonaux de $eAe$. On affirme que $I = A(e_1+e_2+\cdots+e_m)A$. En effet, on a $A(e_1+e_2+\cdots+e_m)A \subseteq I$ et si $f$ est un idempotent primitif de $eAe$, alors il existe $1 \leq i \leq m$ tel que l'on ait l'isomorphisme de $eAe$-modules $\phi : e_iAe \to fAe$. Ainsi, il existe $a,b \in A$ tel que $f = \phi(e_ia) = \phi(e_i)e_ia$ et donc, $f \in A(e_1+e_2+\cdots+e_m)A$. De cette façon, on montre que $I \subseteq A(e_1+e_2+\cdots+e_m)A$.

Remarquons maintenant que $C(eAe) = (c_i(e_jA))_{m\times m}$ est la matrice de Cartan à droite de $eAe$ puisque $\ell((e_j(eAe)e_i)_{e_i(eAe)e_i}) = \ell((e_jAe_i)_{e_iAe_i})$. Enfin, notons que $\overline{\mathcal{E}} =$

$\{\overline{e_{m+1}}, \ldots, \overline{e_n}\}$ est un ensemble sobre d'idempotents primitifs et orthogonaux de $B$. Pour un $B$-module à droite $N$, on note $d_i(N)$, le nombre de facteurs de composition de $N$ qui sont isomorphes à $\mathrm{top}(\overline{e_i}B)$, pour $i = m+1, \ldots, n$. On obtient que $(d_i(\overline{e_j}B))_{m<i,j\leq n} = (d_i(e_jA/e_jI))_{m<i,j\leq n}$ est la matrice de Cartan à droite de $B$. Maintenant, soit $m+1 \leq j \leq n$. Le $A$-module $e_jI = e_jA(e_1+e_2+\cdots+e_m)A$ est engendré par des éléments dans $A(e_1+e_2+\cdots+e_m)$ et donc

$$e_jI \cong \bigoplus_{i=1}^{m}(e_iA)^{t_{ij}}, \ \ t_{ij} \geq 0.$$

Ensuite, comme $e_jAe_i = e_jIe_i$ si $1 \leq i \leq m$, on trouve que $c_i(e_jA/e_jI) = 0$ et donc que

$$\begin{aligned} d_i(e_jA/e_jI) &= c_i(e_jA/e_jI) \\ &= c_i(e_jA) - c_i(\bigoplus_{k=1}^{m}(e_kA)^{t_{kj}}) \\ &= c_i(e_jA) - \sum_{k=1}^{m} t_{kj}c_i(e_kA) \\ &= 0. \end{aligned}$$

De plus, on a, pour $i = m+1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned} d_i(e_jA/e_jI) &= c_i(e_jA/e_jI) \\ &= c_i(e_jA) - \sum_{k=1}^{m} t_{kj}c_i(e_kA). \end{aligned}$$

Ainsi, à l'aide d'opérations élémentaires sur les colonnes, on peut ramener la matrice $C(A)$ sous la forme

$$\begin{pmatrix} C(eAe) & 0 \\ * & C(B) \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $\mathrm{cd}(A) = \det(C(eAe))\det(C(B)) = \mathrm{cd}(eAe)\mathrm{cd}(B)$. Ceci conclut le deuxième cas.

(3) Maintenant, considérons le cas général. Soit $e$ un générateur idempotent de la partie idempotente de $I$. En vertu du lemme 2.1.4, l'idéal $AeA$ est projectif à droite et,

selon le deuxième cas, on a

$$\mathrm{cd}(A) = \mathrm{cd}(eAe)\mathrm{cd}(A/AeA).$$

Ensuite, selon ce même lemme, $I/AeA$ est nilpotent et projectif à droite dans mod-$A/AeA$. Selon le premier cas, on trouve alors

$$\mathrm{cd}(A/AeA) = \mathrm{cd}(A/I)$$

puisque l'algèbre $\frac{A/AeA}{I/AeA}$ est isomorphe à l'algèbre $A/I$. On obtient ainsi le résultat voulu en combinant les deux égalités obtenues. $\square$

Si toute algèbre de dimension globale finie admettait un idéal projectif non-nul et propre, alors le résultat précédent nous permettrait de démontrer la conjecture du déterminant de Cartan dans toute sa généralité. Malheureusement, ceci n'est pas le cas. En effet, il est possible de construire une algèbre de carquois lié $A = kQ/I$ de dimension 58 dont la dimension globale soit finie et dont les seuls idéaux projectifs sont 0 et l'algèbre elle-même. Le carquois $Q$ est:

$$\begin{tikzcd}
 & & 3 \arrow[dr, bend left, "\beta"] & & \\
1 \arrow[r, bend right, "\mu"'] & 2 \arrow[l, bend right, "\epsilon"'] \arrow[ur, bend left, "\alpha"] & & 4 \arrow[ll, bend left, "\lambda"] \arrow[r, bend right, "\gamma"'] & 5 \arrow[l, bend right, "\delta"']
\end{tikzcd}$$

et $I$ est l'idéal engendré par les relations

$$\alpha\beta\gamma\delta\lambda\epsilon\mu\alpha\beta - \epsilon\mu\alpha\beta\gamma\delta,\ \mu\epsilon,\ \lambda\alpha,\ \beta\lambda,\ \delta\gamma.$$

Nous tirons maintenant quelques conséquences de la dernière proposition. Le premier résultat est une généralisation de quelques résultats qui se retrouvent dans [16].

**Corollaire 3.3.2** *Soit $e$ un idempotent de $A$ pour lequel* $e\mathrm{rad}(A)$ *ou* $\mathrm{rad}(A)e$ *est projectif. Alors*

1. $\mathrm{cd}(A) = \mathrm{cd}((1-e)A(1-e))$;
2. $\dim.\mathrm{gl}((1-e)A(1-e)) \leq \dim.\mathrm{gl}(A) \leq \dim.\mathrm{gl}((1-e)A(1-e)) + 3$.

**Démonstration**. L'objectif est de démontrer que l'idéal $A(1-e)A$ est projectif à droite; la conclusion suivra alors de la proposition précédente ainsi que de la proposition 2.1.7, comme on le verra. On considère seulement le cas où $e\mathrm{rad}(A)$ est projectif, la preuve de l'autre cas étant similaire. On se fixe $\mathcal{E} = \{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ un ensemble sobre d'idempotents primitifs orthogonaux de $A$. On peut supposer, sans perdre de généralité, que $\{e_1,\ldots,e_m\}$ avec $1 \leq m \leq n$ est un ensemble sobre d'idempotents primitifs orthogonaux de $(1-e)A(1-e)$. Comme on l'a vu dans la preuve précédente, on a $A(1-e)A = A(e_1+\cdots+e_m)A$. Pour montrer que $A(1-e)A$ est projectif à droite, il suffit de montrer que $e_iA(1-e)A$ est projectif à droite lorsque $i > m$ puisque $e_iA(e_1+\cdots+e_m)A = e_iA$ pour $i = 1,2,\ldots,m$. Pour ce faire, on peut supposer, sans perdre de généralité, que

$$\ell\ell(e_{m+1}A_A) \leq \cdots \leq \ell\ell(e_nA_A).$$

Remarquons que $e_iA(1-e)A = e_iA(e_1+e_2+\cdots+e_m)A = e_i\mathrm{rad}(A)(1-e)A$ pour $i > m$. Par hypothèse, $e_{m+1}\mathrm{rad}(A)$ est projectif et, comme $\ell\ell(e_{m+1}\mathrm{rad}(A_A)) < \ell\ell(e_{m+1}A_A)$, $e_{m+1}\mathrm{rad}(A)$ est isomorphe à une somme directe de facteurs directs de $(1-e)A$. Ainsi, $e_{m+1}\mathrm{rad}(A)(1-e)A \cong e_{m+1}\mathrm{rad}(A)$ est projectif à droite. Supposons maintenant, par récurrence, que $e_i\mathrm{rad}(A)(1-e)A$ est une somme directe de facteurs directs de $(e_1+\cdots+e_{i-1})A$, pour tout $m+1 \leq i \leq s$. Or, comme plus haut, on a

$$e_{s+1}\mathrm{rad}(A) \cong \bigoplus_{k=1}^{s}(e_kA)^{t_k},\ \ t_k \geq 0.$$

Ainsi, on obtient

$$e_{s+1}\mathrm{rad}(A)(1-e)A \cong \bigoplus_{k=1}^{s}(e_kA(1-e)A)^{t_k}$$

lequel est projectif, par hypothèse de récurrence. Par conséquent, on a bien que l'idéal $A(1-e)A$ est projectif à droite. Maintenant, soit $x \in e\mathrm{rad}(A) \cap A(1-e)A$. Alors

$$x = ea = \sum_{l=1}^{t} b_l(1-e)c_l, \;\; a,b_l,c_l \in A$$

Ainsi, $x = ex = \sum_{l=1}^{t} eb_l(1-e)c_l \in (e\mathrm{rad}(A)) \cdot A(1-e)A$. Ainsi, $e\mathrm{rad}(A) \cdot A(1-e)A = e\mathrm{rad}(A) \cap A(1-e)A$. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{rad}\big(A/A(1-e)A\big) &= \frac{\mathrm{rad}(A)+A(1-e)A}{A(1-e)A} \\
&= \frac{e\mathrm{rad}(A)+A(1-e)A}{A(1-e)A} \\
&\cong \frac{e\mathrm{rad}(A)}{e\mathrm{rad}(A)\cap A(1-e)A} \\
&= \frac{e\mathrm{rad}(A)}{e\mathrm{rad}(A)\cdot A(1-e)A}
\end{aligned}$$

lequel est projectif puisque $e\mathrm{rad}(A)$ l'est. Donc, $A/A(1-e)A$ est une algèbre héréditaire. Par conséquent, $\mathrm{cd}(A/A(1-e)A) = 1$ et $\mathrm{dim.gl}(A/A(1-e)A) \leq 1$. Ainsi, selon la proposition précédente, on obtient $\mathrm{cd}(A) = \mathrm{cd}(1-e)A(1-e)$ et la proposition 2.1.7 nous donne

$$\mathrm{dim.gl}((1-e)A(1-e)) \leq \mathrm{dim.gl}(A) \leq \mathrm{dim.gl}((1-e)A(1-e)) + 3.$$

□

On tire une autre conséquence importante de la proposition 3.3.1 : la conjecture du déterminant de Cartan est vérifiée pour les algèbres quasi-stratifiées. Ceci fait l'objet du prochain corollaire.

**Corollaire 3.3.3** *Si $A$ est quasi-stratifiée, alors* $\mathrm{cd}(A)$ *est positif. En particulier, la conjecture du déterminant de Cartan est vérifiée pour les algèbres quasi-stratifiées.*

**Démonstration**. Nous procédons par récurrence sur la longueur d'une quasi-stratification de $A$. Si $A$ admet une quasi-stratification de longueur un, alors $A$ est Morita-équivalente à une algèbre locale, en vertu du lemme 2.2.8. Dans ce cas, $\mathrm{cd}(A)$ est manifestement positif. Supposons maintenant que $A$ admet une quasi-stratification de longueur $r > 1$

$$0 = I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_r = A.$$

Alors l'algèbre $A/I_1$ est quasi-stratifiée et admet une quasi-stratification de longueur $r-1$. Ainsi, selon l'hypothèse de récurrence, $\mathrm{cd}(A/I_1) > 0$. Soit $e$ un idempotent pseudo-primitif qui engendre la partie idempotente de $I_1$. Selon la proposition 3.3.1, on obtient

$$\mathrm{cd}(A) = \mathrm{cd}(A/I_1)\mathrm{cd}(eAe) > 0$$

puisque $eAe$ est l'algèbre nulle ou une algèbre locale. □

Maintenant, voici un petit lemme intéressant qui permettera de démontrer le résultat principal de cette section.

**Lemme 3.3.4** *Soit $I$ un idéal quasi-stratifiant de $A$. Alors l'algèbre $A$ est de dimension globale finie si et seulement si l'algèbre $A/I$ est de dimension globale finie et $I$ est quasi-héréditaire.*

**Démonstration**. Aux fins de la preuve, on considère le cas où $I$ est projectif à droite. Soit $e$ un idempotent de $A$ qui engendre la partie idempotente de $I$. Selon le corollaire 2.1.8, la dimension globale de $A$ est finie si et seulement si la dimension globale de $A/I$ et celle de $eAe$ sont finies. Or, comme $e$ est pseudo-primitif, l'algèbre $eAe$ est locale ou nulle. Ainsi, la dimension globale de $eAe$ est finie si et seulement si $e\mathrm{rad}(A)e = 0$, ce qui est équivalent de dire que $I$ est quasi-héréditaire. □

Nous pouvons maintenant présenter le résultat principal de cette section.

**Théorème 3.3.5** *Soit $A$ une algèbre quasi-stratifiée. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. $\dim.\mathrm{gl}(A) < \infty$.
2. $\mathrm{cd}(A) = 1$.
3. *$A$ est ultimement héréditaire.*

**Démonstration**. La preuve consiste à montrer l'équivalence de ces trois énoncés par récurrence sur la longueur $r$ d'une quasi-stratification de $A$. Si $r = 1$, alors, selon le lemme 2.2.8, $A$ est Morita-équivalente à l'algèbre locale $eAe$ avec $e$ un idempotent primitif de $A$. On a $\dim.\mathrm{gl}(A) = \dim.\mathrm{gl}(eAe)$, $\mathrm{cd}(A) = \mathrm{cd}(eAe)$ et $A$ est héréditaire si et seulement si $eAe$ est héréditaire. Ainsi, comme les trois énoncés sont manifestement équivalents lorsque l'algèbre est locale, on en déduit de même pour $A$. Supposons maintenent le résultat véridique lorsque $r = l \geq 1$. Supposons que $A$ est une algèbre quasi-stratifiée admettant une quasi-stratification

$$0 = I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_l \subset I_{l+1} = A$$

de longueur $l+1$. Comme on l'a remarqué dans les preuves précédentes, l'algèbre $A/I_1$ admet une quasi-stratification de longueur $l$. Soit $e$ un idempotent qui engendre la partie idempotente de $I_1$. Le fait que (1) implique (2) suit immédiatement du corollaire 3.3.3 ainsi que de la proposition 3.1.3. Ensuite, selon la relation $\mathrm{cd}(A) = \mathrm{cd}(eAe)\mathrm{cd}(A/I_1)$, on tire que (2) implique l'égalité $\mathrm{cd}(A/I_1) = 1$ (puisque $\mathrm{cd}(eAe) > 0$) et donc que $A/I_1$ est ultimement héréditaire par hypothèse de récurrence. Au moyen du même raisonnement, on tire aussi que $\mathrm{cd}(eAe) = 1$ et donc que $I_1$ est quasi-héréditaire. Ces deux derniers faits combinés entraînent que $A$ est ultimement héréditaire en vertu de la définition. Le fait que (3) implique (1) suit directement de la proposition 2.2.9. □

Ce dernier théorème donne donc des critères pour vérifier si une algèbre quasi-stratifiée est ultimement héréditaire. Il établit aussi la réciproque de la conjecture du déterminant de Cartan pour les algèbres quasi-stratifiées.

# CHAPITRE 4

# Les algèbres homogénéisables

## 4.1 Les algèbres homogénéisables

Dans ce court chapitre, nous donnons une application du corollaire 3.3.2 pour une classe d'algèbres élémentaires que nous appelons algèbres homogénéisables. De plus, $k$ désigne un corps et, à moins d'avis contraire, $A$ une algèbre élémentaire de dimension finie sur $k$. Comme on l'a vu dans le chapitre un, l'algèbre $A$ est isomorphe à une algèbre de carquois lié. On utilisera ce résultat à plusieurs reprises lors de ce chapitre.

Soit $A = kQ/I$ une algèbre de carquois lié avec $Q = (Q_0, Q_1)$. Si $\omega = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n$ est un chemin de $Q$ et $\alpha$ est une flèche de $Q_1$, on note $\partial_\alpha(\omega)$ le nombre d'indices $i$ pour lesquels $\alpha_i = \alpha$. De plus, soit

$$\rho = \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \cdots \lambda_m\omega_m$$

une combinaison linéaire avec coefficients non-nuls de chemins différents de $Q$ telle que la source et le but de $\omega_i$ et $\omega_j$ coïncident pour tout $i,j$. On appelle alors $\rho$ un **élément**

**réduit** de $kQ$. Pour un tel élément $\rho$ et $\alpha$ une flèche de $Q_1$, on pose

$$\partial_\alpha(\rho) = \sum_{i=1}^{m} \partial_\alpha(\omega_i).$$

De plus, on dit qu'une flèche $\alpha$ apparait de **façon homogène** dans $\rho$ si $\partial_\alpha(\omega_i) = \partial_\alpha(\omega_j) > 0$ pour tout $i,j$. Notons $\ell(\omega_i)$ la longueur du chemin $\omega_i$ pour tout $i$. On définit la **longueur** de $\rho$ comme étant

$$\ell(\rho) = \max\{\ell(\omega_1),\ell(\omega_2),\ldots,\ell(\omega_m)\}.$$

On dit aussi qu'une composante $\omega_i$ de $\rho$ est **courte** si $\ell(\omega_i) < \ell(\rho)$. On rappelle au lecteur que si $\rho$ est une relation homogène de $I$, alors $\rho$ n'admet pas de composantes courtes. Voici maintenant la définition d'algèbres positivement graduées.

**Définition 4.1.1** *Soit $A$ une $k$-algèbre sur un corps $k$. On dit que $A$ est* **positivement graduée** *si, en tant que $k$-espaces vectoriels,*

$$A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i,$$

$A_iA_j \subseteq A_{i+j}$ *pour tout $i,j$ et* $\mathrm{rad}(A) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i$.

Supposons pour l'instant que $A = kQ/I$ est une algèbre de carquois lié avec $Q = (Q_0,Q_1)$ et $I$ un idéal engendré par des relations homogènes. Puisque $I$ est engendré par des relations homogènes, on peut décomposer l'idéal $I$ de $kQ$ comme

$$I = \bigoplus_{i=2}^{\infty} I_i$$

en tant que $k$-espaces vectoriels avec, pour tout $i \geq 2$, $I_i \subseteq kQ_1^i$. De cette façon, on voit que, en tant que $k$-espaces vectoriels,

$$A = A/\mathrm{rad}(A) \oplus \mathrm{rad}(A) = A/\mathrm{rad}(A) \oplus kQ_1^1 \oplus kQ_1^2/I_2 \oplus kQ_1^3/I_3 \oplus \cdots$$

de sorte que $A$ est positivement graduée (par la longueur des chemins de $kQ$). Nous introduisons maintenant une classe d'algèbres plus générale.

**Définition 4.1.2** *On dit que $A$ est* **homogénéisable** *si $A \cong kQ/I$ avec $I$ un idéal admissible engendré par des éléments réduits $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r$ de $kQ$ tels que chaque composante courte $\omega$ de $\rho_i$ contient une flèche $\alpha$ telle que $\partial_\alpha(\rho_i) = 1$ et si $\partial_\alpha(\rho_j) > 0$ avec $i \neq j$, alors $\alpha$ apparaît de façon homogène dans $\rho_j$.*

**Exemple 4.1.3** *Soit $A = kQ/I$ l'algèbre donnée par le carquois*

$$\begin{tikzcd}
& 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[dr, "\gamma"] & \\
1 \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\delta"'] & & & 5 \\
& 4 \arrow[r, "\mu"'] \arrow[urr, "\epsilon"] & 6 \arrow[ur, "\nu"'] &
\end{tikzcd}$$

*et $I = <\alpha\beta\gamma - \delta\epsilon, \delta\mu>$. On remarque que $\alpha\beta\gamma - \delta\epsilon$ est le seul élément réduit qui ne soit pas homogène et que $\delta\epsilon$ est la seule composante courte de cette relation. Puisque la flèche $\delta$ est telle que $\partial_\delta(\alpha\beta\gamma - \delta\epsilon) = 1$ et $\delta$ apparaît de façon homogène dans $\delta\mu$, on en conclut que $A$ est homogénéisable.*

Le théorème suivant motive la définition d'algèbres homogénéisables.

**Théorème 4.1.4** *Soit $A = kQ/I$ une algèbre homogénéisable. Alors il existe une algèbre de carquois lié $B = kQ'/I'$ avec $I'$ homogène telle que*

1. $\mathrm{cd}(A) = \mathrm{cd}(B)$,
2. $\mathrm{dim.gl}(A) \leq \mathrm{dim.gl}(B) \leq \mathrm{dim.gl}(A) + 3$.

**Démonstration**. En vertu du corollaire 3.3.2, il suffit de trouver une algèbre $B$ telle que $A \cong (1-e)B(1-e)$ avec $e$ un idempotent de $B$ tel que $e\mathrm{rad}(B)$ soit projectif à droite.

Supposons que $I =< \rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_r >$ avec les $\rho_i$ des éléments réduits de $kQ$. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_t$ sont les relations non-homogènes parmis les relations qui engendrent $I$. Supposons de plus que, pour $1 \leq i \leq t$, $\omega_{i1},\ldots,\omega_{is_i}$ sont les composantes courtes de $\rho_i$. Finalement soient $\alpha_{ij}$ des flèches comme dans la définition 4.1.2 qui correspondent aux composantes $\omega_{ij}$, pour $i = 1,2,\ldots,t$ et $j = 1,2,\ldots,s_i$. Pour chacune de ces flèches $\alpha_{ij} : a_{ij} \to b_{ij}$, posons $n_{ij} = \ell(\rho_i) - \ell(\omega_{ij})$ et

$$q_{ij} : \quad a_{ij} \xrightarrow{\beta_{ij}^{(1)}} x_{ij}^{(1)} \xrightarrow{\beta_{ij}^{(2)}} \cdots \xrightarrow{\beta_{ij}^{(n_{ij})}} x_{ij}^{(n_{ij})} \xrightarrow{\beta_{ij}^{(n_{ij}+1)}} b_{ij},$$

un carquois linéaire avec les $x_{ij}^k$ et les $\beta_{ij}^k$ des points et des flèches qui n'apparaissent pas dans le carquois $Q$. Soit maintenant $Q'$ le carquois obtenu à partir de $Q$ en remplaçant chacune des flèches $\alpha_{ij}$ par le carquois linéaire $q_{ij}$ correspondant. Posons

$$\phi : kQ \to kQ'$$

l'injection de $k$-espaces vectoriels compatible avec la multiplication telle que

1. $\phi(e) = e$ pour tout idempotent primitif associé à un sommet de $Q$,
2. $\phi(\beta) = \beta$ si $\beta$ est une flèche différente des $\alpha_{ij}$ et
3. $\phi(\alpha_{ij}) = \prod_{k=1}^{n_{ij}+1} \beta_{ij}^k$ pour $i = 1,2,\ldots,t$ et $j = 1,2,\ldots,s_i$.

On remarque que $\phi(\rho_i)$ est une relation homogène pour tout $i = 1,2,\ldots,r$ et donc, l'idéal $\phi(I)$ de $kQ'$ est un idéal admissible engendrée par des relations homogènes (la preuve du fait que $\phi(I)$ est admissible est simple et laissée au lecteur). Posons $B = kQ'/I'$ avec $I' = \phi(I)$. On obtient ainsi une injection de $k$-espaces vectoriels $\overline{\phi} : A \to B$ compatible avec la multiplication. Ceci donne donc un isomorphisme de $k$-algèbres :

$$A \cong \overline{\phi}(1)B\overline{\phi}(1).$$

Selon cette relation, on remarque que l'algèbre $A$ peut être vue comme une sous-catégorie pleine de $B$. Il reste à montrer que $(1-\overline{\phi}(1))\mathrm{rad}(B)$ est projectif à droite. Or,

$$1-\overline{\phi}(1)=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{s_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}} e_{x_{ij}^k}$$

avec $e_{x_{ij}^k}$ l'idempotent primitif associé au sommet $x_{ij}^k$ de $Q'$. On remarque qu'aucune relation de $I'=\phi(I)$ admet l'un des $x_{ij}^k$ comme source et donc, $e_{x_{ij}^k}\mathrm{rad}(B)$ est projectif pour tout $i$,$j$,$k$ et ainsi, $(1-\overline{\phi}(1))\mathrm{rad}(B)$ est projectif à droite, ce qu'on voulait démontrer.
□

Comme on l'a remarqué plus haut, toute algèbre de carquois lié $A = kQ/I$ avec $I$ homogène est positivement graduée. Dans [15], Wilson a démontré la conjecture du déterminant de Cartan pour les algèbres positivement graduées. On a ainsi le corollaire suivant.

**Corollaire 4.1.5** *Soit $A = kQ/I$ une algèbre homogénéisable. Si $A$ est de dimension globale finie, alors* $\mathrm{cd}(A) = 1$.

On peut cependant démontrer directement qu'une algèbre homogénéisable $A$ est positivement graduée. Étant donné un carquois $Q = (Q_0,Q_1)$, on peut associer à chacune de ses flèches $\alpha \in Q_1$ un poids $p(\alpha)$ (c'est-à-dire un entier positif), possiblement différent de 1. Si $\omega = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r$ est un chemin de $kQ$, on peut définir le degré de $\omega$ comme étant $\sum_{i=1}^{r} p(\alpha_i)$. Il est facile de vérifier que ceci fait de $kQ$ une algèbre graduée (cette graduation est différente de celle donnée à la section 1.1 si les poids des flèches du carquois ne sont pas tous égaux à un). Lorsque l'algèbre $A$ est homogénéisable, il est possible de définir des poids pour les flèches de son carquois $Q$ de sorte que la graduation correspondante de $kQ$ se prolonge à l'algèbre $A = kQ/I$ et en fait une algèbre positivement graduée. En ce sens, le résultat précédent n'est pas nouveau, mais sa preuve est différente.

# CHAPITRE 5

# Les extensions de modules simples

Dans ce chapitre, nous étudions les groupes $\mathrm{Ext}_A^1(S,S)$ lorsque $S$ est un module simple sur une algèbre quasi-stratifiée $A$. L'étude de ces groupes nous permettera ensuite d'établir la conjecture d'abscence de boucles pour les algèbres quasi-stratifiées ainsi que la conjecture forte d'abscence de boucles pour les algèbres quasi-stratifiées d'un un seul côté. Nous commençons le chapitre en présentant les deux conjectures ci-mentionnés dans leur contexte historique.

En outre, nous gardons les hypothèses du chapitre deux, à savoir que $A$ désigne une algèbre d'Artin sur un anneau commutatif $k$.

## 5.1 Les conjectures d'abscence de boucles

Dans cette section, nous présentons les conjectures d'abscence de boucles et nous donnons ensuite un bref historique entourant ces conjectures.

La conjecture d'abscence de boucles est une conjecture bien connue en théorie des algèbres artiniennes. Elle a été énoncée pour la première fois en 1987 par les mathématiciens D. Anick et D. Zacharia et ce, de façon indépendante. Elle fût énoncée comme suit :

**Conjecture 5.1.1 (Conjecture d'abscence de boucles)** *Si la dimension globale de* $A$ *est finie, alors* $\mathrm{Ext}^1_A(S,S) = 0$ *pour tout* $A$*-module simple* $S$.

Le nom de la conjecture provient de la nature combinatoire du problème. Si $S$ est un module simple sur une algèbre de carquois lié $A$, alors on peut lui associer un point $a \in Q_0$ dans le carquois $Q = (Q_0,Q_1)$ de l'algèbre. L'égalité $\mathrm{Ext}^1_A(S,S) = 0$ signifie qu'il n'y a pas de boucle au sommet $a$ de $Q$. En effet, dans une telle algèbre, si $S(a)$ et $S(b)$ sont des modules simples qui correspondent respectivement aux sommets $a$ et $b$ du carquois, alors la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{Ext}^1_A(S(a),S(b))$ correspond au nombre de flèches de source $a$ et de but $b$ dans le carquois $Q$ de l'algèbre $A$ (pour une preuve, voir [3, page 85]). On comprend ainsi la provenance du nom de la conjecture.

Étonnamment, cette conjecture a été démontrée dans plusieurs cas bien avant avoir été énoncée formellement.

Vers la fin des années 60, H. Lenzing a démontré la conjecture dans le cas où $A$ est une algèbre sur un corps algébriquement clos. Il utilise des idées de Hattari et Stallings sur la notion de traces définies sur les endomorphismes de modules projectifs.

En ordre chronologique, le prochain résultat en faveur de la conjecture remonte à 1983 lorsque E. L. Green, W. H. Gustafson et D. Zacharia ont montré que la conjecture est vérifiée lorsque la dimension globale de l'algèbre est bornée par deux. Leur preuve consiste en une récurrence sur le nombre de classes d'isomorphisme de modules simples.

Par la suite, en 1986, K. Fuller et B. Zimmermann-Huisgen ont démontré la conjecture lorsque $(\mathrm{rad}(A))^3 = 0$ et lorsque $A$ est sérielle à gauche. Leur preuve utilise la matrice de Cartan filtrée par le radical de l'algèbre (voir [12, page 61] pour la définition). Ils démontrent que le déterminant de la matrice ainsi construite, $\det\overline{C}(A)$, vaut un lorsque la dimension globale est finie. Ceci permet de vérifier la conjecture d'une façon assez directe. En effet, lorsque $\det\overline{C}(A) = 1$, il est facile de vérifier que tous les termes diagonaux de la matrice de Cartan filtrée ne doivent pas avoir de termes de degré un. Selon la définition de la matrice, ceci donne que $\mathrm{Ext}^1_A(S,S) = 0$ pour tout $A$-module simple $S$.

Enfin, K. Igusa, en 1990, démontra la conjecture dans le cas où toutes les algèbres d'endomorphisme des modules simples sont séparables. L'auteur utilise la K-théorie dans sa preuve. On note que son résultat englobe celui de H. Lenzing puisque tout corps est une algèbre séparable.

Peu après l'apparition de cette conjecture en 1987, D. Zacharia énonça une version encore plus forte de la conjecture :

**Conjecture 5.1.2 (Conjecture forte d'abscence de boucles)** *Si $S$ est un $A$-module simple de dimension projective finie, alors* $\mathrm{Ext}^1_A(S,S) = 0$.

Toutefois, cette dernière conjecture n'est vérifiée que dans très peu de cas.

En 1988, D. Zacharia publia un article dans lequel il montra la conjecture forte d'abscence de boucles pour les algèbres monomiales. Sa preuve est très simple. Il utilise un algorithme combinatoire qui permet de trouver les résolutions projectives minimales des modules simples sur une algèbre monomiale.

En 2004, S. Liu et J.-P. Morin ont démontré la conjecture lorsque l'algèbre $A$ est bisérielle spéciale. Ils utilisent le fait que sur une algèbre bisérielle spéciale, tous les modules indécomposables de type fini sont des modules de cordes ou de bandes. Ils utilisent des arguments combinatoires.

## 5.2 Le cas des algèbres quasi-stratifiées

Comme mentionné plus haut, nous voulons étudier les groupes $\mathrm{Ext}^1_A(S,S)$ lorsque $S$ est un $A$-module simple. Pour un tel module $S$, les éléments du groupe $\mathrm{Ext}^1_A(S,S)$ sont les classes d'isomorphismes des suites exactes courtes de la forme

$$0 \to S \to M \to S \to 0$$

avec $M$ un module de mod-$A$ (ou $A$-mod) lorsque $S$ est un $A$-module à droite (ou à gauche, respectivement). Pour de plus amples détails sur le sujet, le lecteur est invité à consulter [2, Page 260]. Pour commencer cette section, nous présentons un résultat qui indique ce que deviennent les groupes d'extension lorsqu'on passe de l'algèbre A à l'algèbre $A/I$ lorsque $I$ est idempotent et projectif. On peut trouver la preuve de la prochaine proposition dans [9, Statement 3].

**Proposition 5.2.1** *Soit $I$ un idéal idempotent et projectif à droite de $A$ et soit $S$ un module simple de mod-$A/I$. Alors,*

$$\mathrm{Ext}^1_A(S,S) \cong \mathrm{Ext}^1_{A/I}(S,S).$$

Pour l'instant, notre but est de démontrer l'équivalent de la proposition précédente mais en enlevant l'hypothèse que $I$ est idempotent.

**Proposition 5.2.2** *Soit $I$ un idéal projectif à droite de $A$ et soit $S$ un module simple de mod-$A/I$. Alors,*

$$\mathrm{Ext}^1_A(S,S) \cong \mathrm{Ext}^1_{A/I}(S,S).$$

**Démonstration**. Soit

$$(*)\ \ 0 \to S \to E \to S \to 0$$

une extension de $\mathrm{Ext}^1_A(S,S)$. Comme mod-$A/I$ est une sous-catégorie pleine de mod-$A$, il suffit de montrer que $E$ est un $A/I$-module, c'est-à-dire que $EI = 0$. Nous commençons par considérer le cas où $I$ est nilponent, c'est-à-dire $I \subseteq \mathrm{rad}(A)$. Soient $e_1,e_2,\ldots,e_n$ un ensemble sobre d'idempotents primitifs orthogonaux de $A$. Montrons, dans un premier temps, que $Ee_iI = 0$ pour tout $i$. Sans perdre de généralité, supposons que $Se_1 = S$. En appliquant le foncteur exact $\mathrm{Hom}(e_iA,-)$ à la suite exacte (*), on trouve que $Ee_i = 0$ lorsque $i > 1$. Il reste donc à montrer que $Ee_1I = 0$. Or, comme $I \subseteq \mathrm{rad}(A)$, on a $\ell\ell(e_1I_A) < \ell\ell(e_1A_A)$ et donc que

$$e_1I_A \cong \bigoplus_{i=2}^{n}(e_iA)^{r_i},\ \ r_i \geq 0.$$

Ainsi $e_1I \subseteq \sum_{2\leq j\leq n} Ae_jA$ et donc, $Ee_1I \subseteq E\big(\sum_{2\leq j\leq n} Ae_jA\big) = 0$. Si $e$ est un autre idempotent primitif de $A$ tel que $e_1A \cong eA$, on montre de la même façon que $EeI = 0$. Ceci montre donc que $EI = 0$. Considérons maintenant le cas général. Soit $e$ un idempotent qui engendre la partie idempotente de l'idéal $I$. Selon le lemme 2.1.4, l'idéal $AeA$ est projectif à droite. Comme $AeA \subseteq I$, $S$ est aussi un $AeA$-module et selon la proposition 5.2.1, $\mathrm{Ext}^1_A(S,S) \cong \mathrm{Ext}^1_{A/AeA}(S,S)$. Or, $I/AeA$ est un idéal projectif à droite et nilpotent de $A/AeA$. Par conséquent, en vertu du premier cas de la preuve, on trouve $\mathrm{Ext}^1_{A/AeA}(S,S) \cong \mathrm{Ext}^1_{A/I}(S,S)$ puisque $\frac{A/AeA}{I/AeA} \cong A/I$. $\square$

Le prochain résultat se retrouve dans [1, 2.4]. Nous le présentons en donnant une nouvelle démonstration.

**Lemme 5.2.3** *Soit $S$ un $A$-module à droite simple de dimension projective finie dont la coiffe est engendrée par l'idempotent primitif $e$. Si $AeA$ est projectif à droite, alors* $\mathrm{Ext}^1_A(S,S) = 0$.

**Démonstration**. Soit $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ un ensemble sobre d'idempotents primitifs orthogonaux de $A$. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $e = e_1$. Pour $j = 1,2,\ldots,n$, notons $c_j$ la multiplicité de $S$ en tant que facteur de composition de $e_jA$. Comme mentionné dans la section sur le déterminant de Cartan, on a $c_j = \ell((e_jAe)_{eAe})$. Soit

$$0 \to P_m \to \cdots \to P_1 \to S \to 0$$

une résolution projective de $S$ dans Mod-$A$. On peut écrire, pour $i = 1,2,\ldots,n$,

$$P_i = \bigoplus_{j=1}^{n} (e_jA)^{r_{ij}}, \;\; r_{ij} \geq 0.$$

Ensuite, en appliquant le foncteur exact $\mathrm{Hom}_A(eA,-)$, on obtient

$$0 \to P_me \to \cdots \to P_1e \to S \to 0$$

ce qui nous donne l'égalité

$$1 = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1}(r_{i1}c_1 + \cdots r_{in}c_n)$$

en comparant les longueurs de composition des modules. Supposons maintenant que $AeA$ est projectif à droite. Pour $j = 1,2,\ldots,n$, on a $e_jAeA \cong (eA)^{s_j}$ pour un certain entier non négatif $s_j$. On obtient ainsi que $e_jAe = e_jAeAe \cong (eAe)^{s_j}$ pour tout $j$. Par conséquent, $c_j = \ell((e_jAe)_{eAe}) = \ell(((eAe)^{s_j})_{eAe}) = c_1s_j$. On obtient alors

$$1 = c_1\big(\sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1}(r_{i1}s_1 + \cdots r_{in}s_n)\big)$$

ce qui entraîne que $c_1 = 1$, c'est-à-dire que $e\mathrm{rad}(A)e = 0$. Donc, $\mathrm{Ext}^1_A(S,S) = 0$. $\square$

La prochaine proposition est une version faible de la conjecture forte d'abscence de boucles pour les algèbres quasi-stratifiées. Elle nous sera utile plus loin. Dès lors, nous notons $D$ la dualité standard de mod-$A$ vers $A$-mod. Nous rappelons au lecteur que cette dualité est obtenue en prenant le foncteur contravariant $\mathrm{Hom}_k(-,J)$ où $J$ est l'enveloppe injective de $U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_r$ où $U_1,U_2,\ldots,U_r$ sont les $k$-modules simples deux-à-deux non isomorphes.

**Proposition 5.2.4** *Soit $A$ une algèbre quasi-stratifiée. Si $S$ est un $A$-module simple (à gauche ou à droite) de dimensions projective et injective finies, alors* $\mathrm{Ext}^1_A(S,S) = 0$.

**Démonstration**. Supposons que $S$ est un $A$-module à droite simple. On a alors que $D(S)$ est un $A$-module à gauche simple. Soient

$$0 = I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_{r-1} \subset I_r = A$$

une quasi-stratification de $A$ et $e$ un idempotent pseudo-primitif qui engendre la partie idempotente de $I_1$. Nous procédons par récurrence sur $r$, la longueur d'une quasi-stratification de l'algèbre $A$. Si $r = 1$, $A$ est Morita-équivalente à l'algèbre $eAe$ en vertu du lemme 2.2.8. Comme la dimension projective du seul module simple sur l'algèbre $eAe$ est finie, $eAe$ est une algèbre héréditaire. Par conséquent, on trouve que $\mathrm{Ext}^1_A(S,S) = 0$. Supposons maintenant que $r > 1$. Remarquons que l'algèbre $A/I_1$ est une algèbre quasi-stratifiée admettant une quasi-stratification de longueur $r-1$. Supposons maintenant que $I_1$ est projectif à gauche, la preuve de l'autre cas étant similaire. Supposons dans un premier temps que $SI_1 = 0$. Selon le lemme 2.1.6 et son énoncé dual, $S$ est un $A/I_1$-module de dimensions projective et injective finies. Ainsi, $D(S)$ est un $A/I_1$-module simple de dimensions projective et injective finies dans $A/I_1$-mod. Selon la proposition 5.2.1 et l'hypothèse de récurrence, on a $\mathrm{Ext}^1_A(S,S) \cong \mathrm{Ext}^1_A(D(S),D(S)) \cong \mathrm{Ext}^1_{A/I_1}(D(S),D(S)) = 0$. Maintenant, supposons que $SI_1 \neq 0$. Dans ce cas, $S = Se = SAeA = SI_1$ et selon le lemme 5.2.3, $\mathrm{Ext}^1_A(D(S),D(S)) = 0$ puisque $eD(S) \neq 0$ et $AeA$ est projectif à gauche. □

Nous pouvons maintenant établir la conjecture d'abscence de boucles pour les algèbres quasi-stratifiées. Comme nous l'avons montré plus haut, les algèbres quasi-stratifiées de dimension globale finie correspondent exactement aux algèbres ultimement héréditaires. Ainsi, la conjecture d'abscence de boucles pour les algèbres quasi-stratifiées revient à dire que tout module simple sur une algèbre ultimement héréditaire n'admet pas d'auto-extensions non-triviales.

**Théorème 5.2.5** *Soit $A$ une algèbre quasi-stratifiée. Si la dimension globale de $A$ est finie, alors* $\mathrm{Ext}_A^1(S,S) = 0$ *pour tout $A$-module simple $S$.*

**Démonstration**. Comme la dimension globale de l'algèbre est finie, les dimensions projective et injective de tout $A$-module simple sont finies. On applique alors la proposition précédente. $\square$

Dans la définition d'algèbre quasi-stratifiée, on demande l'existence d'une chaîne d'idéaux quasi-stratifiants vérifiant certaines propriétés. Dans une telle chaîne, il peut y avoir à la fois des idéaux quasi-stratifiants à droite et à gauche. Si tel est le cas, il devient alors plus difficile de démontrer la conjecture forte d'abscence de boucles pour ces algèbres. Dans ce mémoire, nous démontrons la conjecture forte d'abscence de boucles pour les algèbres qui sont quasi-stratifiées d'un seul côté dans le sens de la prochaine définition.

**Définition 5.2.6** *On dit qu'une algèbre $A$ est* **quasi-stratifiée à droite** *(ou à gauche) si elle est quasi-stratifiée et qu'elle admet une quasi-stratification dont tous les idéaux sont quasi-stratifiants à droite (ou à gauche, respectivement). Une telle chaîne est appelée une* **quasi-stratification à droite** *(ou à gauche, respectivement) de l'algèbre.*

Nous donnons maintenant la preuve de la conjecture forte d'abscence de boucles pour les algèbres quasi-stratifiées d'un seul côté (à gauche ou à droite).

**Théorème 5.2.7** *Soit $A$ une algèbre quasi-stratifiée à droite. Si $S$ est un $A$-module à droite simple de dimension projective finie, alors* $\mathrm{Ext}_A^1(S,S) = 0$.

**Démonstration**. Soit $S_A$ un $A$-module simple de dimension projective finie. On procède par récurrence sur la longueur d'une quasi-stratification à droite de $A$. Soit

$$0 = I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_{r-1} \subset I_r = A$$

une telle quasi-stratification. Si $r = 1$ alors, comme mentionné dans la démonstration de la proposition 5.2.4, $A$ est Morita-équivalente à une algèbre héréditaire et le résultat suit. Supposons maintenant que $r > 1$. Soit $e$ un idempotent pseudo-primitif qui engendre la partie idempotente de $I_1$. Si $SI_1 = 0$, alors $S$ est un $A/I_1$-module simple et on trouve que $\mathrm{Ext}^1_A(S,S) \cong \mathrm{Ext}^1_{A/I_1}(S,S)$ selon la proposition 5.2.2. De plus, par récurrence, $\mathrm{Ext}^1_{A/I_1}(S,S) = 0$ puisque $S$ est de dimension projective finie dans mod-$A/I_1$ selon la proposition 2.1.6. Enfin, si $SI_1 \neq 0$, c'est que $SI_1 = SAeA = S$ et dans ce cas on utilise le lemme 5.2.3 puisque $AeA$ est projectif à droite selon le lemme 2.1.4. $\square$

# CHAPITRE 6

# Une algèbre non positivement graduée

## 6.1 Une algèbre non positivement graduée

Dans cette section, nous présentons un exemple d'une algèbre qui est ultimement héréditaire sans être quasi-héréditaire ni positivement graduée. Cet exemple montre que la classe des algèbres quasi-stratifiées ne fait pas partie de la famille des algèbres pour laquelle les deux conjectures homologiques étudiées dans ce mémoire ont été démontrées. Afin de simplifier les preuves de cette section, on supposera que $k$ est un corps algébriquement clos.

**Lemme 6.1.1** *Soit $A$ une $k$-algèbre élémentaire de dimension finie et soit $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_r$ un $A$-module à droite de type fini, avec $M_1, \ldots, M_r$ indécomposables. Enfin, soit $B = \mathrm{End}_A(M_A)$ l'algèbre d'endomorphisme de $M$. Alors $B$ est une algèbre élémentaire de dimension finie sur $k$.*

**Démonstration**. Comme $M$ est de type fini, $M$ est un $k$-module de dimension finie puisque $A$ est de dimension finie sur $k$. Par conséquent, $\mathrm{End}_k(M)$ est de dimension finie sur $k$. Comme $\mathrm{End}_A(M_A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{End}_k(M)$, $B$ est de dimension finie sur $k$. Montrons maintenant que $B$ est une algèbre élémentaire, c'est-à-dire que tout $B$-module simple est de dimension un sur $k$. Or il est bien connu (voir, par exemple, [4]) que les $B$-modules simples deux-à-deux non-isomorphes sont donnés par

$$\mathrm{End}_A(M_i)/\mathrm{rad}(\mathrm{End}_A(M_i)), \quad i = 1,2,\ldots,r$$

en tant que $k$-espaces vectoriels. Soit $i$ un entier fixé. Comme $M_i$ est indécomposable, l'algèbre $\mathrm{End}_A(M_i)$ est locale et donc, $\mathrm{End}_A(M_i)/\mathrm{rad}(\mathrm{End}_A(M_i))$ est une extension de dimension finie de $k$. Comme $k$ est algébriquement clos,

$$\mathrm{End}_A(M_i)/\mathrm{rad}(\mathrm{End}_A(M_i)) \cong k$$

et ceci montre que $B$ est élémentaire. $\square$

Nous sommes maintenant prêts à construire l'exemple.

Soit $C$ la $k$-algèbre de dimension finie sur $k$ donnée par le carquois lié $(Q_C,I_C)$ avec $Q_C$ le carquois :

$$\alpha \circlearrowleft 1 \circlearrowright \beta$$

et $I_C$ l'idéal engendré par les relations $\alpha^3$, $\alpha\beta$, $\beta\alpha^2$, $\alpha^2-\beta^3$, $\beta\alpha-\beta^3$. Soit $M$ le $A$-module à droite défini par

$$M_C = C \oplus C/\mathrm{rad}(C) \oplus C/\mathrm{rad}^2(C) \oplus C/\mathrm{rad}^3(C).$$

Pour simplifier les notations, posons $M_1 = C$, $M_2 = C/\mathrm{rad}(C)$, $M_3 = C/\mathrm{rad}^2(C)$ et $M_4 = C/\mathrm{rad}^3(C)$. En considérant l'algèbre d'endomorphisme $B = \mathrm{End}_C(M_C)$, on obtient une algèbre quasi-héréditaire qui n'est pas positivement graduée (Voir [5, example 1] pour une preuve). Selon le lemme précédent, $B$ est une $k$-algèbre élémentaire de dimension finie sur $k$. Ainsi, selon le théorème 1.3.2, il existe un carquois fini $Q_B$ et un idéal admissible $I_B$ tels que $B \cong kQ_B/I_B$ en tant que $k$-algèbres. Soient $a_1$,$a_2$,$a_3$ et $a_4$ les sommets du carquois $Q_B$ associés aux modules $M_1$,$M_2$,$M_3$ et $M_4$, respectivement. De plus, notons $e_{a_i}$ l'idempotent primitif associé au sommet $a_i$ pour $i = 1,2,3,4$. Il est aisé de voir que $e_{a_i}\mathrm{rad}(B)e_{a_i} \neq 0$ pour $i = 1,3,4$ puisqu'il existe un morphisme nilpotent et non nul dans $\mathrm{End}_C(M_i)$ pour $i = 1,3,4$. Cependant, on remarque que $e_{a_2}\mathrm{rad}(B)e_{a_2} = 0$. De plus, $a_2$ n'est ni une source ni un puit du carquois $Q_B$. En effet, on a $\mathrm{Hom}_C(M_2,M_1) \neq 0$ et $\mathrm{Hom}_C(M_1,M_2) \neq 0$.

Nous construisons maintenant un nouveau carquois $Q$ à partir de $Q_B$ en ajoutant un point et deux flèches. Soit $x$ le nouveau sommet du carquois. Nous relions le sommet $x$ au sommet $a_2$ du carquois $Q_B$ de la façon suivante :

On ajoute une flèche $\alpha : a_2 \to x$ et une flèche $\beta : x \to a_2$.

De plus, soit $\gamma$ une flèche de $Q_B$ de but $a_2$. Considérons l'idéal $I =< I_B,\alpha\beta,\gamma\alpha >$ de $kQ$ engendré par les relations de $I_B$ plus les relations monomiales $\alpha\beta$ et $\gamma\alpha$. Nous montrons dans un premier temps que $A = kQ/I$ n'est pas positivement graduée. Pour ce faire, supposons, au contraire, que $A$ est positivement graduée, c'est-à-dire

$$A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i,$$

$A_iA_j \subseteq A_{i+j}$ pour tout $i,j$ et $\mathrm{rad}(A) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i$.

Comme $\alpha\beta \in I$, l'algèbre $eAe$ est isomorphe à l'algèbre $B$ lorsque $e = e_{a_1} + e_{a_2} + e_{a_3} + e_{a_4}$. On obtient ainsi, en tant que $k$-espaces vectoriels,

$$B \cong eAe = \bigoplus_{i=0}^{\infty} eA_ie$$

avec $eA_ieA_je \subseteq eA_{i+j}e$ pour tout $i,j$ et $\mathrm{rad}(eAe) = e\mathrm{rad}(A)e = \bigoplus_{i=1}^{\infty} eA_ie$. Ainsi, $B$ est positivement graduée, une contradiction.

Montrons maintenant que $A$ n'est pas quasi-héréditaire. D'abord, le seul idempotent primitif simple de $A$ est $e_{a_2}$. On doit donc montrer que $Ae_{a_2}A$ n'est pas projectif. Or, on voit que le facteur direct $Ae_{a_2}Ae_x$ de ${}_AAe_{a_2}A$ est tel que $Ae_{a_2}Ae_x \cong A\alpha$ dans $A$-mod. Puisque $\gamma\alpha \in I$, on obtient que ${}_AA\alpha$ n'est pas projectif et donc que $Ae_{a_2}A$ n'est pas projectif à gauche. Comme $e_{a_2}\mathrm{rad}(A)e_{a_2} = 0$, $Ae_{a_2}A$ est projectif à droite si et seulement s'il est projectif à gauche (pour une preuve, voir [10, page 1]). Par conséquent, $Ae_{a_2}A$ n'est pas projectif et $A$ n'est pas quasi-héréditaire.

Il reste maintenant à montrer que $A$ est ultimement héréditaire. Considérons l'idéal $A\beta A$ de $A$. Comme $\alpha\beta \in I$, on trouve que $A\beta A \cong \beta A$ en tant que $A$-modules à droite. Comme aucune relation de $I$ ne commence en $\beta$, $\beta A \cong e_{a_2}A$ et $A\beta A$ est un idéal quasi-héréditaire à droite de $A$. Ensuite, il est aisé de vérifier que $Ae_xA/A\beta A$ est un idéal quasi-héréditaire à gauche de $A/A\beta A$. Comme $A/Ae_xA \cong B$ qui est une algèbre ultimement héréditaire (car c'est une algèbre quasi-héréditaire), on trouve que $A$ est ultimement héréditaire.

L'algèbre $A$ ainsi construite est ultimement héréditaire sans être positivement graduée ni quasi-héréditaire.

# CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons défini une nouvelle classe d'algèbre : les algèbres quasi-stratifiées. Nous avons vu qu'une algèbre $A$ est quasi-stratifiée si l'on peut trouver une chaîne

$$(*) \ \ 0 = I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_{r-1} \subset I_r = A$$

d'idéaux de $A$ telle que deux algèbres subséquentes dans la suite $A,A/I_1,A/I_2,\ldots,A/I_{r-1}$ aient des propriétés homologiques semblables. En effet, nous avons vu que pour une algèbre $B$ et un idéal quasi-stratifiant $J$ de $B$,

$$\text{dim.gl}(B) < \infty \quad \text{si et seulement si} \quad \text{dim.gl}(B/J) < \infty \ \text{ et } \ \text{dim.gl}(eBe) < \infty$$

avec $e$ un idempotent qui engendre une certaine puissance de l'idéal $J$. Comme $e$ doit être pseudo-primitif (nul ou primitif), la condition $\text{dim.gl}(eBe) < \infty$ se remplace par $e(\text{rad}B)e = 0$. De même, pour le déterminant de Cartan, nous avons vu que

$$\text{cd}(B) = 1 \quad \text{si et seulement si} \quad \text{cd}(B/J) = 1 \ \text{ et } \ \text{cd}(eBe) = 1.$$

Ces deux derniers résultats combinés à une simple récurrence nous ont permis de démontrer la conjecture du déterminant de Cartan pour les algèbres quasi-stratifiées.

En ce qui concerne la conjecture d'abscence de boucles, le résultat clé est celui qui affirme que les auto-extensions d'un module simple sont préservées lorsque l'on passe de l'algèbre $B$ vers l'algèbre $B/J$.

Nous n'avons cependant pas pu démontrer la conjecture forte d'abscence de boucles pour ces algèbres. Le problème survient lorsque l'on a un module à droite simple $S_B$ de dimension projective finie mais dont l'idéal quasi-stratifiant $I_1$ de la chaîne (*) est projectif à gauche. Dans ce cas, on peut considérer le module à gauche simple $D(S_B)$ ; mais celui-ci n'est pas nécessairement de dimension projective finie dans $B$-mod.

Nous terminons cette conclusion en lançant une nouvelle conjecture, qui provient d'une remarque intéressante qui a été vérifiée sur toutes les algèbres qui ont été examinées lors de ce projet :

**Conjecture 6.1.2** *Soit $A$ une $k$-algèbre d'Artin sur un anneau commutatif $k$. Si la dimension globale de $A$ est finie, alors la partie réelle de toute valeur propre de la matrice de Cartan de $A$ est positive.*

On remarque que cette dernière conjecture englobe la conjecture du déterminant de Cartan puisque le déterminant d'une matrice est égal au produit de ses valeurs propres et que le résultat d'Eleinberg présenté au chapitre 3 affirme, entre autres, que la conjecture du déterminant de Cartan est équivalente à montrer que le déterminant de Cartan est positif lorsque la dimension globale de $A$ est finie.

# Bibliographie


[1] I. Agoston, D. Happel, E. Lukacs, et L. Unger. Finitistic dimension of standardly stratified algebras. *Comm. Algebra*, 28: 2745-2752, 2000.

[2] I. Assem. *Algèbres et modules : Cours et exercices*. Enseignement des Mathématiques. Les Presses de l'Université d'Ottawa - MASSON, Ottawa-Paris, 1997.

[3] I. Assem, D. Simson et A. Skowroński. *Elements of Representation Theory of Associative Algebras*. À paraître, Toruń, 1997.

[4] M. Auslander, I. Reiten et S. O. Smalø. *Representation Theory of Artin Algebras*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 36. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[5] Th. Belzner, W. D. Burgess, K. R. Fuller et R. Schulz. Examples of ungradable algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 114: 1-4, 1992.

[6] W. D. Burgess et K. R. Fuller. On quasi-hereditary rings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 106: 321-328, 1989.

[7] W. D. Burgess, K. R. Fuller, E. R. Voss et B. Zimmermann-Huisgen. The Cartan matrix as an indicator of finite global dimension for Artinian rings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 95: 157-165, 1985.

[8] E. Cline, B. Parshall et L. Scott. Finite-dimensional algebras and highest weight categories. *J. Reine Angew. Math.*, 391: 85-99, 1988.

[9] V. Dlab et C. M. Ringel. Quasi-hereditary algebras. *Illinois J. Math.*, 33: 280-291, 1989.

[10] V. Dlab et C. M. Ringel. Auslander algebras as quasi-hereditary algebras. *J. London Math. Soc.*, 39: 457-466, 1989.

[11] V. Dlab. Quasi-hereditary algebras revisited. *An. St. Univ. Ovidius Constantza*, 4: 43-54, 1996.

[12] K. R. Fuller. The Cartan determinant and global dimension of artinian rings. *Contemp. Math.*, 124: 51-72, 1992.

[13] J. P. Jans et T. Nakayama. On the dimensions of modules and algebras VII. *Nagoya Math. J*, 11: 67-76, 1957.

[14] D. D. Wick. A generalization of quasi-hereditary rings. *Comm. Algebra*, 24: 1217-1227, 1996.

[15] G. Wilson. The Cartan map on categories of graded modules. *J. Algebra*, 85: 390-398, 1983.

[16] D. Zacharia. On the Cartan matrix of an artin algebra of global dimension two. *J. Algebra*, 82: 353-357, 1983.