

**Conjectures homologiques, catégories stables et représentations
de carquois infinis.**

par

Charles Paquette

thèse présentée au Département de mathématiques
en vue de l'obtention du grade de philosophiae doctor (Ph.D.)

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, août 2010

SOMMAIRE

Cette thèse comprend les résultats de trois articles dont deux sont publiés. L'un a été rédigé par l'auteur et l'autre par l'auteur ainsi que son directeur. Le dernier article est en cours de rédaction. Les résultats de cette thèse qui apparaissent dans ce dernier article ont tous été travaillés par l'auteur. Cette thèse comprend donc des résultats qui touchent des sujets de l'algèbre légèrement différents.

La première partie de la thèse s'intéresse aux algèbres strictement stratifiées. Nous montrons qu'une algèbre strictement stratifiée a toujours une dimension finitiste injective finie et nous donnons une borne pour celle-ci. Nous montrons également que tout module simple de dimensions injective et projective finies n'admet pas d'auto-extension non nulle. Ceci montre une version plus faible de la conjecture forte d'absence de boucles (*Strong no loop conjecture*, en anglais). Finalement, nous montrons qu'une algèbre strictement stratifiée a toujours un déterminant de Cartan positif. De plus, nous montrons que ce déterminant vaut un si et seulement si la dimension globale de l'algèbre est finie. Cela montre, en particulier, la conjecture du déterminant de Cartan et sa réciproque pour la classe des algèbres strictement stratifiées.

Dans la seconde partie, nous nous intéressons à la catégorie stable injective (ou projective) d'une algèbre d'Artin. Nous montrons qu'elle est triangulée si et seulement si A est stablement équivalente à une algèbre auto-injective, si et seulement si A est auto-

injective ou de Nakayama de longueur de Loewy deux. Nous montrons également que ces conditions sont équivalentes à demander que la catégorie stable injective soit faiblement abélienne. Ce résultat montre la réciproque d'un résultat de Happel (voir [22, théorème 2.6]) affirmant que si A est auto-injective, alors la catégorie stable injective est triangulée.

Finalement, la dernière partie de cette thèse s'intéresse aux représentations localement de dimension finie d'un carquois Q sur un corps algébriquement clos. Nous supposons que Q est infini, connexe, localement fini et fini par intervalle. Nous nous intéressons à l'existence de suites presque scindées dans la catégorie qui contient ces représentations, notée $\text{rep}(Q)$. Nous montrons, en particulier, que pour tout objet X de $\text{rep}^+(Q)$, la sous-catégorie pleine de $\text{rep}(Q)$ des représentations de présentation finie, il existe une suite presque scindée dans $\text{rep}(Q)$ se terminant en X . Nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour que la catégorie $\text{rep}^+(Q)$ admette des suites presque scindées à droite ainsi que des suites presque scindées. Sous l'hypothèse que $\text{rep}^+(Q)$ admette des suites presque scindées à droite, nous étudions les composantes du carquois d'Auslander-Reiten de la catégorie $\text{rep}^+(Q)$. Nous donnons une description complète de ces composantes. Nous montrons qu'il existe deux types de composantes régulières. Celles de type $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$ et celles de type $\mathbb{N}^-\mathbb{A}_\infty$. Nous montrons également que le nombre de telles composantes est fini si et seulement si le carquois Q est de type Dynkin infini. Nous montrons finalement que si le carquois Q satisfait à une certaine condition sur ses marches acycliques infinies, alors toutes les composantes régulières du carquois d'Auslander-Reiten sont de type $\mathbb{N}^-\mathbb{A}_\infty$.

REMERCIEMENTS

Je tiens d'abord à remercier mon directeur de doctorat, Shiping Liu, qui m'a été d'une grande aide sur le plan mathématique. Plusieurs discussions avec lui m'ont permis d'avancer dans mes projets de recherche. Il m'a permis aussi de faire plusieurs voyages pour assister à des conférences en me soutenant financièrement. Il ne faut pas oublier l'équipe de la théorie des représentations des algèbres de l'Université de Sherbrooke et de l'Université Bishop's qui est intervenue sur le plan social, soit par de simples activités sociales ou encore en me permettant de participer à des conférences mathématiques par son soutien financier. Merci à mes parents qui m'ont supporté en me laissant travailler sur mon doctorat les soirs de semaine de l'hiver 2010. Je dois aussi des remerciements particuliers à ma compagne de vie, Agathe, qui m'a supporté dans les moments plus difficiles à la fin du doctorat. Je termine en remerciant le CRSNG et le FQRNT pour leur soutien financier dans les trois premières années de mon doctorat.

TABLE DES MATIÈRES

SOMMAIRE	ii
REMERCIEMENTS	iv
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 — Quelques rappels en algèbre non commutative	3
1.1 Notions homologiques	4
1.2 Groupe de Grothendieck	6
CHAPITRE 2 — Algèbres de carquois et de carquois liés	8
2.1 Algèbres de chemins	8
2.2 Carquois liés	12
2.3 Les représentations d'un carquois	14
CHAPITRE 3 — Théorie d'Auslander-Reiten	17
3.1 Le cas général	17

3.2	Le cas des algèbres d'Artin	19
3.3	Carquois d'Auslander-Reiten	21
CHAPITRE 4 — Algèbres strictement stratifiées		24
4.1	Algèbres stratifiées et standardement stratifiées	25
4.2	Algèbres strictement stratifiées	27
4.3	Quelques lemmes préparatoires	30
4.4	Extensions de modules simples	35
4.5	La dimension finitiste	37
4.6	Le déterminant de Cartan	41
CHAPITRE 5 — Catégories stables de modules		47
5.1	Notions de catégories triangulées	47
5.2	Définition des catégories stables	49
5.3	Les algèbres stablement triangulées	50
CHAPITRE 6 — Représentations de carquois infinis		57
6.1	Quelques notations et rappels	58
6.2	Les représentations de présentation finie	58
6.3	Suites presque scindées dans $\text{rep}(Q)$	66
6.4	L'existence de suites presque scindées dans $\text{rep}^+(Q)$	76
6.5	Structure des composantes du carquois d'Auslander-Reiten de $\text{rep}^+(Q)$	83

6.6	Les carquois de type Dynkin infini	106
6.6.1	Le cas \mathbb{A}_∞	110
6.6.2	Le cas \mathbb{A}_∞	113
6.6.3	Le cas \mathbb{D}_∞	114
6.7	Le nombre de composantes régulières	121
6.7.1	Quelques généralités	122
6.7.2	Le cas général	125
	CONCLUSION	132

INTRODUCTION

La théorie des représentations des algèbres associatives a pour but principal l'étude de la catégorie des modules d'une algèbre associative A . Souvent, nous supposons que l'algèbre A est une k -algèbre d'Artin (k étant un anneau commutatif artinien). La condition donnée sur A est en quelque sorte une condition de finitude qui nous permet d'avoir un minimum de propriétés sur la catégorie des A -modules. Parfois, on restreint davantage les objets d'étude aux algèbres de dimension finie sur un corps k .

Il y a plusieurs façon d'aborder l'étude de $\text{mod}(A)$, la catégorie des A -modules à droite de présentation finie. L'une d'elle consiste à étudier les propriétés homologiques de cette catégorie. Parmi les propriétés homologiques de cette catégorie, on note les propriétés des foncteurs dérivés de $M \otimes_A -$, $- \otimes_A N$, $\text{Hom}_A(M, -)$ et $\text{Hom}_A(-, M)$ avec M un module de $\text{mod}(A)$ et N un module de $\text{mod}(A^{\text{op}})$. L'étude de ces foncteurs fait intervenir la notion de dimension homologique. Parmi les dimensions homologiques connues, des plus importantes sont les dimensions projective et injective d'un module. Ces dimensions donnent lieu à ce que l'on appelle la dimension finitiste d'une algèbre. L'une des conjectures les plus populaires en théorie des anneaux dit que cette dimension est toujours finie lorsque A est une algèbre d'Artin. Pour certaines classes d'algèbres ayant de bonnes propriétés homologiques, la dimension finitiste est plus facile à étudier. Dans cette thèse, nous étudions cette dimension pour une certaine classe d'algèbres. D'autres conjectures

homologiques, telles la conjecture du déterminant de Cartan et la conjecture d'absence de boucles, sont aussi étudiées.

Ensuite, il va de soi que nous pouvons étudier la catégorie $\text{mod}(A)$ comme telle, c'est-à-dire dans son ensemble, en tant que catégorie. Nous savons, par exemple, qu'elle est abélienne et qu'elle admet suffisamment d'objets injectifs et projectifs. Il est bien connu que si A est auto-injective, les catégories stables associées à $\text{mod}(A)$ sont des catégories triangulées. La deuxième partie de la thèse consiste à étudier la réciproque de l'énoncé cité plus haut : si les catégories stables associées à $\text{mod}(A)$ sont triangulées, est-ce que A est une algèbre auto-injective (ou du moins, stablement équivalente à une algèbre auto-injective) ?

Finalement, une troisième façon d'étudier $\text{mod}(A)$ est d'étudier les morphismes de cette catégorie. La théorie d'Auslander-Reiten est l'outil clé pour faire cette étude. Cette théorie étudie les morphismes dit irréductibles de la catégorie $\text{mod}(A)$. Ce sont, *grosso modo*, des morphismes qu'on ne peut factoriser davantage. Cette théorie est bien connue pour les algèbres d'Artin. La troisième partie de cette thèse portera sur l'étude des morphismes irréductibles pour des modules sur une algèbre qui n'est pas une algèbre d'Artin (et donnée par un carquois infini). Les morphismes irréductibles entre les modules indécomposables donnent lieu à ce que l'on appelle le carquois d'Auslander-Reiten de la catégorie de modules. Nous étudions les composantes connexes de ce carquois pour une certaine catégorie de modules qui correspondent à des représentations sur un carquois infini. Notons que les carquois infinis et localement finis de même que les représentations de ces carquois interviennent dans l'étude de la catégorie dérivée bornée d'une algèbre d'Artin de longueur de Loewy deux (voir, par exemple, [11]) et dans l'étude des revêtements d'un carquois fini non-acyclique (voir [14]). D'où l'importance d'étudier les représentations d'un carquois infini et localement fini.

CHAPITRE 1

Quelques rappels en algèbre non commutative

Dans ce chapitre, nous donnons un rappel de certaines notions reliées aux algèbres d'Artin et aux modules sur ces algèbres. Nous supposons que le lecteur est déjà quelque peu familier avec l'algèbre non commutative et la théorie des représentations des algèbres. Les notions de base en algèbre non commutative peuvent se trouver dans [3].

Soit A une k -algèbre associative où k est un anneau artinien commutatif. Plus loin, nous supposerons que k est un corps. Mais dans ce chapitre, nous gardons le cas le plus général où k est artinien, à moins d'indications contraires. Nous supposons aussi que A est une algèbre d'Artin sur k , dans le sens où A , en tant que k -module, est de longueur finie sur k . Nous notons $\text{Mod}(A)$ la catégorie des A -modules à droite et $\text{mod}(A)$ la catégorie des A -modules à droite de présentation finie. À moins d'avis contraire, tout A -module, dans cette thèse, est un A -module à droite. Remarquons que les deux catégories précédentes sont abéliennes. Notons aussi que puisque A est une algèbre d'Artin, un A -module est de présentation finie si et seulement si il est de type fini.

Le radical de Jacobson de A sera noté $\text{rad}(A)$. Rappelons que le radical est un idéal bilatère de l'algèbre. De plus, dans le cas d'une algèbre d'Artin, c'est un idéal nilpotent tel que l'algèbre quotient $A/\text{rad}(A)$ est semi-simple. L'indice de nilpotence du radical est appelé la **longueur de Loewy** de A . On note A^{op} l'**algèbre opposée** de A . La donnée d'un A -module à gauche revient à la donnée d'un A^{op} -module à droite. Nous ferons donc cette association au cours de cette thèse. Finalement, on note D la dualité standard de $\text{mod}(A)$ vers $\text{mod}(A^{\text{op}})$. Cette dualité est le foncteur $\text{Hom}_k(-, U(k)) : \text{mod}(A) \rightarrow \text{mod}(A^{\text{op}})$ où $U(k)$ est une enveloppe injective du k -module k . Notons que si k est un corps, on a $D = \text{Hom}_k(-, k)$. Notons aussi que, bien que D soit un foncteur de $\text{Mod}(A)$ vers $\text{Mod}(A^{\text{op}})$, D n'est pas une dualité entre ces deux catégories.

1.1 Notions homologiques

Soit M un A -module. Les foncteurs $\text{Ext}_A^i(M, -)$ et $\text{Tor}_i^A(M, -)$, $i \geq 1$, sont définis comme foncteurs dérivés de $\text{Hom}_A(M, -)$ et $M \otimes_A -$, respectivement. De même pour les foncteurs $\text{Ext}_A^i(-, M)$ et $\text{Tor}_i^A(-, N)$ lorsque N est un A^{op} -module. Nous utiliserons à plusieurs reprises les foncteurs d'extension $\text{Ext}_A^i(-, M)$ et $\text{Ext}_A^i(M, -)$. Pour pouvoir définir ces foncteurs, il faut que la catégorie $\text{Mod}(A)$ admette suffisamment d'objets projectifs et injectifs. C'est le cas si A est une algèbre d'Artin. Remarquons que si ce n'est pas le cas, on peut tout de même définir les foncteurs d'extension au moyen de classes d'équivalence de suites exactes courtes. Pour plus de détails concernant ceci, le lecteur est invité à consulter [33].

Rappelons les résultats suivants qui seront fort utiles dans le chapitre 4.

Proposition 1.1.1. *Soit $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ une suite exacte courte de A -modules. Alors pour $X \in \text{Mod}(A)$, le foncteur $\text{Hom}_A(X, -)$ induit une suite exacte longue*

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \text{Hom}_A(X, L) \rightarrow \text{Hom}_A(X, M) \rightarrow \text{Hom}_A(X, N) \\ &\rightarrow \text{Ext}_A^1(X, L) \rightarrow \text{Ext}_A^1(X, M) \rightarrow \text{Ext}_A^1(X, N) \rightarrow \dots \\ \dots &\rightarrow \text{Ext}_A^i(X, L) \rightarrow \text{Ext}_A^i(X, M) \rightarrow \text{Ext}_A^i(X, N) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

de k -modules et le foncteur $\text{Hom}_A(-, X)$ induit une suite exacte longue

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \text{Hom}_A(N, X) \rightarrow \text{Hom}_A(M, X) \rightarrow \text{Hom}_A(L, X) \\ &\rightarrow \text{Ext}_A^1(N, X) \rightarrow \text{Ext}_A^1(M, X) \rightarrow \text{Ext}_A^1(L, X) \rightarrow \dots \\ \dots &\rightarrow \text{Ext}_A^i(N, X) \rightarrow \text{Ext}_A^i(M, X) \rightarrow \text{Ext}_A^i(L, X) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

de k -modules.

Pour $M \in \text{Mod}(A)$, la **dimension projective** de M , notée $\text{dp}_A(M)$ (ou $\text{dp}(M)$ s'il n'y a pas de risque de confusion), est le plus grand entier non négatif i , s'il existe, tel que $\text{Ext}_A^i(M, -)$ est non nul. Ici, on a identifié $\text{Ext}_A^0(-, ?)$ à $\text{Hom}(-, ?)$. Si cet entier n'existe pas, on pose $\text{dp}_A(M) = \infty$. De même, la **dimension injective** de M , notée $\text{di}_A(M)$ (ou $\text{di}(M)$ s'il n'y a pas de risque de confusion), est le plus grand entier non négatif i , s'il existe, tel que $\text{Ext}_A^i(-, M)$ est non nul. Si cet entier n'existe pas, on pose $\text{di}_A(M) = \infty$. On définit ensuite la **dimension globale** de A , notée $\text{dimgl}(A)$, comme étant le plus grand entier non négatif i , s'il existe, tel que $\text{Ext}_A^i(-, ?)$ est non nul. Sinon, on pose $\text{dimgl}(A) = \infty$. D'après les considérations précédentes, la dimension globale de A est le suprémum des dimensions projectives de tous les modules de $\text{Mod}(A)$, de même que le suprémum des dimensions injectives de tous les modules de $\text{Mod}(A)$. Cependant, le calcul de cette dimension est beaucoup plus simple qu'il n'y paraît. Il est bien connu que

lorsque A est une algèbre d'Artin,

$$\begin{aligned} \dim_{\text{gl}}(A) &= \sup\{\text{dp}(S) \mid S \text{ est un } A\text{-module simple}\} \\ &= \sup\{\text{di}(S) \mid S \text{ est un } A\text{-module simple}\}. \end{aligned}$$

1.2 Groupe de Grothendieck

Étant donné une algèbre d'Artin A , on peut lui associer un groupe abélien additif, noté $K_0(A)$ et appelé **groupe de Grothendieck**, défini par générateurs et relations. Les générateurs sont les symboles $[M]$, où $[M]$ note la classe d'isomorphisme du A -module M de $\text{mod}(A)$. Étant donné une suite exacte courte

$$0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$$

dans $\text{mod}(A)$, on a la relation $[M] = [L] + [N]$, et ce sont toutes les relations de $K_0(A)$.

Soit $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ un ensemble complet d'idempotents primitifs et deux à deux orthogonaux de A . Supposons, sans perte de généralité, que les modules projectifs $e_i A$ sont deux à deux non isomorphes lorsque $1 \leq i \leq n \leq m$ et que si $n < i \leq m$, il existe j entre 1 et n tel que $e_j A \cong e_i A$. On a alors que

$$S_i = e_i A / e_i \text{rad}(A), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

sont les A -modules simples, à isomorphisme près. Comme tout module de $\text{mod}(A)$ admet une suite de composition, il est aisé de voir que $\{[S_1], [S_2], \dots, [S_n]\}$ est un ensemble générateur de $K_0(A)$. On a, en fait, le résultat suivant.

Proposition 1.2.1. *Avec les notations précédentes, $K_0(A)$ est le groupe abélien libre de base $\{[S_1], [S_2], \dots, [S_n]\}$. Si M est un module de présentation finie tel que pour $1 \leq i \leq n$,*

S_i apparaît exactement a_i fois comme facteur de composition de M , alors

$$[M] = \sum_{i=1}^n a_i [S_i].$$

Cette proposition nous dit, en fait, que $K_0(A) \cong \mathbb{Z}^n$. Il serait cependant commode d'avoir un isomorphisme « naturel » entre ces deux groupes. Étant donné un k -module X , on note $\ell(X)$ sa longueur. On a le lemme suivant dont la démonstration est élémentaire et laissée au lecteur.

Lemme 1.2.2. *Soit M un module de $\text{mod}(A)$ et supposons que S_i apparaît exactement r fois parmi les facteurs de composition de M . Alors $r = \ell(Me_i)$.*

Maintenant, en utilisant le lemme précédent, on a l'isomorphisme suivant.

Proposition 1.2.3. *La fonction $[M] \mapsto (\ell(Me_1), \ell(Me_2), \dots, \ell(Me_n))$ est un isomorphisme de groupes de $K_0(A)$ vers \mathbb{Z}^n .*

Étant donné un module M , l'élément $(\ell(Me_1), \ell(Me_2), \dots, \ell(Me_n))$ de \mathbb{Z}^n est appelé le **vecteur dimension** de M .

CHAPITRE 2

Algèbres de carquois et de carquois liés

Dans ce chapitre, on se fixe k un corps. Nous construisons une classe de k -algèbres à l'aide d'une notion appelée carquois. Les algèbres construites ne sont pas nécessairement des algèbres d'Artin, c'est-à-dire des algèbres de dimension finie sur k . Nous commençons avec la notion d'algèbres de chemins.

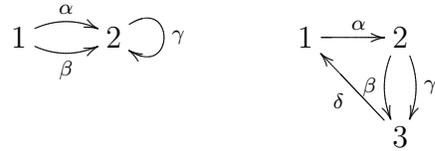
2.1 Algèbres de chemins

Notre objectif premier dans cette section est de définir une algèbre (pas nécessairement une algèbre d'Artin) à partir de la notion de carquois.

Définition 2.1.1. *Un carquois $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ est un quadruplet avec Q_0 et Q_1 des ensembles et $s : Q_1 \rightarrow Q_0$, $t : Q_1 \rightarrow Q_0$ des applications. Les éléments de Q_0 sont appelés des **sommets** ou des **points** et les éléments de Q_1 des **flèches**. Pour une flèche $\alpha \in Q_1$, on dit que $s(\alpha)$ est sa **source** et $t(\alpha)$ son **but**. Finalement, on dit que le carquois Q est **fini** si les ensembles Q_0 et Q_1 sont finis.*

Il est important de noter qu'il peut y avoir plusieurs flèches qui vont d'un sommet a vers un sommet b dans un carquois. De plus, rien n'interdit la présence de boucles. Le lecteur aura remarqué la ressemblance des concepts de carquois et de graphes orientés. Dans cette thèse, un carquois $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ est souvent noté brièvement (Q_0, Q_1) ou encore Q lorsqu'il n'y a aucun risque de confusion. Pour une flèche $\alpha \in Q_1$ avec $s(\alpha) = a$ et $t(\alpha) = b$, on écrit souvent $\alpha : a \rightarrow b$.

Exemples 2.1.2. Voici deux exemples de carquois finis :



et un exemple de carquois infini :

$$1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \xrightarrow{\alpha_2} 3 \xrightarrow{\alpha_3} 4 \xrightarrow{\alpha_4} \dots$$

Voici maintenant la définition de chemin dans un carquois.

Définition 2.1.3. Soit $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ un carquois. Un **chemin** ω de Q est une suite finie notée $\omega = \omega_1 \omega_2 \dots \omega_n$ de flèches de Q_1 telle que $t(\omega_i) = s(\omega_{i+1})$ pour $i = 1, 2, \dots, n-1$. La **longueur** du chemin ω est définie comme étant l'entier n . La **source** et le **but** de ω correspondent à la source de ω_1 et au but de ω_n , respectivement.

On définit également, pour chaque $a \in Q_0$, un **chemin stationnaire** de longueur 0, noté e_a , ayant comme source et but le sommet a .

Notons qu'il est également possible de définir la notion de chemin infini.

Définition 2.1.4. (a) Un chemin **infini à droite** dans Q est une suite infinie notée $\omega = \omega_1 \omega_2 \omega_3 \dots$ où pour tout $n \geq 1$, $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_n$ est un chemin fini.

(b) Un chemin **infini à gauche** dans Q est une suite infinie notée $\omega = \cdots \omega_3 \omega_2 \omega_1$ où pour tout $n \geq 1$, $\omega_n \cdots \omega_2 \omega_1$ est un chemin fini.

Un chemin infini à droite peut se visualiser de la façon suivante :

$$\circ \xrightarrow{\omega_1} \circ \xrightarrow{\omega_2} \circ \xrightarrow{\omega_3} \cdots$$

alors qu'un chemin infini à gauche, de la façon suivante :

$$\cdots \xrightarrow{\omega_3} \circ \xrightarrow{\omega_2} \circ \xrightarrow{\omega_1} \circ$$

Le lemme de König sera très utile dans le chapitre 6 pour déterminer si un carquois donné contient ou non des chemins infinis à gauche ou à droite. On dit qu'un carquois Q est **localement fini** si, étant donné un sommet a de Q_0 , le nombre de flèches se terminant en a et le nombre de flèches commençant en a est fini. Le lemme de König a été originalement cité pour les graphes infinis qui sont des arbres localement finis. Un tel arbre admet nécessairement un chemin infini. Voici donc une version de ce lemme que nous utiliserons à plusieurs reprises.

Lemme 2.1.5 (Lemme de König). *Soient Q un carquois localement fini et $x \in Q_0$. S'il existe une infinité de chemins se terminant (ou commençant) en x , alors il existe un chemin infini se terminant (ou commençant, respectivement) en x .*

Démonstration. Nous montrons seulement le premier cas. Soient $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}$ les prédécesseurs immédiats de x . Par hypothèse, il existe $1 \leq j_1 \leq n_1$ tel qu'il existe une infinité de chemins se terminant en x et passant par x_{1j_1} . Soit $\alpha_1 : x_{1j_1} \rightarrow x$ une flèche reliant x_{1j_1} et x . Si $x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2}$ notent les prédécesseurs immédiats de x_{1j_1} , alors il existe $1 \leq j_2 \leq n_2$ tel qu'il existe une infinité de chemins se terminant en x_{1j_1} et passant par x_{2j_2} . Soit $\alpha_2 : x_{2j_2} \rightarrow x_{1j_1}$ une flèche reliant x_{2j_2} et x_{1j_1} . On continue la construction

ainsi et on obtient un chemin infini

$$\cdots \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1$$

se terminant en x . □

Voici maintenant la définition principale de ce chapitre.

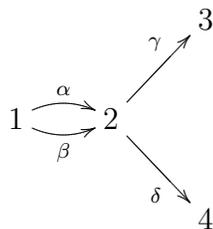
Définition 2.1.6. *Soit Q un carquois. L'algèbre des chemins kQ de Q sur k est la k -algèbre dont le k -espace vectoriel sous-jacent admet l'ensemble des chemins finis de Q comme base. La multiplication des éléments de base est définie de la façon suivante : si ω_1 et ω_2 sont deux chemins finis de Q , alors le produit $\omega_1 \omega_2$ est défini comme étant la concaténation des chemins ω_1 et ω_2 si le but de ω_1 et la source de ω_2 coïncident et 0, sinon. La multiplication de deux éléments quelconques de kQ est alors déduite de celle des éléments de base de kQ en utilisant la distributivité.*

Cette définition nous indique que l'algèbre des chemins d'un carquois est une algèbre de dimension infinie sur le corps k si le carquois Q admet des cycles orientés ou encore si Q n'est pas fini. Cependant, si le carquois est fini et n'admet aucun cycle orienté, l'algèbre kQ est de dimension finie sur k (et donc une k -algèbre d'Artin).

On note d'ailleurs que si Q est fini, alors kQ admet $\sum_{a \in Q_0} e_a$ comme identité. De plus, on remarque que kQ n'est généralement pas commutative. Par exemple, si Q_1 contient des flèches qui ne sont pas des boucles, alors l'algèbre kQ n'est pas commutative.

Notons R_Q l'idéal de kQ engendré par les flèches de Q_1 .

Exemple 2.1.7. Soit $Q = (Q_0, Q_1)$ avec $Q_0 = \{1, 2, 3, 4\}$ et $Q_1 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ le carquois suivant :



Comme Q_0 et Q_1 sont finis et que le carquois Q n'admet aucun cycle orienté, kQ est de dimension finie sur k . En fait, il est aisé de voir que $\dim_k kQ = 12$.

2.2 Carquois liés

Les algèbres de chemins définies dans la section précédente sont très utiles et faciles à utiliser : elles donnent lieu à plusieurs exemples. Dans cette section, nous construisons une classe d'algèbres qui généralisent la classe d'algèbres introduite dans la section précédente. Comme nous le verrons, ces algèbres constituent un outil puissant qui nous permet d'exprimer de façon visuelle plusieurs algèbres de dimension finie sur un corps. Étant donné un carquois Q , nous allons définir une certaine classe d'idéaux bilatères de kQ que nous appelons idéaux admissibles. Nous allons ensuite considérer le quotient de l'algèbre des chemins de Q par un idéal admissible.

Définition 2.2.1. Soit $Q = (Q_0, Q_1)$ un carquois. Un idéal I de kQ est dit **admissible** s'il existe un entier $m \geq 2$ tel que $R_Q^m \subseteq I \subseteq R_Q^2$. Dans ce cas, la paire (Q, I) s'appelle un **carquois lié**. L'algèbre quotient $A = kQ/I$ est appelée l'**algèbre du carquois lié** (Q, I) ou simplement une **algèbre de carquois lié**.

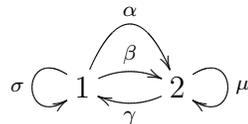
Nous expliquons un peu plus loin la motivation de la définition d'idéal admissible. Pour l'instant, nous montrons que les générateurs d'un idéal admissible peuvent être choisis de

façon à satisfaire à un certain critère. Soit (Q, I) un carquois lié et soient $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ des chemins de Q de mêmes sources et de mêmes buts et de longueur au moins 2. Enfin, soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des éléments non nuls de k . L'élément $\rho = \sum_{i=1}^n \lambda_i \omega_i \in I$ s'appelle une **relation** sur Q . On appelle $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ les *composantes* de ρ .

Par ailleurs, si $n \geq 2$ et si pour tout sous-ensemble propre et non vide Ω de $\{1, 2, \dots, n\}$, on a $\sum_{i \in \Omega} \lambda_i \omega_i \notin I$, alors ρ est une **relation minimale**. Dans le cas où $n = 1$, on dit que ρ est une relation **monomiale**. On peut vérifier sans difficulté qu'étant donné un idéal admissible I de kQ , il est toujours possible de choisir des relations minimales et monomiales comme générateurs de I .

Le lecteur peut se demander pourquoi on doit se restreindre aux idéaux admissibles dans la définition de carquois liés. La raison est très simple. Dans la définition d'idéaux admissibles, on demande d'une part qu'il existe $m \geq 2$ tel que $R_Q^m \subseteq I$ pour ne pas avoir de chemins arbitrairement longs dans l'algèbre. Dans le cas où Q est fini, cela implique que l'algèbre kQ/I est de dimension finie. D'autre part, on demande que $I \subseteq R_Q^2$ afin qu'il n'y ait pas de flèches redondantes dans le carquois. En effet, soit $\omega \in I$ un élément tel que $\omega \notin R_Q^2$. Alors il existe $\lambda \in k_*$, $\alpha \in Q_1$ et ρ une combinaison linéaire de chemins de kQ telles que $\omega = \lambda\alpha + \rho$. En utilisant le fait que $R_Q^m \subseteq I$, on peut montrer qu'il est possible de choisir ω d'une telle sorte que α n'apparaît pas dans les composantes de ρ . Par conséquent, l'expression $\alpha + I = -\lambda^{-1}\rho + I$ fait de α une flèche redondante dans l'algèbre kQ/I .

Exemple 2.2.2. Soit Q le carquois suivant :



et I l'idéal de kQ engendré par les relations monomiales σ^2 , μ^2 , $\gamma\sigma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\mu$, $\mu\gamma$ et la relation minimale $\alpha\gamma - \beta\gamma$. On peut vérifier sans difficulté que (Q, I) est un carquois lié car

$R_Q^6 \subseteq I \subseteq R_Q^2$. De plus, un calcul simple permet de vérifier que l'algèbre correspondante $A = kQ/I$ est de dimension 19 sur k alors que l'algèbre des chemins kQ est de dimension infinie sur k car le carquois Q admet des cycles orientés.

Soit $A = kQ/I$ une k -algèbre donnée par un carquois lié (Q, I) . On peut vérifier sans peine que le radical de Jacobson de A est donné par $\text{rad}(A) = R_Q/I$, ce qui correspond à l'idéal de A engendré par les classes d'équivalence des flèches de Q , modulo l'idéal I . Cette dernière observation est particulièrement utile dans l'étude des A -modules projectifs et des A -modules simples. Supposons que Q est fini. Si $|Q_0| = n$, alors la catégorie $\text{mod}(A)$ admet exactement n modules projectifs indécomposables deux à deux non isomorphes. Il suffit de remarquer que l'ensemble $\{\bar{e}_a \mid a \in Q_0\}$, où $\bar{e}_a = e_a + I$, est un ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux de A de sorte que les modules projectifs indécomposables sont $\{\bar{e}_a A \mid a \in Q_0\}$. Les modules simples de $\text{mod}(A)$, à isomorphisme près, sont alors donnés par $\{S_a = \bar{e}_a A / \bar{e}_a \text{rad}(A) \mid a \in Q_0\}$. Ils sont tous de dimension un sur k .

2.3 Les représentations d'un carquois

Dans cette courte section, on se fixe Q un carquois localement fini.

Définition 2.3.1. Une k -représentation M de Q (ou simplement une représentation de Q) est la donnée d'un k -espace vectoriel $M(a)$ pour chaque sommet a de Q_0 et d'une application linéaire $M(\alpha) : M(a) \rightarrow M(b)$ pour chaque flèche $\alpha : a \rightarrow b$ de Q_1 .

Le carquois Q s'identifie à une k -catégorie \mathcal{C}_Q de la façon suivante. Les objets de \mathcal{C}_Q sont les sommets de Q et pour deux sommets $a, b \in Q_0$, les morphismes de base du k -espace vectoriel $\mathcal{C}_Q(a, b)$ sont les chemins de a vers b . La composition des morphismes de \mathcal{C}_Q est obtenue à partir de la multiplication des chemins de kQ . Par contre, les chemins

d'un carquois se composent de gauche à droite alors que les morphismes se composent de droite à gauche. Ainsi, si ω_1, ω_2 sont deux chemins de kQ tels que le but de ω_1 est égal à la source de ω_2 , alors le morphisme de \mathcal{C}_Q correspondant au chemin $\omega_1\omega_2$ de kQ s'écrit $\omega_2\omega_1$. Nous devons faire attention à cette différence dans le reste de la thèse. En fait, lorsqu'un chemin sera considéré comme un morphisme, nous le dirons explicitement. On note qu'une représentation de Q est simplement un foncteur covariant de la catégorie \mathcal{C}_Q vers $\text{Mod}(k)$, la catégorie des k -espaces vectoriels.

Étant donné deux représentations M, N de Q , un morphisme $f : M \rightarrow N$ est une famille $\{f_a : M(a) \rightarrow N(a)\}_{a \in Q_0}$ telle que pour toute flèche $\alpha : a \rightarrow b \in Q_1$, on a $N(\alpha)f_a = f_bM(\alpha)$. On voit donc que f est en réalité un morphisme fonctoriel du foncteur correspondant à M vers le foncteur correspondant à N .

On dit qu'un module M de l'algèbre des chemins $A = kQ$ est **unifère** si l'on a $MA = M$. Si $\{e_i\}_{i \in Q_0}$ sont les chemins stationnaires correspondant aux sommets du carquois, alors on a $A = \bigoplus_{i \in Q_0} Ae_i$. On voit donc que M s'écrit

$$M = \bigoplus_{i \in Q_0} Me_i.$$

Nous pouvons donc associer à un tel module M une représentation M' de Q qui est telle que pour $a \in Q_0$, $M'(a) = Me_a$ et pour $\alpha : a \rightarrow b \in Q_1$, $M'(\alpha)$ est l'application linéaire qui est telle que pour $x \in Me_a = M'(a)$, on a $M'(\alpha)(x) = x\alpha \in Me_b = M'(b)$.

Inversement, si M' est une représentation de Q , alors on pose

$$M = \bigoplus_{a \in Q_0} M'(a).$$

Si $\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_r : a \rightarrow b$ est un chemin fini de a vers b dans Q et $x = (x_i)_{i \in Q_0} \in M$, alors on pose

$$x\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_r = (y_i)_{i \in Q_0}$$

où

$$y_b = M'(\alpha_r) \circ M'(\alpha_{r-1}) \circ \cdots \circ M'(\alpha_1)(x_a)$$

et $y_i = 0$ si $i \neq b$. Cela permet de donner à M une structure de A -module unifère. Cette association donne que la catégorie des représentations de Q , que l'on note $\text{Rep}(Q)$, est équivalente à la catégorie des A -modules unifères à droite, que l'on note $\text{Mod}(A)$, par abus de notation. La preuve détaillée de ce fait, lorsque Q est fini, se trouve dans [4, théorème 1.6]. La preuve dans le cas où Q est infini est identique.

La sous-catégorie pleine de $\text{Rep}(Q)$ des représentations M telles que $M(i)$ est de dimension finie pour tout $i \in Q_0$ est notée $\text{rep}(Q)$. Une telle représentation est dite **localement de dimension finie**. Notons qu'une représentation de dimension finie est nécessairement localement de dimension finie mais la réciproque est fausse si Q est infini.

CHAPITRE 3

Théorie d'Auslander-Reiten

Dans ce chapitre, k est un anneau commutatif artinien et \mathcal{C} une catégorie abélienne et k -linéaire. Nous supposons aussi que \mathcal{C} est svelte (le squelette est une petite catégorie).

3.1 Le cas général

Les preuves des énoncés de cette section se retrouvent dans [8]. Nous commençons avec quelques définitions.

On dit qu'un objet X de \mathcal{C} est **fortement indécomposable** si son algèbre d'endomorphisme est une algèbre locale. Dans ce cas, l'algèbre d'endomorphisme $\text{End}_{\mathcal{C}}(X)$ est une algèbre ayant seulement 0 et 1_X comme idempotents. En particulier, X est indécomposable.

Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ est dit **presque scindé à gauche** si

- (1) f n'est pas une section,
- (2) Si $h : X \rightarrow W$ n'est pas une section, alors h se factorise par f .

On dit que f est **minimal presque scindé à gauche** si, de plus, lorsque $h : Y \rightarrow Y$ est tel que $hf = f$, alors h est un isomorphisme. Dualement, un morphisme $g : Y \rightarrow Z$ est dit **presque scindé à droite** si

- (1) g n'est pas une rétraction,
- (2) Si $h : W \rightarrow Z$ n'est pas une rétraction, alors h se factorise par g .

On dit que g est **minimal presque scindé à droite** si, de plus, lorsque $h : Y \rightarrow Y$ est tel que $gh = g$, alors h est un isomorphisme. Voici maintenant la définition principale de la section.

Définition 3.1.1. *Une suite exacte courte non scindée*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

dans \mathcal{C} est dite une **suite d'Auslander-Reiten** ou **suite presque scindée** si X et Z sont fortement indécomposables et g est presque scindé à droite.

On note que la dernière condition de la définition précédente est équivalente à demander que f soit presque scindé à gauche.

Proposition 3.1.2. *Soit*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

une suite exacte non scindée dans \mathcal{C} avec X et Z fortement indécomposables. Alors f est presque scindé à gauche si et seulement si g est presque scindé à droite.

Dans la définition 3.1.1, puisque X et Z sont fortement indécomposables, on a en fait que f est minimal presque scindé à gauche et g est minimal presque scindé à droite. Maintenant, nous avons l'énoncé suivant qui, essentiellement, donne l'unicité des suites presque scindées.

Proposition 3.1.3. *Soit Z un objet fortement indécomposable. S'il existe dans \mathcal{C} deux suites presque scindées se terminant (ou commençant) en Z , alors ces deux suites sont isomorphes.*

Rappelons qu'un morphisme $u : M \rightarrow N$ de \mathcal{C} est dit **irréductible** s'il n'est ni une section ni une rétraction et toute décomposition $u = vw$ donne que w est une section ou v est une rétraction. On peut vérifier que si $f : X \rightarrow Y$ est minimal presque scindé à gauche dans \mathcal{C} , alors f est irréductible. De plus, si $Y = Y_1 \oplus Y_2$ et $f = (f_1, f_2)^T$ est la décomposition correspondante de f , alors f_1 et f_2 sont également irréductibles. On a les résultats duals pour un morphisme minimal presque scindé à droite.

3.2 Le cas des algèbres d'Artin

Dans cette courte section, nous rappelons quelques faits à propos des suites presque scindées de $\text{mod}(A)$ lorsque A est une algèbre d'Artin. Tous les énoncés de cette section se retrouvent dans [9]. Remarquons que la catégorie $\text{mod}(A)$ est une catégorie abélienne, k -linéaire telle que tout objet indécomposable est fortement indécomposable. Les propositions de la section précédente s'appliquent donc.

Tout d'abord, voici un théorème d'existence.

Théorème 3.2.1. *On a les énoncés suivants.*

- (a) *Si Y est un module indécomposable non injectif de $\text{mod}(A)$, alors il existe une suite presque scindée*

$$0 \rightarrow Y \rightarrow E \rightarrow X \rightarrow 0$$

dans $\text{mod}(A)$ avec X non projectif. Si Y est injectif indécomposable, alors la projection canonique $Y \rightarrow Y/\text{soc}(Y)$ est minimale presque scindée à gauche.

(b) Si X est un module indécomposable non projectif, alors il existe une suite presque scindée

$$0 \rightarrow Y \rightarrow E \rightarrow X \rightarrow 0$$

dans $\text{mod}(A)$ avec Y non injectif. Si X est projectif indécomposable, alors l'inclusion canonique $\text{rad}(X) \rightarrow X$ est minimale presque scindée à droite.

Si X est un module indécomposable non projectif, alors le module Y du théorème est obtenu comme suit. On considère d'abord le foncteur de transposition Tr qui est défini de $\underline{\text{mod}}(A)$ vers $\overline{\text{mod}}(A^{\text{op}})$ de la façon suivante. Étant donné un module M , on prend une présentation projective minimale $p_M : P_1 \rightarrow P_0$ de M et on applique le foncteur $\text{Hom}_A(-, A)$ pour obtenir $\text{Hom}_A(p_M, A)$. On prend ensuite le conoyau de ce morphisme, que l'on note $\text{Tr}(M)$. On définit Tr sur les morphismes de la façon suivante. Si $f : M \rightarrow N$ est un morphisme et $p_N : P'_1 \rightarrow P'_0$ est une présentation projective minimale de N , alors f induit un morphisme (f_1, f_0) de p_M vers p_N en utilisant les propriétés des modules projectifs. Le morphisme $\text{Tr}(f)$ est obtenu par passage aux conoyaux de $(\text{Hom}_A(f_1, A), \text{Hom}_A(f_0, A))$. Il est à noter que Tr n'est pas un foncteur de $\text{mod}(A)$ vers $\text{mod}(A^{\text{op}})$. On peut vérifier, cependant, que c'est bien un foncteur de $\underline{\text{mod}}(A)$ vers $\overline{\text{mod}}(A^{\text{op}})$. Maintenant, le foncteur composé $\tau = D\text{Tr}$ où $D = \text{Hom}_k(-, U(k))$ est la dualité standard, est un foncteur de $\underline{\text{mod}}(A)$ vers $\overline{\text{mod}}(A)$. Dans le théorème précédent, on a $\tau X \cong Y$. On peut vérifier que le foncteur τ est en fait une équivalence entre $\underline{\text{mod}}(A)$ et $\overline{\text{mod}}(A)$.

Théorème 3.2.2. *Le foncteur τ est une équivalence de $\overline{\text{mod}}(A)$ vers $\underline{\text{mod}}(A)$ dont le foncteur quasi-inverse, noté τ^- , est obtenu en prenant la construction duale de τ .*

3.3 Carquois d'Auslander-Reiten

Dans cette section, on se fixe \mathcal{C} une catégorie abélienne, k -linéaire et Hom-finie, c'est-à-dire que si $X, Y \in \mathcal{C}$, alors $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ est de longueur finie sur k . En particulier, \mathcal{C} est une catégorie de **Krull-Schmidt**, c'est-à-dire une catégorie k -linéaire dans laquelle tout objet X se décompose de façon unique, à isomorphisme près, en une somme directe finie d'objets indécomposables. Notons que si $X \in \mathcal{C}$ est indécomposable, alors $\text{End}_{\mathcal{C}}(X)$ étant de longueur finie sur k doit être une algèbre locale dont le radical est nilpotent. Étant donné deux objets indécomposables $X, Y \in \mathcal{C}$, on note $\text{rad}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ les morphismes de \mathcal{C} qui sont dans le radical de la catégorie \mathcal{C} , c'est-à-dire les non-isomorphismes de \mathcal{C} . On note $\text{Irr}(X, Y)$ l'espace quotient $\text{rad}_{\mathcal{C}}(X, Y)/\text{rad}_{\mathcal{C}}^2(X, Y)$. Il est bien connu que $f \in \text{rad}_{\mathcal{C}}^2(X, Y)$ si et seulement si f se factorise comme $f = gh$ où h n'est pas une section et g n'est pas une rétraction. Ainsi, si $\bar{f} \in \text{Irr}(X, Y)$ est non nul, alors f est un morphisme irréductible de X vers Y . Pour un objet indécomposable Z , on note $k_Z = \text{End}_{\mathcal{C}}(Z)/\text{rad}(\text{End}_{\mathcal{C}}(Z))$ le corps résiduel de Z . Le k -module $\text{Irr}(X, Y)$ est en fait un $k_Y - k_X$ bimodule. On note d_{XY} la dimension de $\text{Irr}(X, Y)$ en tant que k_Y -module et d'_{XY} sa dimension en tant que k_X -module.

Le **carquois d'Auslander-Reiten** de \mathcal{C} , noté $\Gamma_{\mathcal{C}}$, est obtenu de la façon suivante. L'ensemble des sommets du carquois est un ensemble complet de représentants des classes d'isomorphisme des objets indécomposables de \mathcal{C} . Étant donné deux objets indécomposables X, Y de \mathcal{C} , il y a une flèche de X vers Y si et seulement si $\text{Irr}(X, Y) \neq 0$. À cette flèche, disons α , on attache le couple d'entiers (d_{XY}, d'_{XY}) appelé la valuation de α .

On dit que \mathcal{C} a des **suites presque scindées à droite** si pour tout objet indécomposable non projectif $X \in \mathcal{C}$, \mathcal{C} admet une suite presque scindée

$$0 \rightarrow Y \rightarrow E \rightarrow X \rightarrow 0.$$

De plus, on demande que si X est projectif indécomposable, alors il existe un morphisme

$W \rightarrow X$ qui est minimal presque scindé à droite. Étant irréductible, ce morphisme doit être un monomorphisme. Dualement, on dit que \mathcal{C} a des **suites presque scindées à gauche** si pour tout objet indécomposable non injectif $Y \in \mathcal{C}$, \mathcal{C} admet une suite presque scindée

$$0 \rightarrow Y \rightarrow E \rightarrow X \rightarrow 0.$$

De plus, on demande que si Y est injectif indécomposable, alors il existe un morphisme $Y \rightarrow W$ qui est minimal presque scindé à gauche. Étant irréductible, ce morphisme doit être un épimorphisme.

On dit que la catégorie \mathcal{C} **admet des suites presque scindées** si elle admet des suites presque scindées à gauche et à droite.

Les preuves des affirmations suivantes se trouvent dans [9, chapitre 7] dans le cas où la catégorie \mathcal{C} est $\text{mod}(A)$ avec A une algèbre d'Artin. Cependant, les preuves s'appliquent aussi dans notre cas.

Supposons maintenant que \mathcal{C} admette des suites presque scindées à droite. Soit X un objet indécomposable non projectif et

$$0 \rightarrow Z \rightarrow Y \rightarrow X \rightarrow 0$$

une suite presque scindée. Si E est indécomposable, alors $\text{Irr}(E, X) \neq 0$ si et seulement si E est un facteur direct de Y . De plus, l'exposant de E dans Y est donné par l'entier $d'_{EX} = \dim_{k_E}(\text{Irr}(E, X))$. Dualement, on vérifie que $\text{Irr}(Z, E) \neq 0$ si et seulement si E est un facteur direct de Y . De plus, l'exposant de E dans Y est $d_{ZE} = \dim_{k_E}(\text{Irr}(Z, E))$. Par conséquent, la valuation (d_{ZE}, d'_{ZE}) de $Z \rightarrow E$ et la valuation (d_{EX}, d'_{EX}) de $E \rightarrow X$ sont telles que $d'_{EX} = d_{ZE}$. De même, si X est indécomposable projectif, alors le morphisme minimal presque scindé à droite $W \rightarrow X$ donne les morphismes irréductibles se terminant en X .

On dit qu'un objet indécomposable X de \mathcal{C} est **quasi-injectif** si X n'admet pas de suite presque scindée commençant en X dans \mathcal{C} . Un tel objet n'est pas nécessairement injectif. On verra plusieurs exemples de ce fait dans le chapitre 6. Si X est indécomposable et non projectif et que

$$0 \rightarrow Z \rightarrow Y \rightarrow X \rightarrow 0$$

est presque scindée, on pose $\tau X = Z$. Remarquons que les sommets quasi-injectifs de $\Gamma_{\mathcal{C}}$ sont les sommets pour lesquels il n'existe pas d'objet indécomposable Y dans \mathcal{C} tel que $\tau Y = X$. En utilisant l'unicité d'une suite presque scindée, on obtient que τ est une bijection allant des sommets non projectifs du carquois $\Gamma_{\mathcal{C}}$ vers les sommets qui ne sont pas quasi-injectifs dans $\Gamma_{\mathcal{C}}$. On obtient ainsi que $(\Gamma_{\mathcal{C}}, \tau)$ est un **carquois à translation valué**. En effet, si X est indécomposable non projectif, le nombre de prédécesseurs immédiats de X est fini et est égal au nombre de successeurs immédiats de τX et les valuations sont compatibles, comme montré ci-haut. Pour de plus amples informations sur les carquois à translation, le lecteur est invité à consulter [14].

Maintenant, si k est un corps algébriquement clos, les corps résiduels des objets indécomposables sont tous isomorphes à k . Les valuations des flèches du carquois sont donc toutes de la forme (a, a) pour un entier positif a . Nous disons alors que les valuations sont **symétriques**. Étant donné un carquois à translation valué (Γ, τ) dont toutes les valuations des flèches sont symétriques, on peut lui associer un carquois Γ' non valué tel que $\Gamma'_0 = \Gamma_0$ et pour chaque flèche $x \rightarrow y$ de Γ de valuation (a, a) , on a a flèches dans Γ' de x vers y . Nous utiliserons ceci plus loin dans cette thèse.

Remarquons aussi que le carquois d'Auslander-Reiten de \mathcal{C} peut avoir plus d'une composante connexe (que l'on appelle simplement **composante**). Dans le chapitre 6, nous étudions ces composantes.

CHAPITRE 4

Algèbres strictement stratifiées

Dans [1], la notion d'algèbres strictement stratifiées a été introduite. Ces algèbres se veulent être une généralisation des algèbres standardement stratifiées introduites par Cline, Parshall et Scott dans [16]. Ce sont des algèbres stratifiées telles que définies par ces trois mêmes auteurs. Dans ce chapitre, nous étudions les algèbres strictement stratifiées sur le plan homologique. Nous montrons que le dimension finitiste injective de ces algèbres est toujours finie. Nous montrons ensuite que le déterminant de Cartan vaut un si et seulement si l'algèbre est quasi-héréditaire, ce qui revient à affirmer que l'algèbre soit de dimension globale finie. Nous montrons, finalement, un cas faible de la conjecture forte d'absence de boucles.

Dans ce chapitre, A note une algèbre d'Artin sur un anneau artinien k . Nous supposons, de plus, que A est sobre. Rappelons qu'une algèbre d'Artin A est **sobre** si, lorsque $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ note un ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux de A , on a que les modules projectifs $e_i A$, $1 \leq i \leq n$, sont deux à deux non isomorphes.

4.1 Algèbres stratifiées et standardement stratifiées

Comme mentionné en introduction de ce chapitre, la classe des algèbres d'étude est comprise dans la classe des algèbres stratifiées et contient la classe des algèbres standardement stratifiées. Nous verrons ceci plus loin. Pour l'instant, nous rappelons les définitions des algèbres standardement stratifiées et des algèbres stratifiées.

Définition 4.1.1. *Un idéal bilatère I de A est dit **standardement stratifiant** si $I = AeA$ où e est un idempotent primitif de A , et I est projectif en tant que A -module à droite.*

Voici maintenant la définition d'algèbres standardement stratifiées.

Définition 4.1.2. *Une algèbre A est dite **standardement stratifiée** s'il existe une chaîne*

$$0 = I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_n = A$$

d'idéaux bilatères de A telle que I_{i+1}/I_i est un idéal standardement stratifiant de A/I_i pour $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

Notons qu'une telle chaîne doit nécessairement être de longueur égale au rang du groupe de Grothendieck de A , que nous notons $\text{rg}(K_0(A))$ et que nous supposons égal à $m \geq 1$. En effet, supposons que $I_1 = Ae_1A$ avec e_1 primitif. Soit $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ un ensemble complet d'idempotents primitifs et orthogonaux de A . On vérifie aisément que $\{e_2 + I_1, e_3 + I_1, \dots, e_m + I_1\}$ est un ensemble complet d'idempotents primitifs et orthogonaux de A/I_1 . Ainsi, par récurrence, la longueur n de la chaîne doit être égale à m .

Définition 4.1.3. *Un idéal bilatère I de A est dit **héréditaire** si $I = AeA$ où e est un idempotent primitif de A , I est projectif en tant que A -module à droite et $\text{erad}(A)e = 0$.*

On remarque donc que tout idéal héréditaire est également standardement stratifiant. On peut démontrer (voir [17]), que la condition $e\text{rad}(A)e = 0$ avec le fait que I est projectif en tant que A -module à droite donne que I est également projectif en tant que A -module à gauche. Voici maintenant la définition d'algèbre quasi-héréditaire.

Définition 4.1.4. *Une algèbre A est dite **quasi-héréditaire** s'il existe une chaîne*

$$0 = I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_n = A$$

d'idéaux bilatères de A telle que I_{i+1}/I_i est un idéal héréditaire de A/I_i pour $1 \leq i \leq n-1$.

La notion d'algèbre quasi-héréditaire est fortement liée à la notion d'algèbre standardement stratifiée. En effet, il est bien connu que si A est standardement stratifiée, alors A est quasi-héréditaire si et seulement si la dimension globale de A est finie; voir, par exemple, [38] pour une preuve.

Exemples 4.1.5. *Dans cet exemple, k note un corps.*

(a) *Soit A l'algèbre de carquois lié donnée par le carquois*

$$\begin{array}{ccc} & & \alpha \\ & \curvearrowright & \longrightarrow 2 \\ \gamma & \curvearrowleft & \longleftarrow \beta \\ & & 1 \end{array}$$

et les relations $\gamma^2, \gamma\alpha, \alpha\beta$. On a que l'idéal $I_1 = Ae_1A$ où e_1 note l'idempotent associé au sommet 1 est isomorphe à $e_1A \oplus e_1A$ en tant que A -module à droite. Ainsi, l'idéal I_1 est standardement stratifiant. Maintenant, l'algèbre A/I_1 est simple et donc standardement stratifiée. Ainsi, la chaîne

$$0 = I_0 \subset I_1 \subset I_2 = A$$

est telle que A est standardement stratifiée. Puisque $e_1\text{rad}(A)e_1 \neq 0$ de même que $e_2\text{rad}(A)e_2 \neq 0$, on voit que A n'est pas quasi-héréditaire.

(b) *Soit B l'algèbre de carquois lié donnée par le carquois*

$$\begin{array}{ccc} & & \mu \\ & \curvearrowright & \longrightarrow 2 \\ & \curvearrowleft & \longleftarrow \nu \\ & & 1 \end{array}$$

et la relation $\mu\nu$. On vérifie que Be_1B est isomorphe à $e_1B \oplus e_1B$ en tant que A -module à droite et que $e_1\text{rad}(B)e_1 = 0$. Ceci donne que I_1 est un idéal héréditaire. On vérifie aisément que la chaîne

$$0 = I_0 \subset I_1 \subset I_2 = B$$

est telle que B est quasi-héréditaire.

Notons que d'après la remarque plus haut, A est quasi-héréditaire si et seulement si A^{op} l'est. Cependant, cette affirmation n'est pas valide pour les algèbres standardement stratifiées. Voici maintenant la notion d'idéal stratifiant. Dans ce qui suit, si I est un idéal bilatère de A , nous identifions $\text{Mod}(A/I)$ à la sous-catégorie pleine de $\text{Mod}(A)$ des A -modules M tels que $MI = 0$.

Définition 4.1.6. *Un idéal bilatère I de A est dit **stratifiant** si $I = AeA$ où e est un idempotent primitif de A , et $\text{Ext}_A^i(M, N) \cong \text{Ext}_{A/I}^i(M, N)$ pour tous A/I -modules M et N et tout entier positif i .*

Définition 4.1.7. *Une algèbre A est dite **stratifiée** s'il existe une chaîne*

$$0 = I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_n = A$$

d'idéaux bilatères de A telle que I_{i+1}/I_i est un idéal stratifiant de A/I_i pour $1 \leq i \leq n-1$.

Dans [17], il est montré que tout idéal standardement stratifiant est stratifiant. Ainsi, toute algèbre standardement stratifiée est stratifiée. Dans la prochaine section, nous introduisons la notion d'algèbre strictement stratifiée.

4.2 Algèbres strictement stratifiées

En gardant la même philosophie que dans la section précédente, nous introduisons les algèbres strictement stratifiées en introduisant d'abord la notion d'idéal strictement stra-

tifié. Étant donné une famille F de modules de $\text{mod}(A)$, on note $\mathcal{F}(F)$ la sous-catégorie pleine de $\text{mod}(A)$ des modules admettant une filtration par des modules de F . Autrement dit, $M \in \mathcal{F}(F)$ si et seulement s'il existe une chaîne

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_r = M$$

de sous-modules de M telle que M_{i+1}/M_i est isomorphe à un module de F pour $i = 0, 1, \dots, r - 1$.

Définition 4.2.1. *Un idéal bilatère I de A est dit **strictement stratifiant** si $I = AeA$ avec e un idempotent primitif et s'il existe un module de type finie $\Lambda(e)$ tel que $e'I \in \mathcal{F}(\Lambda(e))$ pour tout idempotent e' de A .*

Dans la définition précédente, on dit que le module $\Lambda(e)$ est le module correspondant à l'idéal I . Cette dernière définition nous donne la notion d'algèbre strictement stratifiée.

Définition 4.2.2. *Une algèbre A est dite **strictement stratifiée** s'il existe une chaîne*

$$0 = I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_n = A$$

d'idéaux bilatères de A telle que I_{i+1}/I_i est un idéal strictement stratifiant de A/I_i pour $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

Remarques 4.2.3. *Voici quelques remarques reliées aux définitions précédentes.*

- (1) *Dans la définition précédente, demander que $I_n/I_{n-1} = A/I_{n-1}$ soit un idéal strictement stratifiant de A/I_{n-1} est équivalent à demander que A/I_{n-1} soit une algèbre locale. En effet, si A/I_{n-1} est un idéal strictement stratifiant de A/I_{n-1} , alors l'algèbre A/I_{n-1} est engendrée par un idempotent primitif et donc doit être locale. Si A/I_{n-1} est locale et engendrée par l'idempotent primitif \bar{e} , alors $\Lambda(\bar{e}) = A/I_{n-1}$ est le module correspondant à l'idéal $A/I_{n-1} = A/I_{n-1} \cdot \bar{e} \cdot A/I_{n-1}$ et donc A/I_{n-1} est un idéal strictement stratifiant de A/I_{n-1} .*

(2) Dans la définition d'idéal strictement stratifiant, puisque

$$eI = eAeA = eA$$

doit être filtré par le module $\Lambda(e)$, on a que $\Lambda(e)$ est un quotient de eA et donc de coiffe simple. Par conséquent, $\Lambda(e)$ est indécomposable.

(3) Finalement, soit $I = AeA$ un idéal standardement stratifiant avec e un idempotent primitif. Posons $\Lambda(e) = eA$. Pour tout idempotent f de A , $fI = fAeA$ est projectif puisque facteur direct de I . De plus, fI a une coiffe isomorphe à une somme directe de copies du module simple en l'idempotent e . Ainsi, fI est isomorphe à une somme directe de copies de eA , ce qui donne $fI \in \mathcal{F}(\Lambda(e))$. On voit donc que tout idéal standardement stratifiant est un idéal strictement stratifiant. Ainsi, toute algèbre standardement stratifiée est une algèbre strictement stratifiée. Nous verrons plus loin (voir le lemme 4.3.2) pourquoi la classe des algèbres strictement stratifiées est incluse dans la classe des algèbres stratifiées.

Avant de pousser l'étude, remarquons les faits suivants.

- (1) Toute algèbre locale est strictement stratifiée,
- (2) Si on a une chaîne comme dans la définition précédente, alors l'algèbre A/I_1 est strictement stratifiée puisque

$$0 = I_1/I_1 \subset I_2/I_1 \subset \cdots \subset I_n/I_1 = A/I_1$$

satisfait à la condition dans la définition d'algèbre strictement stratifiée.

Ceci dit, nous avons que A est strictement stratifiée précisément lorsque A est locale ou lorsqu'il existe un idempotent primitif e de A tel que

- (1) AeA est un idéal strictement stratifiant de A ,
- (2) A/AeA est une algèbre strictement stratifiée.

Exemple 4.2.4. Soit k un corps et considérons l'algèbre $A = kQ/I$ où Q est le carquois :

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\alpha} & \\ \gamma_1 \curvearrowright 1 & & 2 \curvearrowright \gamma_2 \\ & \xleftarrow{\beta} & \end{array}$$

et I est l'idéal engendré par les éléments suivants : $\gamma_2^2, \gamma_1^2, \gamma_1\alpha, \gamma_2\beta, \alpha\beta\alpha, \beta\gamma_1$. Notons e_1 et e_2 les idempotents primitifs associés aux sommets 1 et 2 du carquois, respectivement. La structure des modules projectifs indécomposables est donnée par les schémas suivants.

$$A = \begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & \diagdown & \diagup 2 \\ & 2 & \diagdown 1 \end{array} \oplus \begin{array}{ccc} & 2 & \\ 2 & \diagdown & \diagup 1 \\ & 2 & \diagdown 1 \end{array}$$

Soit le sous-espace $\Lambda(e_2) = k \langle \beta\alpha, \beta\alpha\gamma_2, \beta\alpha\beta \rangle$ de e_2A . On vérifie directement que $\Lambda(e_2)$ est un A -module à droite tel que $e_1Ae_2A, e_2Ae_2A \in \mathcal{F}(\Lambda(e_2))$. Ainsi, Ae_2A est un idéal strictement stratifiant de A . De plus, A/Ae_2A est strictement stratifiée puisque c'est une algèbre locale. Par conséquent, A est strictement stratifiée. Notons que dans ce cas, ni A ni A^{op} n'est standardement stratifiée.

4.3 Quelques lemmes préparatoires

Dans cette section, nous regroupons quelques résultats qui nous seront utiles plus loin. Nous gardons les mêmes hypothèses que celles des sections antérieures de ce chapitre. Étant donné un idempotent primitif e de A , on note \mathcal{P}_e la sous-catégorie pleine de $\text{mod}(A)$ des modules M admettant une résolution projective minimale dans laquelle tous les modules projectifs sont isomorphes à une somme directe finie de copies de eA .

Soient M un A -module dont

$$\cdots P_r \rightarrow P_{r-1} \rightarrow \cdots P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

est une résolution projective minimale. Soit S un A -module simple avec $S = fA/f\text{rad}(A)$ où f est un idempotent primitif de A . Pour $i \geq 1$, on a que

$$\text{Ext}_A^i(M, S) \neq 0$$

si et seulement si fA est un facteur direct de P_i . Ce résultat est bien connu. En utilisant ceci, on a la description suivante de \mathcal{P}_e .

$$\mathcal{P}_e = \{M \in \text{mod}(A) \mid \text{Ext}_A^i(M, S) = 0 \text{ pour tout } i \geq 0 \text{ et tout } S \text{ simple tel que } Se = 0\}.$$

De ce fait, on voit très bien, en utilisant la proposition 1.1.1, que la catégorie \mathcal{P}_e est stable pour les extensions, dans le sens que si on a une suite exacte

$$0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$$

avec $L, N \in \mathcal{P}_e$, alors $M \in \mathcal{P}_e$.

Nous commençons avec un premier lemme. La preuve provient de l'auteur. On peut trouver une preuve alternative dans [1].

Lemme 4.3.1 (Agoston-Dlab-Lukács). *Soient M et N deux modules de $\text{mod}(A)$ tels que $M \in \mathcal{F}(N)$. Alors $M \in \mathcal{P}_e$ si et seulement si $N \in \mathcal{P}_e$.*

Démonstration. La condition $M \in \mathcal{F}(N)$ nous donne une chaîne

$$0 = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_{r-1} \subset L_r = M$$

de sous-modules de M telle que $L_j/L_{j-1} \cong N$ pour $j = 1, 2, \dots, r$. En particulier, $L_1 \cong N$. Supposons que $N \in \mathcal{P}_e$. Comme \mathcal{P}_e est stable pour les extensions, on a $L_2 \in \mathcal{P}_e$. On montre de même, par récurrence, que $L_j \in \mathcal{P}_e$ pour $j = 1, 2, \dots, r$. En particulier, $M \in \mathcal{P}_e$. Supposons maintenant que $M \in \mathcal{P}_e$. Soit S un A -module simple tel que $Se = 0$. Pour montrer que $N \in \mathcal{P}_e$, il suffit de montrer que pour $i \geq 0$, $\text{Ext}_A^i(N, S) = 0$. Nous

montrons, plus généralement, que $\text{Ext}_A^i(L_j, S) = 0$ pour $1 \leq j \leq r$ et $i \geq 0$. Procédons par récurrence sur i . Considérons d'abord le cas où $i = 0$. En appliquant le foncteur $\text{Hom}_A(-, S)$ à

$$\zeta_j : 0 \rightarrow L_{j-1} \rightarrow L_j \rightarrow N \rightarrow 0,$$

on obtient

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(N, S) \rightarrow \text{Hom}_A(L_j, S) \rightarrow \text{Hom}_A(L_{j-1}, S).$$

Puisque $\text{Hom}(L_r, S) = \text{Hom}(M, S) = 0$, car $M \in \mathcal{P}_e$, on obtient que $\text{Hom}_A(N, S) = 0$. Ainsi, les monomorphismes

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(L_j, S) \rightarrow \text{Hom}_A(L_{j-1}, S), \quad j = 1, 2, \dots, r$$

nous donnent que $\text{Hom}_A(L_j, S) = 0$ pour tout j . Supposons maintenant que $i > 0$. En appliquant le foncteur $\text{Hom}_A(-, S)$ à ζ_j , on a

$$\text{Ext}_A^{i-1}(L_{j-1}, S) \rightarrow \text{Ext}_A^i(N, S) \rightarrow \text{Ext}_A^i(L_j, S) \rightarrow \text{Ext}_A^i(L_{j-1}, S).$$

Par récurrence, $\text{Ext}_A^{i-1}(L_{j-1}, S) = 0$. On applique ainsi le même raisonnement que dans le cas $i = 0$ pour obtenir $\text{Ext}_A^i(L_j, S) = 0$ pour tout j . \square

Voici un autre lemme qui se trouve également dans [1]. Nous en donnons une preuve par souci de complétude.

Lemme 4.3.2. *Soit $I = AeA$ un idéal strictement stratifiant de A avec e un idempotent primitif. Alors $I \in \mathcal{P}_e$ et $\text{Ext}_A^i(M, N) \cong \text{Ext}_{A/I}^i(M, N)$ pour tout $i \geq 0$ et tous A/I -modules M et N .*

Démonstration. Selon la définition d'idéal strictement stratifiant, il existe un A -module $\Lambda(e)$ tel que $I \in \mathcal{F}(\Lambda(e))$ et $eI = eA \in \mathcal{F}(\Lambda(e))$. Selon le lemme précédent, on obtient que $I \in \mathcal{P}_e$ puisque $eA \in \mathcal{P}_e$. La seconde partie est démontrée dans [7, théorème 2.1]. \square

Remarquons que la deuxième partie de ce lemme nous indique que tout idéal strictement stratifiant est stratifiant. Ainsi, toute algèbre strictement stratifiée est une algèbre stratifiée. Dans [7], les idéaux stratifiants sont appelés *strong idempotent ideals*.

Nous avons maintenant besoin du lemme suivant qui nous indique qu'il n'y a pas d'extensions non nulles de M par $\Lambda(e)$ lorsque M est de dimension injective finie.

Lemme 4.3.3. *Soit $I = AeA$ un idéal strictement stratifiant avec $\Lambda(e)$ le module correspondant. Si M est un A -module de dimension injective finie, alors $\text{Ext}_A^i(\Lambda(e), M) = 0$ pour tout $i > 0$.*

Démonstration. Comme $eA \in \mathcal{F}(\Lambda(e))$, on a une chaîne

$$0 = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_{n-1} \subset L_n = eA$$

de sous-modules de eA avec des suites exactes courtes

$$\zeta_j : 0 \rightarrow L_j \rightarrow L_{j+1} \rightarrow \Lambda(e) \rightarrow 0, \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Soit r la dimension injective de M . Si $r = 0$, le résultat est évident. Supposons donc que $r > 0$. On doit montrer que $\text{Ext}_A^i(\Lambda(e), M) = 0$ pour $i = 1, 2, \dots, r$. Comme $L_1 \cong \Lambda(e)$, il suffit de montrer que

$$\text{Ext}_A^i(L_j, M) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.1)$$

Nous montrons cela par récurrence sur i , partant de $i = r$ jusqu'à $i = 1$. Appliquons le foncteur $\text{Hom}_A(-, M)$ à ζ_j . On obtient les épimorphismes

$$\text{Ext}_A^r(L_{j+1}, M) \rightarrow \text{Ext}_A^r(L_j, M) \rightarrow 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Comme $\text{Ext}_A^r(L_n, M) = \text{Ext}_A^r(eA, M) = 0$, les épimorphismes ci-haut nous donnent successivement $\text{Ext}_A^r(L_j, M) = 0$ pour $j = n, n-1, \dots, 1$. Supposons maintenant que

$\text{Ext}_A^i(L_j, M) = 0$ pour $j = 1, 2, \dots, n$ et pour $2 \leq i \leq r$. On a, en appliquant le foncteur $\text{Hom}_A(-, M)$, que

$$\text{Ext}_A^{i-1}(L_{j+1}, M) \rightarrow \text{Ext}_A^{i-1}(L_j, M) \rightarrow \text{Ext}_A^i(\Lambda(e), M) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

En utilisant le même raisonnement que plus haut, on obtient que $\text{Ext}_A^{i-1}(L_j, M) = 0$ pour $j = 1, 2, \dots, n$ puisque $\text{Ext}_A^{i-1}(L_n, M) = \text{Ext}_A^{i-1}(eA, M) = 0$. Ceci termine la preuve de l'énoncé (4.1) et donc la preuve du lemme. \square

Nous achevons avec le lemme suivant qui généralise le lemme précédent.

Lemme 4.3.4. *Soit $I = AeA$ un idéal strictement stratifiant avec $\Lambda(e)$ le module correspondant. Si M est un A -module de dimension injective finie et $N \in \mathcal{F}(\Lambda(e))$, alors $\text{Ext}_A^i(N, M) = 0$ pour tout $i > 0$. En particulier, $\text{Ext}_A^i(I, M) = 0$ pour tout $i > 0$.*

Démonstration. Puisque $N \in \mathcal{F}(\Lambda(e))$, on a une chaîne

$$0 = L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_{n-1} \subset L_n = N$$

de sous-modules de N avec des suites exactes courtes

$$\zeta_j : 0 \rightarrow L_j \rightarrow L_{j+1} \rightarrow \Lambda(e) \rightarrow 0, \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

On montre, par récurrence sur r avec $1 \leq r \leq n$, que $\text{Ext}_A^i(L_r, M) = 0$ pour tout entier positif i . Si $r = 1$, $L_r = L_1 = \Lambda(e)$ et le résultat suit du lemme précédent. Supposons que $1 < r \leq n$ et que $\text{Ext}_A^i(L_{r-1}, M) = 0$ pour $i \geq 1$. On a les suites exactes

$$\text{Ext}_A^i(\Lambda(e), M) \rightarrow \text{Ext}_A^i(L_r, M) \rightarrow \text{Ext}_A^i(L_{r-1}, M), \quad i > 0.$$

Selon l'hypothèse de récurrence, $\text{Ext}_A^i(L_{r-1}, M) = 0$. De plus, $\text{Ext}_A^i(\Lambda(e), M) = 0$ en vertu du lemme précédent. Donc, on a bien $\text{Ext}_A^i(L_r, M) = 0$. \square

4.4 Extensions de modules simples

Étant donné une k -algèbre d'Artin A , on s'intéresse à étudier les auto-extensions des A -modules simples. Ce sont les groupes de la forme $\text{Ext}_A^1(S, S)$ où S est un A -module simple. Si k est un corps algébriquement clos, nous savons (voir [9, Page 65]) que l'algèbre sobre de A , Morita équivalente à A , est isomorphe à une algèbre de carquois lié. Soit Q ce carquois. Si S est le A -module simple associé au sommet a de Q , alors $\dim_k(\text{Ext}_A^1(S, S))$ donne le nombre de boucles attachées au sommet a du carquois (pour une preuve, voir [4, page 85]). La conjecture d'absence de boucle dit que si la dimension globale de A est finie, alors $\text{Ext}_A^1(S, S) = 0$ pour tout A -module simple S . Le nom de la conjecture vient du fait que dans le cas où k est un corps algébriquement clos, celle-ci affirme que si la dimension globale de A est finie, alors le carquois Q ne contient aucune boucle. Cette conjecture a été énoncée pour la première fois en 1987 par D. Anick et D. Zacharia et ce, de façon indépendante.

Étonnamment, cette conjecture a été démontrée dans plusieurs cas bien avant avoir été énoncée formellement. Peu après l'apparition de cette conjecture en 1987, D. Zacharia énonça une version encore plus forte de la conjecture :

Conjecture 4.4.1 (Conjecture forte d'absence de boucles). *Si S est un A -module simple de dimension projective finie, alors $\text{Ext}_A^1(S, S) = 0$.*

Toutefois, cette dernière conjecture n'est vérifiée que dans très peu de cas. Elle est vérifiée, par exemple, pour les algèbres bisérielles spéciales (voir [31]) et pour les algèbres monomiales (voir [41]). Le lecteur est invité à consulter l'article de K. Igusa (voir [26]) pour plus de détails concernant cette conjecture.

Nous montrons un cas un peu plus faible de la dernière conjecture pour les algèbres strictement stratifiées.

Proposition 4.4.2. *Soit A une algèbre strictement stratifiée et S un A -module simple. Si les dimensions projective et injective de S sont finies, alors $\text{Ext}_A^1(S, S) = 0$.*

Démonstration. Soit n le rang du groupe de Grothendieck de A , c'est-à-dire le nombre de A -modules simples à isomorphisme près. Nous procédons par récurrence sur n . Comme A est strictement stratifiée, il existe un idempotent primitif e de A tel que $I = AeA$ est un idéal strictement stratifiant de A . Soit alors $\Lambda(e)$ le module correspondant à cet idéal. Si $n = 1$, alors l'algèbre est locale. Il est bien connu que la dimension globale d'une algèbre locale est finie si et seulement si l'algèbre est simple. Le résultat découle directement de ceci. Supposons maintenant que $n > 1$. Dans un premier temps, supposons que $Se \neq 0$, c'est-à-dire que S est la coiffe de eA . Comme $I \in \mathcal{F}(\Lambda(e))$ et que la dimension injective de S est finie, on a, selon le lemme 4.3.4, que

$$\text{Ext}_A^i(I, S) = 0, \quad i > 0.$$

Mais selon le lemme 4.3.2, $I \in \mathcal{P}_e$. Cela implique que $\text{Ext}_A^i(I, S') = 0$, $i \geq 0$, lorsque S' est un A -module simple tel que $S'e = 0$. Ainsi, tous les modules projectifs dans la résolution projective minimale de I sont nuls sauf le module en position 0 qui est une somme directe finie de modules de la forme eA . Ainsi, I est projectif. Selon [32, lemme 3.2], le fait que $I = AeA$ soit projectif combiné au fait que $\text{dp}(I)$ soit fini implique que $\text{Ext}_A^1(S, S) = 0$.

Supposons maintenant que $Se = 0$. Cela donne que S est un A/I -module simple. Puisque la dimension projective de S est finie, il existe un entier positif r tel que $\text{Ext}_A^r(S, -) = 0$ et donc, selon le lemme 4.3.2, que $\text{Ext}_{A/I}^r(S, -) = 0$. Ceci donne que $\text{dp}_{A/I}(S)$ est finie. On montre de même que $\text{di}_{A/I}(S)$ est finie. En utilisant le lemme 4.3.2, on obtient

$$\text{Ext}_A^1(S, S) \cong \text{Ext}_{A/I}^1(S, S)$$

lequel s'annule par hypothèse de récurrence. □

4.5 La dimension finitiste

La **dimension finitiste** (projective) d'une algèbre d'Artin est définie de la façon suivante.

$$\text{findim}(A) = \sup\{\text{dp}(M) \mid M \in \text{mod}(A), \text{dp}(M) < \infty\}.$$

Si la dimension globale de l'algèbre est finie, on a $\text{findim}(A) = \text{dimgl}(A)$. Par contre, dans le cas général, rien n'indique que ce nombre doit être fini. C'est justement l'objet de la conjecture finitiste qui a été énoncée par H. Bass (voir [10]) au début des années 60.

Conjecture 4.5.1 (Conjecture finitiste). *Si A est une algèbre d'Artin, alors $\text{findim}(A)$ est fini.*

Cette conjecture a été vérifiée dans le cas des algèbres monomiales (voir [23]), des algèbres dont le radical à la puissance 3 s'annule (voir [24]) ainsi que dans le cas des algèbres standardement stratifiées (voir [2]). Dans cette section, nous montrons que si A est strictement stratifiée, alors A^{op} a une dimension finitiste finie. Ceci est équivalent à montrer que la **dimension finitiste injective** de A , définie par

$$\text{inj.findim}(A) = \sup\{\text{di}(M) \mid M \in \text{mod}(A), \text{di}(M) < \infty\}$$

est finie lorsque A est strictement stratifiée.

Le résultat suivant sera utile dans la preuve du prochain lemme. Pour une preuve, le lecteur est invité à regarder [7, proposition 2.4].

Lemme 4.5.2 (Auslander-Platzek-Todorov). *Soient e un idempotent de A et M un A -module. Alors $M \in \mathcal{P}_e$ si et seulement si $\text{Ext}_A^i(M, J) = 0$ pour tout $i \geq 0$ et tout A/AeA -module injectif J .*

Le lemme suivant est quelque peu technique mais primordial dans la suite.

Lemme 4.5.3. *Soit $I = AeA$ un idéal strictement stratifiant de A et $M \in \text{mod}(A)$ un module de dimension injective finie. Soit Ω le noyau de la couverture projective de DM . Alors le A -module à gauche $I\Omega = Ae\Omega$ est un module de \mathcal{P}_e .*

Démonstration. Soit $\Lambda(e)$ le module correspondant à l'idéal I de l'énoncé. Posons $N = DM$. Alors N est un A^{op} module de dimension projective finie. Soit

$$\eta : 0 \rightarrow \Omega \rightarrow P \rightarrow N \rightarrow 0$$

une couverture projective de N de noyau Ω . On doit montrer que $I\Omega \in \mathcal{P}_e$. Selon le lemme précédent, pour montrer que $I\Omega \in \mathcal{P}_e$, il suffit de montrer que

$$\text{Ext}_{A^{\text{op}}}^i(I\Omega, D(A/I)) = 0, \quad i \geq 0.$$

Remarquons que le A^{op} -module $D(A/I)$ est annulé par e . De plus, $I\Omega = AeA\Omega$ a une coiffe isomorphe à une somme directe de copies du module simple correspondant à l'idempotent e . Ainsi, $\text{Hom}_{A^{\text{op}}}(I\Omega, D(A/I)) = 0$ et le résultat est vrai pour $i = 0$. Considérons la suite exacte courte

$$\zeta : 0 \rightarrow I\Omega \rightarrow \Omega \rightarrow \Omega/I\Omega \rightarrow 0.$$

Pour $i \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{A^{\text{op}}}^i(\Omega/I\Omega, D(A/I)) &\cong \text{Ext}_A^i(A/I, D(\Omega/I\Omega)) \\ &\cong \text{Ext}_{A/I}^i(A/I, D(\Omega/I\Omega)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

le deuxième isomorphisme étant donné par le lemme 4.3.2, puisque $D(\Omega/I\Omega)$ est un A/I -module. Ainsi, en appliquant le foncteur $\text{Hom}_{A^{\text{op}}}(-, D(A/I))$ à ζ , on obtient

$$\text{Ext}_{A^{\text{op}}}^i(I\Omega, D(A/I)) \cong \text{Ext}_{A^{\text{op}}}^i(\Omega, D(A/I)), \quad i \geq 1.$$

Or ce dernier est isomorphe à $\text{Ext}_A^i(A/I, D\Omega)$. Pour terminer la preuve, on doit donc montrer que $\text{Ext}_A^i(A/I, D\Omega) = 0$ lorsque $i \geq 1$. Or en appliquant le foncteur $\text{Hom}_A(A/I, D(-))$ à η , on a

$$\text{Ext}_A^i(A/I, D\Omega) \cong \text{Ext}_A^{i+1}(A/I, M), \quad i \geq 1.$$

Enfin, en considérant la suite exacte

$$0 \rightarrow I \rightarrow A \rightarrow A/I \rightarrow 0,$$

on en conclut que

$$\text{Ext}_A^{i+1}(A/I, M) \cong \text{Ext}_A^i(I, M), \quad i \geq 1.$$

Or ce dernier s'annule en vertu du lemme 4.3.4 puisque la dimension injective de M est finie. □

La prochaine proposition nous indique le lien qui existe entre la dimension finitiste injective de deux algèbres lorsque l'une d'elle est le quotient de l'autre par un idéal strictement stratifiant. Étant donné un module M , le plus petit entier r tel que $\text{rad}^r(M) = 0$ est appelé la **longueur de Loewy** de M .

Proposition 4.5.4. *Soit $I = AeA$ un idéal strictement stratifiant de A . Si la dimension finitiste injective de A/I est m , alors celle de A est au plus $m + 2$.*

Démonstration. Soit M un module de type fini et de dimension injective finie. Notons Ω le noyau d'une couverture projective de DM . Il suffit de montrer qu'alors $\text{dp}_{A^{\text{op}}}(\Omega) \leq m + 1$. Pour ce faire, soit S un A -module simple tel que $eS = 0$. En vertu du lemme précédent, on a $I\Omega \in \mathcal{P}_e$. Ainsi, $\text{Ext}_{A^{\text{op}}}^i(I\Omega, S) = 0$ pour tout $i \geq 0$. Par conséquent, en appliquant le foncteur $\text{Hom}_{A^{\text{op}}}(-, S)$ à

$$0 \rightarrow I\Omega \rightarrow \Omega \rightarrow \Omega/I\Omega \rightarrow 0,$$

on obtient

$$\mathrm{Ext}_{A^{\mathrm{op}}}^i(\Omega/I\Omega, S) \cong \mathrm{Ext}_{A^{\mathrm{op}}}^i(\Omega, S), \quad i \geq 0.$$

Puisque $\mathrm{dp}_{A^{\mathrm{op}}}(\Omega) = k < \infty$, on a

$$\mathrm{Ext}_{A/I}^i(DS, D(\Omega/I\Omega)) \cong \mathrm{Ext}_A^i(DS, D(\Omega/I\Omega)) \cong \mathrm{Ext}_{A^{\mathrm{op}}}^i(\Omega, S) = 0$$

lorsque $i > k$. Ceci implique que $\mathrm{di}_{A/I}(D(\Omega/I\Omega)) < \infty$ et donc que $\mathrm{di}_{A/I}(D(\Omega/I\Omega)) \leq m$.

D'où

$$\mathrm{Ext}_{A^{\mathrm{op}}}^i(\Omega, S) = 0$$

lorsque $i > m$. Maintenant, soit P_i le terme en position i dans la résolution projective minimale de Ω . La condition obtenue nous donne que P_j est une somme directe de copies de Ae lorsque $j \geq m + 1$. Si $k > m + 1$, alors on a une inclusion

$$\iota : P_k \rightarrow P_{k-1}.$$

Or, $\iota(P_k) \subseteq \mathrm{rad}(P_{k-1})$, ce qui contredit le fait que les longueurs de Loewy de P_k et P_{k-1} doivent être égales. Ceci montre donc que $\mathrm{dp}_{A^{\mathrm{op}}}(\Omega) \leq m + 1$. \square

Cette proposition nous permet d'obtenir, par récurrence, le théorème suivant. Ce théorème est une généralisation de [2, théorème 3.1].

Théorème 4.5.5. *Soit A une algèbre strictement stratifiée. Alors $\mathrm{inj.findim}(A)$ est bornée par $2n - 2$ où n note le rang de $K_0(A)$.*

Démonstration. Procédons par récurrence sur n . Si $n = 1$, alors A est locale et un module de dimension injective finie doit être injectif. Ainsi, $\mathrm{inj.findim}(A) = 0$. Supposons que $n > 0$. Alors il existe un idempotent primitif e de A tel que AeA est strictement stratifiant et A/AeA est strictement stratifiée. Par récurrence, on a $\mathrm{inj.findim}(A/AeA) \leq 2(n-1) - 2$ et donc, selon la proposition précédente,

$$\mathrm{inj.findim}(A) \leq 2(n-1) - 2 + 2 = 2n - 2. \quad \square$$

Remarquons que pour tout entier positif n , il existe une algèbre quasi-héréditaire A_n telle que $\text{rg}(K_0(A_n)) = n$ et $\dim_{\text{gl}}(A_n) = 2n - 2$ (voir [2]). Comme toute algèbre quasi-héréditaire est strictement stratifiée, la borne obtenue dans le théorème précédent est la meilleure possible. Mentionnons qu'il n'est pas connu si la dimension finitiste (projective) d'une algèbre strictement stratifiée est finie. On ne peut pas dualiser les résultats précédents puisque la notion d'algèbre strictement stratifiée n'est pas symétrique : si A est strictement stratifiée, alors A^{op} ne l'est pas nécessairement.

4.6 Le déterminant de Cartan

Dans cette section, nous étudions le déterminant de Cartan d'une algèbre strictement stratifiée. Avant tout, nous rappelons comment calculer le déterminant de Cartan d'une algèbre d'Artin A .

Soit $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ un ensemble complet d'idempotents primitifs et orthogonaux de A . Rappelons que la **matrice de Cartan** de A , relative à E , est donnée par la matrice $C_E = (\ell(e_j A e_i))_{n \times n}$. Comme nous l'avons vu, le terme général $\ell(e_j A e_i)$ correspond au nombre de modules simples $e_i A / e_i \text{rad}(A)$ apparaissant comme facteurs de composition du module $e_j A$. Soit $E' = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ un autre ensemble d'idempotents primitifs et orthogonaux de A . On peut vérifier sans difficulté qu'il existe un élément inversible a de A et une permutation σ de \mathcal{S}_n tels que $f_i = a e_{\sigma(i)} a^{-1}$ pour $i = 1, 2, \dots, n$. Comme, manifestement,

$$\ell(f_j A f_i) = \ell(a e_{\sigma(j)} a^{-1} A a e_{\sigma(i)} a^{-1}) = \ell(e_{\sigma(j)} A e_{\sigma(i)}),$$

on trouve que la matrice $C_{E'} = (\ell(f_j A f_i))_{n \times n}$ est équivalente à la matrice C_E à permutation simultanée près des lignes et des colonnes. On peut donc définir sans ambiguïté le nombre $\text{cd}(A)$ comme étant le déterminant d'une matrice de Cartan de A . On appelle ce

nombre le **déterminant de Cartan** de A .

Voici maintenant l'énoncé de la fameuse conjecture du déterminant de Cartan. C'est D. Zacharia, dans son article [40], qui a explicitement énoncé cette conjecture.

Conjecture 4.6.1 (Conjecture du déterminant de Cartan). *Soit A une algèbre d'Artin. Si la dimension globale de A est finie, alors $\text{cd}(A) = 1$.*

Afin de comprendre la nature de cette conjecture, regardons le résultat suivant, qui est dû à S. Eilenberg. C'est l'énoncé qui est à l'origine de la conjecture. Pour une preuve, on peut consulter, par exemple, [25, Page 53].

Proposition 4.6.2. *Soit A une algèbre d'Artin. Si la dimension globale de A est finie, alors $\text{cd}(A) = \pm 1$.*

L'idée de la preuve de la proposition précédente est de construire un inverse (dans l'anneau des matrices à coefficients entiers) d'une matrice de Cartan de A . Cette matrice étant inversible, son déterminant doit être inversible dans \mathbb{Z} et donc valoir plus un ou moins un.

Jusqu'à présent, personne n'a réussi à trouver une algèbre d'Artin de dimension globale finie dont le déterminant de Cartan vaut moins un, d'où la conjecture. Cette conjecture a été démontrée dans plusieurs cas. Pour une liste presque complète de ces cas, le lecteur est invité à consulter [25] qui résume ce qui est connu concernant cette conjecture jusqu'en 1992. Le lecteur peut également consulter [32].

Revenons maintenant aux algèbres strictement stratifiées. Nous montrons, plus loin, qu'étant donné une algèbre strictement stratifiée A , la condition $\text{cd}(A) = 1$ est équivalente à la condition $\dim_{\text{gl}}(A) < \infty$. Cela généralise un résultat similaire de D.D. Wick pour les algèbres standardement stratifiées, voir [38]. Pour en arriver à notre fin, nous

utilisons des réductions matricielles. Nous commençons par un lemme simple. Rappelons qu'étant donné un module M de $\text{mod}(A)$, $[M]$ note l'élément correspondant dans le groupe $K_0(A)$.

Lemme 4.6.3. *Soient M et N deux A -modules avec $M \in \mathcal{F}(N)$. Alors il existe un entier non négatif a tel que $[M] = a[N]$.*

Démonstration. L'hypothèse nous donne une chaîne

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$$

de sous-modules de A telle que $M_{i+1}/M_i \cong N$ pour $0 \leq i \leq n-1$. Ceci donne donc $[N] + [M_i] = [M_{i+1}]$ pour $0 \leq i \leq n-1$. On a donc $[M] = n[N]$. \square

Pour pouvoir calculer le déterminant de Cartan d'une algèbre strictement stratifiée, nous devons trouver un lien entre $\text{cd}(A)$ et $\text{cd}(A/I)$ lorsque I est un idéal strictement stratifiant. Ce lien est obtenu au moyen de la proposition suivante. Par convention, nous posons $\text{cd}(0) = 1$.

Proposition 4.6.4. *Soit $I = AeA$ un idéal strictement stratifiant de A . On a*

$$\text{cd}(A) = \text{cd}(eAe) \cdot \text{cd}(A/I).$$

Démonstration. Nous procédons par récurrence sur le rang n de $K_0(A)$. Si $n = 1$, $I = A$ et $eAe = A$. Le résultat est évident dans ce cas. Supposons que $n > 1$. Soit $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ un ensemble complet d'idempotents primitifs et orthogonaux de A . Notons C la matrice de Cartan relative à cet ensemble. La colonne j de C est le vecteur $[e_j A]$. Sans perte de généralité, supposons que $e = e_n$. Notons $\Lambda(e_n)$ le module quotient de $e_n A$ associé à $I = Ae_n A$. Comme I est strictement stratifiant, on a

$$e_j I \in \mathcal{F}(\Lambda(e_n)), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Par conséquent, le lemme 4.6.3 nous indique qu'il existe un entier non négatif a_j tel que

$$[e_j I] = a_j [\Lambda(e_n)], \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Posons alors $\alpha_j = a_j/a_n$, $j = 1, 2, \dots, n-1$. Les deux relations $[e_j I] = a_j [\Lambda(e_n)]$ et $[e_n A] = [e_n I] = a_n [\Lambda(e_n)]$ donnent

$$[e_j I] = \alpha_j [e_n A], \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

On obtient ainsi que

$$[e_j A] = [e_j I] + [e_j A/e_j I] = \alpha_j [e_n A] + [e_j A/e_j I], \quad j = 1, 2, \dots, n-1. \quad (4.2)$$

Maintenant, $\{e_1 + I, e_2 + I, \dots, e_{n-1} + I\}$ est un ensemble complet d'idempotents primitifs et orthogonaux de A/I . Les A/I -modules projectifs correspondants sont

$$P_j = (e_j + I)A/I = e_j A/e_j I, \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Les équations (4.2) nous donnent alors que la matrice

$$C' = ([P_1] [P_2] \cdots [P_{n-1}] [e_n A])$$

est obtenue de la matrice C en effectuant des opérations élémentaires sur les colonnes de C . Ainsi,

$$\text{cd}(A) = \det(C').$$

Remarquons que la dernière ligne de la matrice C' est nulle sauf l'élément en position n qui vaut $\ell(e_n A e_n)$. Par conséquent, en développant le déterminant de C' selon la dernière ligne, on obtient

$$\det(C') = \ell(e_n A e_n) \text{cd}(A/I) = \text{cd}(e_n A e_n) \cdot \text{cd}(A/I).$$

□

On a le corollaire suivant.

Corollaire 4.6.5. *Si A est strictement stratifiée, alors son déterminant de Cartan est positif.*

Démonstration. Soit n le rang de $K_0(A)$. Si $n = 1$, le déterminant de Cartan de A est la longueur de A en tant que k -module, donc positif. Si $n > 1$, on utilise le résultat précédent combiné à une simple récurrence. \square

Avant d'énoncer le théorème principal, nous avons besoin de cette proposition, qui peut être obtenue à partir de [1, théorème 1.9].

Proposition 4.6.6 (Agoston-Dlab-Lukács). *Soit A une algèbre strictement stratifiée. Alors la dimension globale de A est finie si et seulement si A est quasi-héréditaire.*

Le théorème suivant montre, en particulier, que la conjecture du déterminant de Cartan est vérifiée pour les algèbres strictement stratifiées. Notons qu'on a un énoncé similaire pour les algèbres quasi-stratifiées dans [32].

Théorème 4.6.7. *Soit A une algèbre strictement stratifiée. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) $\dim_{\text{gl}}(A) < \infty$,
- (b) A est quasi-héréditaire,
- (c) $\text{cd}(A) = 1$.

Démonstration. L'équivalence des deux premiers énoncés résulte de la proposition précédente. Le déterminant de Cartan d'une algèbre quasi-héréditaire est toujours un. Pour une preuve de cet énoncé, le lecteur est invité à regarder [32, théorème 2,5]. Il reste donc à montrer que (c) implique (b). Nous procédons par récurrence sur $n = \text{rg}(K_0(A))$. Si

$n = 1$, la condition $\text{cd}(A) = 1$ donne que l'algèbre est simple donc quasi-héréditaire. Supposons donc que $n > 1$. Soit $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ un ensemble complet d'idempotents primitifs et orthogonaux de A . Sans perte de généralité, on peut supposer que $I = Ae_nA$ est un idéal strictement stratifiant de A tel que A/I est une algèbre strictement stratifiée. Soit $\Lambda(e_n)$ le module correspondant à cet idéal. Puisque $e_nA \in \mathcal{F}(\Lambda(e_n))$, le lemme 4.6.3 nous donne $[e_nA] = a[\Lambda(e_n)]$ pour un entier positif a . La condition donne

$$\begin{aligned} 1 &= \text{cd}(A) \\ &= \det \left([e_1A] \ [e_2A] \ \cdots \ [e_{n-1}A] \ [e_nA] \right) \\ &= a \cdot \det \left([e_1A] \ [e_2A] \ \cdots \ [e_{n-1}A] \ [\Lambda(e_n)] \right). \end{aligned}$$

Ainsi, $a = 1$ et donc, $\Lambda(e_n) = e_nA$. La condition $I \in \mathcal{F}(\Lambda(e_n)) = \mathcal{F}(e_nA)$ donne que I est projectif. Maintenant, selon la proposition 4.6.4, on a

$$1 = \text{cd}(A) = \text{cd}(e_nAe_n) \cdot \text{cd}(A/I)$$

ce qui donne $\text{cd}(e_nAe_n) = \text{cd}(A/I) = 1$ puisque $\text{cd}(e_nAe_n)$ est positif. La condition $\text{cd}(e_nAe_n) = 1$ donne $\ell(e_nAe_n) = 1$ et donc que $e_n\text{rad}(A)e_n = 0$. Ainsi, I est un idéal héréditaire. Selon l'hypothèse de récurrence, $\text{cd}(A/I) = 1$ donne que A/I est quasi-héréditaire. Ainsi, le fait que I soit héréditaire avec le fait que A/I soit quasi-héréditaire donne que A est quasi-héréditaire. \square

CHAPITRE 5

Catégories stables de modules

Dans ce chapitre, nous étudions certaines catégories quotients de la catégorie de modules $\text{mod}(A)$ lorsque A est une k -algèbre d'Artin connexe avec k un anneau artinien. Nous commençons par une section dans laquelle nous faisons un bref rappel de notions concernant les catégories triangulées.

5.1 Notions de catégories triangulées

Les catégories abéliennes sont bien connues et sont très utiles en théorie des représentations des algèbres. Par exemple, les catégories $\text{Mod}(A)$ et $\text{mod}(A)$ sont abéliennes. Cependant, plusieurs catégories ne sont pas abéliennes mais admettent tout de même une structure intéressante. C'est le cas, par exemple, de $D^b(\text{mod}(A))$, la catégorie dérivée bornée de $\text{mod}(A)$. Il est bien connu que cette dernière est une catégorie triangulée. Nous commençons avec la définition de catégories triangulées.

Soit \mathcal{C} une catégorie k -linéaire et T un automorphisme de \mathcal{C} . On appelle (X, Y, Z, f, g, h) un **sextuplet** si X, Y, Z sont des objets de \mathcal{C} et $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ et $h : Z \rightarrow T(X)$.

Étant donné deux sextuplets $T_1 = (X, Y, Z, f, g, h)$ et $T_2 = (X', Y', Z', f', g', h')$, un morphisme $u : T_1 \rightarrow T_2$ est un triplet (u_1, u_2, u_3) avec $u_1 : X \rightarrow X'$, $u_2 : Y \rightarrow Y'$ et $u_3 : Z \rightarrow Z'$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & T(X) \\ \downarrow u_1 & & \downarrow u_2 & & \downarrow u_3 & & \downarrow T(u_1) \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & T(X') \end{array}$$

commute.

On dit que u est un **isomorphisme** si u_i est un isomorphisme pour $i = 1, 2, 3$. Maintenant, on dit qu'une classe \mathcal{T} de sextuplets (dont les éléments sont appelés **triangles**) est une **triangulation** de \mathcal{C} si les quatre axiomes suivants sont vérifiés :

- (TR1) Un sextuplet isomorphe à un triangle est un triangle. Étant donné un morphisme $f : X \rightarrow Y$ de \mathcal{C} , il existe un triangle de la forme (X, Y, Z, f, g, h) dans \mathcal{T} . De plus, le sextuplet $(X, X, 0, 1_X, 0, 0)$ est un triangle pour tout $X \in \mathcal{C}$.
- (TR2) Si (X, Y, Z, f, g, h) est un triangle, alors $(Y, Z, T(X), g, h, -T(f))$ est également un triangle.
- (TR3) Si (X, Y, Z, f, g, h) et (X', Y', Z', f', g', h') sont deux triangles et $u_1 : X \rightarrow X'$, $u_2 : Y \rightarrow Y'$ sont tels que $u_2 f = f' u_1$, alors il existe un morphisme $u_3 : Z \rightarrow Z'$ tel que (u_1, u_2, u_3) est un morphisme de triangles.
- (TR4) Soient $u : X \rightarrow Y$ et $v : Y \rightarrow Z$ deux morphismes inclus dans les triangles (X, Y, Z', u, g, h) et (Y, Z, X', v, g', h') . Soit (X, Z, Y', vu, g'', h'') un triangle incluant le morphisme vu . Alors il existe des morphismes $\alpha : Z' \rightarrow Y'$ et $\beta : Y' \rightarrow X'$ tels

que le diagramme suivant commute et dont la troisième ligne est un triangle.

$$\begin{array}{ccccccc}
T^{-1}(Y') & \xrightarrow{T^{-1}(h'')} & X & \xlongequal{\quad} & X & & \\
\downarrow T^{-1}(\beta) & & \downarrow u & & \downarrow vu & & \\
T^{-1}(X') & \xrightarrow{T^{-1}(h')} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{g'} & X' \xrightarrow{h'} T(Y) \\
& & \downarrow g & & \downarrow g'' & & \parallel & \downarrow T(g) \\
& & Z' & \xrightarrow{\alpha} & Y' & \xrightarrow{\beta} & X' & \xrightarrow{T(g)h'} T(Z') \\
& & \downarrow h & & \downarrow h'' & & & \\
& & T(X) & \xlongequal{\quad} & T(X) & & &
\end{array}$$

Dans la suite, nous dirons qu'une catégorie \mathcal{C} est **pré-triangulée** si elle admet un automorphisme T et une triangulation \mathcal{T} et satisfait aux axiomes (TR1), (TR2) et (TR3). Nous avons le lemme suivant dont la preuve se trouve dans [22].

Lemme 5.1.1. *Soit (X, Y, Z, f, g, h) un triangle dans une catégorie pré-triangulée \mathcal{C} . Les conditions suivantes sont équivalentes.*

- (a) f est une section,
- (b) g est une rétraction,
- (c) $h = 0$.

5.2 Définition des catégories stables

Dans cette section, nous faisons un rappel de la notion de catégories stables. On note \mathcal{C} une catégorie k -linéaire et abélienne.

Soit $f : M \rightarrow N$ et

$$\eta : 0 \rightarrow L \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow 0$$

un élément de $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(N, L)$. Alors $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(f, L)(\eta)$ note la suite exacte courte de $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(M, L)$ qui est obtenue en effectuant le produit fibré de f et du morphisme $N' \rightarrow N$. Si

la catégorie \mathcal{C} admet suffisamment d'objets projectifs et injectifs, alors le morphisme $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(f, L) : \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(N, L) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(M, L)$ correspond à la construction classique telle que détaillée dans [3]. Ces deux constructions coïncident toujours, voir [33]. D'une façon duale, on peut construire $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(L, f)$ avec une somme amalgamée.

Un morphisme $f : M \rightarrow N$ de \mathcal{C} est dit **projectivement trivial** si l'on a $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(f, L) = 0$ pour tout $L \in \mathcal{C}$. De même, on dit que $f : M \rightarrow N$ est **injectivement trivial** si l'on a $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(L, f) = 0$ pour tout $L \in \mathcal{C}$. Étant donné deux objets X et Y de \mathcal{C} , on note $P(X, Y)$ l'ensemble des morphismes projectivement triviaux de X vers Y et $I(X, Y)$ l'ensemble des morphismes injectivement triviaux de X vers Y . Il est à noter que P et I forment des idéaux de \mathcal{C} . On note $\underline{\mathcal{C}}$ pour la catégorie \mathcal{C}/P et $\overline{\mathcal{C}}$ pour \mathcal{C}/I .

Dans [27], on montre que si la catégorie \mathcal{C} admet suffisamment d'objets projectifs, alors un morphisme est projectivement trivial si et seulement s'il se factorise par un objet projectif. On obtient donc que la catégorie stable $\underline{\mathcal{C}}$ est la catégorie \mathcal{C} modulo les morphismes qui se factorisent par des objets projectifs. Dualement, si la catégorie \mathcal{C} admet suffisamment d'objets injectifs, alors un morphisme est injectivement trivial si et seulement s'il se factorise par un objet injectif. On obtient donc que la catégorie stable $\overline{\mathcal{C}}$ est la catégorie \mathcal{C} modulo les morphismes qui se factorisent par des objets injectifs.

5.3 Les algèbres stablement triangulées

Comme nous l'avons vu, la catégorie $\text{mod}(A)$ contient suffisamment d'objets projectifs et injectifs lorsque A est une algèbre d'Artin. Ainsi, les catégories stables de la section précédente correspondent aux catégories stables usuelles.

Rappelons qu'une algèbre B est stablement équivalente à une algèbre A si les catégories $\overline{\text{mod}}(B)$ et $\overline{\text{mod}}(A)$ sont équivalentes. Dans [22], il est démontré que si A est une algèbre

stablement équivalente à une algèbre auto-injective, alors $\overline{\text{mod}}(A) \cong \underline{\text{mod}}(A)$ est une catégorie triangulée, dont nous ne spécifions pas la triangulation \mathcal{T} et l'automorphisme T . Pour plus de détails sur la structure triangulée de $\underline{\text{mod}}(A)$, le lecteur est invité à consulter [22]. L'objectif de cette section est d'établir la réciproque de l'énoncé de [22].

Nous commençons par la notion de pseudo-noyaux et pseudo-conoyaux. Soit \mathcal{C} une catégorie additive (mais pas nécessairement abélienne) et $f : L \rightarrow M, g : M \rightarrow N$ deux morphismes de \mathcal{C} . On dit que f est un **pseudo-noyau** de g si l'on a une suite exacte

$$\text{Hom}(X, L) \xrightarrow{\text{Hom}(X, f)} \text{Hom}(X, M) \xrightarrow{\text{Hom}(X, g)} \text{Hom}(X, N)$$

pour tout X dans \mathcal{C} . Dualement, g est un **pseudo-conoyau** de f si l'on a une suite exacte

$$\text{Hom}(N, X) \xrightarrow{\text{Hom}(g, X)} \text{Hom}(M, X) \xrightarrow{\text{Hom}(f, X)} \text{Hom}(L, X)$$

pour tout X dans \mathcal{C} . Cela nous permet de définir la notion de catégorie faiblement abélienne.

Définition 5.3.1. *On dit que \mathcal{C} est **faiblement abélienne** si tout morphisme f admet un pseudo-noyau et un pseudo-conoyau et, de plus, f est un pseudo-noyau d'un certain morphisme g et un pseudo-conoyau d'un certain morphisme h .*

Nous commençons l'investigation avec ce lemme.

Lemme 5.3.2. *Soit $0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$ une suite presque scindée de $\text{mod}(A)$. Si $\overline{\text{mod}}(A)$ est faiblement abélienne, alors on a les énoncés suivants.*

- (a) *Si N est injectif, alors M est injectif,*
- (b) *Si L est projectif, alors M est projectif.*
- (c) *M est injectif si et seulement si M est projectif.*

Démonstration. Supposons que $\overline{\text{mod}}(A)$ est faiblement abélienne. Étant donné un morphisme $e : X \rightarrow Y$ de $\text{mod}(A)$, on note $\bar{e} : X \rightarrow Y$ le morphisme correspondant de $\overline{\text{mod}}(A)$. Supposons que N est injectif et que M ne l'est pas. On peut ainsi écrire $M = M_1 \oplus M_2$ avec M_1 indécomposable et non injectif. Nous avons les décompositions correspondantes $f = (f_1, f_2)^T$ et $g = (g_1, g_2)$. Comme $\overline{\text{mod}}(A)$ est faiblement abélienne, soit $\bar{h} : M_1 \rightarrow E$ un morphisme tel que \bar{f}_1 est un pseudo-noyau de \bar{h} . On a alors $\bar{h} \bar{f}_1 = \bar{0}$, ce qui donne que $hf_1 = vu$, où $u : L \rightarrow I$ et $v : I \rightarrow E$ sont des morphismes de $\text{mod}(A)$ avec I injectif. Comme L n'est pas injectif, u n'est pas une section. Par conséquent, il existe un morphisme $(w_1, w_2) : M_1 \oplus M_2 \rightarrow I$ tel que $u = (w_1, w_2)f$. Ainsi, $hf_1 = vw_1f_1 + vw_2f_2$, ce qui donne $(vw_1 - h, vw_2)(f_1, f_2)^T = 0$. Cela donne un morphisme $w : N \rightarrow E$ tel que $(vw_1 - h, vw_2) = w(g_1, g_2)$. Comme N est injectif, on obtient $\bar{h} = \bar{v}\bar{w}_1 - \bar{w}_2\bar{g}_1 = \bar{0}$. Étant un pseudo-noyau de $\bar{h} = \bar{0}$, \bar{f}_1 est une rétraction dans $\overline{\text{mod}}(A)$. En effet, comme $\bar{h}\bar{1}_{M_1} = 0$ et que \bar{f}_1 est un pseudo-noyau de \bar{h} , il existe $\bar{s} : M_1 \rightarrow L$ tel que $\bar{1}_{M_1} = \bar{f}_1\bar{s}$. Puisque M_1 est indécomposable, f_1s est soit nilpotent ou un isomorphisme. Dans le premier cas, on obtient que $\bar{1}_{M_1} = 0$ et donc que M_1 est injectif, une contradiction. Dans le deuxième cas, on a que f_1 est une rétraction. Cela contredit le fait que f_1 est irréductible. Cela montre (a). Notons que $\underline{\text{mod}}(A)$ est aussi faiblement abélienne puisque équivalente à $\overline{\text{mod}}(A)$; voir [9, (IV.1.9)]. Donc, (b) est aussi vraie.

Finalement, supposons que M est injectif mais non projectif. Soit N_1 un facteur direct indécomposable de M qui n'est pas projectif. Alors $\text{mod}(A)$ admet une suite presque scindée

$$0 \longrightarrow \tau N_1 \longrightarrow U \longrightarrow N_1 \longrightarrow 0.$$

Comme N_1 est injectif, U est injectif par (a). Ainsi, L , en tant que facteur direct de U , est aussi injectif, ce qui est une contradiction. Cela montre que M est projectif lorsque injectif. De même, il suit de (b) que M est injectif lorsque projectif. \square

Remarquons qu'une catégorie pré-triangulée est faiblement abélienne. En effet, si \mathcal{C} est pré-triangulée et $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme de \mathcal{C} , alors il existe un morphisme $g : Y \rightarrow Z$ avec $Z \in \mathcal{C}$ tel que

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T(X)$$

est un triangle. Il est bien connu (voir [22]) que si $M \in \mathcal{C}$, alors on a des suites exactes induites

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, X) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, Y) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, Z)$$

et

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, M) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, M) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, M)$$

ce qui donne que f est un pseudo-noyau de g et g est un pseudo-conoyau de f . On montre de même que f est un pseudo-conoyau de $T^{-1}(h)$ et que $T^{-1}(h)$ est un pseudo-noyau de f .

Par conséquent, le lemme ci-haut s'applique également si $\overline{\mathrm{mod}}(A)$ est triangulée ou pré-triangulée.

Rappelons qu'une algèbre d'Artin de représentation finie est dite **dirigée** si son carquois d'Auslander-Reiten ne contient pas de cycles orientés. Dans le prochain théorème, la notion d'algèbre de Nakayama dirigée apparaît. Rappelons qu'une algèbre A est dite **de Nakayama** si tous les modules projectifs indécomposables et tous les modules injectifs indécomposables de $\mathrm{mod}(A)$ sont **unisériels**, c'est-à-dire admettent une unique suite de composition.

Définition 5.3.3. *Une algèbre d'Artin A est dite **stablement triangulée** si $\overline{\mathrm{mod}}(A)$ admet une structure de catégorie triangulée. Remarquons que puisque les catégories stables $\overline{\mathrm{mod}}(A)$ et $\underline{\mathrm{mod}}(A)$ sont équivalentes, cela revient à demander que $\underline{\mathrm{mod}}(A)$ admette une structure de catégorie triangulée.*

Maintenant, nous avons ce théorème.

Théorème 5.3.4. *Soit A une algèbre d'Artin. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

- (a) A est stablement triangulée,
- (b) $\overline{\text{mod}}(A)$ admet une structure de catégorie pré-triangulée,
- (c) A est auto-injective ou de Nakayama dirigée de longueur de Loewy deux,
- (d) A est stablement équivalente à une algèbre auto-injective,
- (e) $\overline{\text{mod}}(A)$ est faiblement abélienne.

Démonstration. Supposons que $\overline{\text{mod}}(A)$ est faiblement abélienne et que A n'est pas auto-injective. Soit I un module injectif indecomposable de type fini qui n'est pas projectif. On a alors que $\text{mod}(A)$ admet une suite presque scindée

$$0 \rightarrow \tau I \rightarrow P_1 \rightarrow I \rightarrow 0.$$

Il suit du lemme précédent que P_1 est projectif-injectif. Soit $n > 0$ un entier tel que l'on a une suite presque scindée

$$0 \rightarrow \tau^i I \rightarrow P_i \rightarrow \tau^{i-1} I \rightarrow 0$$

avec P_i projectif-injectif, $i = 1, \dots, n$. D'après [9, (V.3.3)], les modules $\tau^i I$ avec $0 \leq i \leq n$ sont simples. Si deux de ces modules sont isomorphes, alors on obtient une τ -orbite cyclique dans le carquois d'Auslander-Reiten de $\text{mod}(A)$ qui contient I , ce qui est impossible puisque I est injectif. Ainsi, les modules simples $\tau^i I$ avec $0 \leq i \leq n$ sont deux à deux non isomorphes. Par conséquent, les modules P_i , avec $1 \leq i \leq n$, sont aussi deux à deux non isomorphes et de longueur de Loewy deux. Maintenant, si $\tau^n I$ n'est pas projectif, alors on obtient une suite presque scindée

$$0 \rightarrow \tau^{n+1} I \rightarrow P_{n+1} \rightarrow \tau^n I \rightarrow 0.$$

Si P_{n+1} n'est pas injectif, il existe un facteur direct indécomposable de P_{n+1} , disons E , qui n'est pas injectif. Le module $\tau^{-1}E$ est alors un facteur direct de P_n , lequel est projectif, ce qui est impossible. Ainsi P_{n+1} est injectif et donc projectif-injectif selon le lemme précédent. Notons que $\text{mod}(A)$ n'a qu'un nombre fini de modules simples à isomorphisme près. Nous pouvons donc supposer que n est tel que $\tau^n I$ est projectif. Nous venons donc de construire une composante finie du carquois d'Auslander-Reiten. Puisque l'algèbre A est connexe, cette composante est égale au carquois d'Auslander-Reiten en entier (voir [9]). On a donc que les modules $P_i, \tau^j I$ avec $1 \leq i \leq n$ et $0 \leq j \leq n$ sont tous les modules indécomposables de $\text{mod}(A)$ à isomorphisme près. En particulier, l'algèbre A est dirigée. Maintenant, puisque les modules simples $\tau^i I$ avec $0 \leq i \leq n$ forment une τ -orbite, A est une algèbre de Nakayama ; voir [9, (IV.2.10)]. De plus, les modules P_i avec $1 \leq i \leq n$ sont de longueur de Loewy deux alors que $\tau^n I$ est simple. Ainsi, A est de longueur de Loewy deux. Cela montre que (e) implique (c).

Supposons maintenant que A est une algèbre de Nakayama dirigée de longueur de Loewy deux. Soient S_1, \dots, S_n les A -modules simples à isomorphisme près. Comme les modules indécomposables de $\text{mod}(A)$ sont soit injectifs soit simples, on a que

$$\overline{\text{mod}}(A) \cong \text{mod}(k_1) \times \dots \times \text{mod}(k_n),$$

où $k_i = \text{End}_A(S_i)$, $i = 1, \dots, n$. Soit B_i l'extension triviale de k_i par k_i , c'est-à-dire l'algèbre

$$B_i = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & a \end{array} \right) \mid a, b \in k_i \right\}$$

avec la multiplication matricielle. Considérons l'algèbre $B = B_1 \amalg \dots \amalg B_n$. Notons que les algèbres B_i sont toutes auto-injectives puisqu'une extension triviale d'une algèbre par son co-générateur injectif est toujours auto-injective. Il est bien connu qu'alors $\overline{\text{mod}}(B_i) \cong \text{mod}(k_i)$ pour tout i . Ainsi, B est une algèbre auto-injective avec

$$\overline{\text{mod}}(B) \cong \text{mod}(k_1) \times \dots \times \text{mod}(k_n).$$

Cela montre que (c) implique (d). Finalement, il suit de [22, (2.6)] que (d) implique (a). Comme nous l'avons remarqué, toute catégorie pré-triangulée est faiblement abélienne. Donc, (b) implique (e). Le fait que (a) implique (b) suit de la définition d'une algèbre stablement triangulée. \square

Notons que l'équivalence des énoncés (c) et (d) du théorème précédent a été obtenue pour la première fois par I. Reiten (voir [34]). Notons aussi qu'il a été montré dans [12] que la catégorie stable projective admet toujours une structure triangulée à gauche alors que la catégorie stable injective admet toujours une structure triangulée à droite. Comme ces deux catégories sont équivalentes, on peut dire que la catégorie stable injective admet une structure triangulée à gauche et une structure triangulée à droite. Ces deux structures, cependant, sont généralement différentes.

CHAPITRE 6

Représentations de carquois infinis

Dans ce chapitre, nous étudions les représentations d'un carquois infini, connexe, localement fini et fini par intervalle. Nous nous intéressons plus particulièrement à la théorie d'Auslander-Reiten dans la catégorie $\text{rep}(Q)$ des représentations localement de dimension finie de Q . Des travaux sur l'étude des représentations de tels carquois ont déjà parus dans la littérature. Parmi ceux-ci, mentionnons les travaux d'Enochs, Estrada et Rozas (voir [18] et [19]) qui étudient, entre autres, les représentations projectives et injectives de tels carquois en termes de propriétés locales des représentations. La motivation du travail contenu dans ce chapitre provient des résultats de Reiten et Van Den Bergh (voir [35]). Dans l'article cité, les auteurs étudient les foncteurs de Serre à droite pour la catégorie dérivée bornée de $\text{rep}^+(Q)$, la sous-catégorie pleine de $\text{rep}(Q)$ des représentations de présentation finie. Nous commençons avec quelques notations et quelques rappels.

6.1 Quelques notations et rappels

Dans ce chapitre, les carquois Q considérés sont localement finis et **finis par intervalle**, c'est-à-dire que pour chaque couple (x, y) de sommets du carquois, le nombre de chemins de x vers y dans Q est fini. Cette condition implique, en particulier, que le carquois Q n'a pas de cycles orientés. Nous supposons aussi Q connexe et, pour simplifier, que k est un corps algébriquement clos. Cependant, dans la plupart des résultats, cette dernière hypothèse n'est pas nécessaire. Comme dans le chapitre 2, nous notons $\text{Rep}(Q)$ la catégorie des k -représentations de Q . Nous avons vu que $\text{Rep}(Q)$ est équivalente à la catégorie $\text{Mod}(A)$ des A -modules à droite unifères où $A = kQ$ est l'algèbre des chemins de Q . Nous ne distinguons pas ces deux dernières catégories dans la suite. La catégorie $\text{Rep}(Q)$ est abélienne et héréditaire (voir [21, page 79]). Rappelons qu'une catégorie abélienne \mathcal{C} est dite **héréditaire** si les foncteurs $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, -)$ et $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(-, X)$ sont exacts à droite, lorsque X est un objet de \mathcal{C} . Rappelons que les foncteurs $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(-, X)$ et $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, -)$ sont définis en termes de suites exactes courtes. Si la catégorie \mathcal{C} admet suffisamment d'objets projectifs et injectifs, ces foncteurs peuvent être définis de façon usuelle, c'est-à-dire en tant que foncteurs dérivés des foncteurs $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$ et $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -)$, respectivement. Rappelons que $\text{rep}(Q)$ note la sous-catégorie pleine de $\text{Rep}(Q)$ des représentations localement de dimension finie. Cette dernière catégorie est également abélienne et héréditaire (la preuve de [21] s'applique aussi).

6.2 Les représentations de présentation finie

Commençons par étudier les modules projectifs et injectifs de $\text{Rep}(Q)$. Pour $x \in Q_0$, notons P_x le A -module engendré par e_x , l'idempotent primitif en x . On note que $P_x = e_x A$. Puisque ce module est unifère, il correspond à une représentation que l'on note aussi P_x .

De plus, on vérifie aisément que, lorsque $M \in \text{Rep}(Q)$, on a

$$\text{Hom}_A(P_x, M) \cong Me_x = M(x)$$

avec l'isomorphisme fonctoriel en M et en x . La preuve de ceci est exactement la même que dans le cas d'une algèbre d'Artin et nous l'omettons. Ce dernier isomorphisme donne que P_x est projectif pour tout sommet x dans Q_0 .

Pour définir, pour $x \in Q_0$, un module injectif I_x , nous avons besoin d'une dualité entre $\text{rep}(Q)$ et $\text{rep}(Q^{\text{op}})$. Soit $D_Q : \text{Rep}(Q) \rightarrow \text{Rep}(Q^{\text{op}})$ le foncteur défini comme suit.

(1) Si $M = (M(x), M(\alpha))_{x \in Q_0, \alpha \in Q_1}$, alors

$$D_Q M = (DM(x), DM(\alpha))_{x \in Q_0, \alpha \in Q_1},$$

où $D = \text{Hom}_k(-, k)$ est la dualité standard pour les k -espaces vectoriels.

(2) Si $f = (f_x)_{x \in Q_0}$ est un morphisme de M vers N , alors $D_Q f = (Df_x)_{x \in Q_0}$.

Il est facile de vérifier que D_Q induit une dualité entre les catégories $\text{rep}(Q)$ et $\text{rep}(Q^{\text{op}})$. Ceci vient simplement du fait que D est une dualité entre les k -espaces vectoriels de dimension finie. Notons que l'on aurait pu considérer le foncteur $\text{Hom}_k(-, k)$ plutôt que le foncteur D_Q . Cependant, le foncteur $\text{Hom}_k(-, k)$ appliqué à un module unifère n'est pas nécessairement unifère. Maintenant, si $Ae_x = \text{Hom}_A(P_x, A)$ est le module projectif (et unifère) de A^{op} associé à $x \in Q_0$, alors $D_Q(Ae_x)$ est injectif et noté I_x .

Comme toute représentation M de $\text{Rep}(Q)$ admet manifestement une présentation de la forme

$$P \rightarrow M \rightarrow 0$$

avec P une somme directe de représentations de la forme P_x , $x \in Q_0$, on a que $\text{Rep}(Q)$ admet suffisamment d'objets projectifs. Par contre, $\text{Rep}(Q)$ n'admet pas suffisamment d'objets injectifs. Cependant, on a tout de même le résultat suivant qui sera très utile.

Proposition 6.2.1. *Soit \mathcal{C} une catégorie abélienne.*

- (a) *Un objet M de \mathcal{C} est projectif si et seulement si l'on a $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(M, N) = 0$ pour tout objet N de \mathcal{C} .*
- (b) *Un objet M de \mathcal{C} est injectif si et seulement si l'on a $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(N, M) = 0$ pour tout objet N de \mathcal{C} .*

Démonstration. Nous montrons seulement le premier cas. Soit M un objet projectif. Si

$$\eta : 0 \rightarrow N \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0$$

représente un élément de $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(M, N)$, alors $1_M : M \rightarrow M$ se factorise par E puisque M est projectif. Ceci donne que la suite exacte η est scindée et donc que sa classe est nulle dans $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(M, N)$. Réciproquement, supposons que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(M, N) = 0$ pour tout objet $N \in \mathcal{C}$. Soit $f : X \rightarrow Y$ et $g : M \rightarrow Y$ deux morphismes avec f un épimorphisme. Alors le produit fibré de f et g donne un diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & E & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow g & & \\ 0 & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Par hypothèse, la suite du haut est scindée, ce qui donne que g se factorise par f . Donc, M est projectif. □

Maintenant, soit \mathcal{P} la sous-catégorie pleine et additive de $\text{rep}(Q)$ des représentations qui sont une somme directe finie de représentations de la forme P_x , $x \in Q_0$. On note alors $\text{rep}^+(Q)$ la sous-catégorie pleine de $\text{rep}(Q)$ des représentations qui admettent une présentation par des représentations de \mathcal{P} . Dualement, soit \mathcal{I} la sous-catégorie pleine et additive de $\text{rep}(Q)$ des représentations qui sont une somme directe finie de représentations de la forme I_x , $x \in Q_0$. On note alors $\text{rep}^-(Q)$ la sous-catégorie pleine de $\text{rep}(Q)$ des représentations qui admettent une co-présentation par des représentations de

\mathcal{I} . Les représentations de $\text{rep}^+(Q)$ sont dites de **présentation finie** et les représentations de $\text{rep}^-(Q)$ sont dites de **co-présentation finie**. Notons que D_Q induit également une dualité entre les catégories $\text{rep}^+(Q)$ et $\text{rep}^-(Q^{\text{op}})$.

En vertu de [21, exemple 2.3-5], nous savons que les idempotents scindent dans $\text{rep}(Q)$. Ceci donne que tout objet indécomposable de $\text{rep}(Q)$ a une algèbre d'endomorphisme locale. Cette algèbre, par contre, n'est pas nécessairement de dimension finie. Notons qu'une représentation de $\text{rep}(Q)$ ne se décompose pas nécessairement en une somme directe finie de représentations indécomposables. Toutefois, en utilisant la définition de $\text{rep}^+(Q)$, on a que toute telle représentation se décompose en une somme directe finie de représentations indécomposables. Cela donne que $\text{rep}^+(Q)$ est une catégorie de Krull-Schmidt. Nous avons bien sûr le résultat dual pour $\text{rep}^-(Q)$. Maintenant, voici un résultat qui sera très utile dans la suite.

Lemme 6.2.2. *Soit X un objet de $\text{rep}(Q)$.*

- (a) *Si $Y \in \text{rep}^+(Q)$, alors $\text{Hom}_A(Y, X)$ et $\text{Ext}_A^1(Y, X)$ sont de dimension finie.*
- (b) *Si $Y \in \text{rep}^-(Q)$, alors $\text{Hom}_A(X, Y)$ et $\text{Ext}_A^1(X, Y)$ sont de dimension finie.*

Démonstration. Nous considérons seulement le cas où $Y \in \text{rep}^+(Q)$, l'autre cas étant similaire. Il est évident que si $Y \in \mathcal{P}$, la conclusion suit. Toute représentation Y de $\text{rep}^+(Q)$ admet une résolution projective

$$0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow Y \rightarrow 0$$

avec P_0 et P_1 dans \mathcal{P} , en utilisant la définition de $\text{rep}^+(Q)$ et en utilisant le fait que $\text{rep}(Q)$ est héréditaire. On obtient le résultat en appliquant le foncteur $\text{Hom}_A(-, X)$. \square

On a maintenant le résultat suivant.

Lemme 6.2.3. *Les catégories $\text{rep}^+(Q)$ et $\text{rep}^-(Q)$ sont abéliennes, héréditaires, Ext-finies et stables pour les extensions.*

Démonstration. Nous considérons seulement la catégorie $\text{rep}^+(Q)$. En vertu de [5, proposition 2.1], $\text{rep}^+(Q)$ est abélienne si et seulement si, pour tout morphisme $f : P_1 \rightarrow P_2$ dans \mathcal{P} , il existe une suite exacte

$$P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2$$

avec P_0 dans \mathcal{P} . Maintenant, nous avons une suite exacte

$$0 \longrightarrow \ker(f) \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f} P_2 \xrightarrow{g} \text{coker}(f) \longrightarrow 0.$$

Puisque $\text{rep}(Q)$ est héréditaire, le noyau de g est projectif. Par conséquent, $\ker(f)$ est un facteur direct de P_1 . Comme P_1 est une somme directe finie de modules avec une algèbre d'endomorphisme locale, on a que $P_0 := \ker(f)$ est dans \mathcal{P} .

Maintenant, tout module M de $\text{rep}^+(Q)$ admet une présentation projective de la forme

$$0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

avec P_0, P_1 des modules projectifs dans $\text{rep}^+(Q)$. Si $N \in \text{rep}^+(Q)$, on trouve alors $\text{Ext}^2(N, M) = \text{Ext}^2(M, N) = 0$ dans $\text{rep}^+(Q)$. Par conséquent, $\text{rep}^+(Q)$ est héréditaire.

Le fait que $\text{rep}^+(Q)$ est Ext-finie suit du lemme précédent.

Finalement, soit

$$0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$$

une suite exacte courte dans $\text{rep}(Q)$ avec $L, N \in \text{rep}^+(Q)$. Si

$$0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow L \rightarrow 0$$

et

$$0 \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_0 \rightarrow N \rightarrow 0$$

sont des présentations projectives de L et N avec P_0, P_1, Q_0 et Q_1 dans \mathcal{P} , alors on vérifie

aisément que l'on peut construire une présentation de la forme

$$0 \rightarrow Q_1 \oplus P_1 \rightarrow Q_0 \oplus P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

ce qui montre que $M \in \text{rep}^+(Q)$.

□

Notons qu'il n'est pas vrai, en général, qu'une sous-représentation d'une représentation projective de $\text{rep}^+(Q)$ est dans $\text{rep}^+(Q)$. Cependant, cette sous-représentation est projective dans $\text{rep}(Q)$.

Maintenant, on note $\text{rep}^b(Q)$ la sous-catégorie pleine de $\text{rep}(Q)$ des représentations de dimension finie. Étant donné une représentation X de $\text{Rep}(Q)$, on définit le **support** de X , noté $\text{supp}(X)$, comme étant le sous-carquois plein de Q formé des sommets a de Q pour lesquels $X(a) \neq 0$. Puisque Q n'a pas de cycles orientés et est fini par intervalle, on voit que le support d'un objet injectif de \mathcal{I} est un carquois ne contenant aucun chemin infini à droite, qui, rappelons-le, est de la forme

$$\circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ \rightarrow \dots$$

et contient un nombre fini de puits. Nous appelons un tel carquois **fini à droite**. Si $M \in \text{rep}^-(Q)$, alors on a un monomorphisme

$$0 \rightarrow M \rightarrow I$$

avec $I \in \mathcal{I}$. Ainsi, $\text{supp}(M)$ est un sous-carquois d'un carquois fini à droite. Par conséquent, il ne contient pas de chemins infinis à droite. Comme chaque puits de $\text{supp}(M)$ donne lieu à un sous-module simple de I , on a que $\text{supp}(M)$ contient un nombre fini de puits. On voit alors que tout objet de $\text{rep}^-(Q)$ admet un support fini à droite. Dualement, tout objet de $\text{rep}^+(Q)$ admet un support **fini à gauche**, c'est-à-dire un carquois avec un

nombre fini de sources et aucun chemin infini à gauche, c'est-à-dire de la forme

$$\cdots \rightarrow \circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ$$

Nous montrons maintenant qu'une représentation est de dimension finie si et seulement si elle est de présentation finie et de co-présentation finie.

Proposition 6.2.4. *On a*

$$\text{rep}^b(Q) = \text{rep}^+(Q) \cap \text{rep}^-(Q).$$

Démonstration. Soit X une représentation de $\text{rep}^b(Q)$. On montre d'abord que $X \in \text{rep}^+(Q)$. Soit n la dimension de X . Si $n = 1$, alors X est simple et puisque Q est localement fini, on a que X est dans $\text{rep}^+(Q)$. Si $n > 1$, on a une suite exacte courte

$$0 \rightarrow X_1 \rightarrow X \rightarrow X_2 \rightarrow 0$$

avec $X_1, X_2 \in \text{rep}^b(Q)$ tels que la dimension de X_i est plus petite que n , $i = 1, 2$. Par récurrence, on obtient le résultat en utilisant le fait que $\text{rep}^+(Q)$ est stable pour les extensions. De même, $\text{rep}^b(Q) \subseteq \text{rep}^-(Q)$.

Maintenant, en utilisant la remarque précédente sur les supports, $X \in \text{rep}^+(Q) \cap \text{rep}^-(Q)$ donne que $\text{supp}(X)$ est fini à gauche et à droite. Le support de X n'admet donc aucun chemin infini et a un nombre fini de sources et de puits. Puisque Q est fini par intervalle, un tel carquois doit être fini. On a donc que X est de dimension finie. Cela montre que $\text{rep}^+(Q) \cap \text{rep}^-(Q) \subseteq \text{rep}^b(Q)$. \square

Nous terminons cette section en construisant une équivalence de \mathcal{P} vers \mathcal{I} . Cette équivalence nous sera utile dans la prochaine section, afin d'étudier les suites presque scindées. Remarquons que A peut être considérée comme un A -module à droite unifère. On a un foncteur $\text{Hom}_A(-, A)$ qui va de la catégorie de tous les modules à droite vers la catégorie

de tous les modules à gauche. A priori, rien n'indique que $\text{Hom}_A(M, A)$ avec M un A -module unifère est unifère. Nous commençons avec le résultat suivant dans lequel on note \mathcal{P}' la catégorie \mathcal{P} mais pour le carquois Q^{op} et P'_x la représentation projective associée à $x \in Q_0$ de Q^{op} .

Lemme 6.2.5. *On a un foncteur $\text{Hom}_A(-, A) : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ qui est une anti-équivalence telle que $\text{Hom}_A(P_x, A) \cong P'_x$ pour tout $x \in Q_0$.*

Démonstration. Soit $x \in Q_0$. Pour $y, z \in Q_0$, on note $Q(y, z)$ l'ensemble des chemins de y vers z . Le module unifère A_A , en tant que représentation, est tel que

$$A(x) = \bigoplus_{z \in Q_0} kQ(z, x) = Ae_x.$$

On a un isomorphisme k -linéaire

$$\phi_x : \text{Hom}_A(P_x, A) \rightarrow Ae_x, \quad f \mapsto f(e_x).$$

Pour $u \in A$, on a $\phi_x(uf) = (uf)(e_x) = uf(e_x) = u\phi_x(f)$. Par conséquent, ϕ_x est un isomorphisme de A -modules à gauche. Comme Ae_x est unifère, on a que $\text{Hom}_A(P_x, A)$ est unifère. On a donc montré que $\text{Hom}_A(P_x, A) \cong P'_x$. De plus, pour $y \in Q_0$, on a $\text{Hom}_A(P_x, P_y) \cong P_y(x) = kQ(y, x)$ et $\text{Hom}_{A^{\text{op}}}(P'_y, P'_x) \cong kQ^{\text{op}}(x, y) \cong kQ(y, x)$. Par conséquent, $\text{Hom}_A(-, A)$ induit un isomorphisme de k -espaces vectoriels

$$\text{Hom}_A(P_x, P_y) \rightarrow \text{Hom}_{A^{\text{op}}}(\text{Hom}_A(P_y, A), \text{Hom}_A(P_x, A)).$$

Comme \mathcal{P} est engendrée par les représentations P_x et \mathcal{P}' est engendrée par les représentations P'_x , on a que $\text{Hom}_A(-, A)$ induit une anti-équivalence de \mathcal{P} vers \mathcal{I} . \square

Comme conséquence, on obtient la proposition suivante.

Proposition 6.2.6. *Le foncteur $\nu = D_Q \text{Hom}_A(-, A) : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{I}$ est une équivalence telle que $\nu(P_x) \cong I_x$, pour $x \in Q_0$.*

6.3 Suites presque scindées dans $\text{rep}(Q)$

Dans [6], il est démontré que si M est un module de présentation finie sur un anneau Λ , alors il existe une suite presque scindée se terminant en M . Dualement, si M est un module de co-présentation finie sur Λ , alors il existe une suite presque scindée commençant en M . Nous étudions ces résultats d'existence pour la catégorie $\text{rep}(Q)$ en donnant explicitement la construction de la translation τ d'Auslander-Reiten. Cependant, nous utilisons une approche différente de celle utilisée dans [6]. Nous utilisons une version locale d'un résultat qui se trouve dans [27], pour montrer l'existence de la formule d'Auslander-Reiten. Cela nous permettra ensuite de donner la construction de la translation τ .

Dans [27], il est démontré que si \mathcal{C} est une k -catégorie abélienne, svelte et qui est Ext-finie, alors l'existence des suites presque scindées dans \mathcal{C} est reliée directement à une formule dite d'Auslander-Reiten. Rappelons qu'il n'est pas nécessaire que \mathcal{C} admette suffisamment d'objets projectifs ou injectifs pour définir les groupes d'extension Ext^i . Ils sont définis en termes de classes d'équivalence de suites exactes. On peut définir le bifoncteur $\underline{\text{Hom}}(-, ?)$ en prenant le bifoncteur $\text{Hom}(-, ?)$ modulo les morphismes projectivement triviaux. De même, $\overline{\text{Hom}}(-, ?)$ est défini dualement, en utilisant les morphismes injectivement triviaux.

Maintenant, il est possible d'adapter la preuve présentée dans [27] en une version locale, qui nous sera plus utile.

Théorème 6.3.1. *Soit \mathcal{C} une k -catégorie abélienne et svelte avec X, Y et Z des objets fortement indécomposables.*

- (a) *Supposons que $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, Y)$ et $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, U)$ sont de dimension finie pour tout U dans \mathcal{C} . Si X n'est pas projectif, alors il existe une suite presque scindée*

$$0 \rightarrow Y \rightarrow E \rightarrow X \rightarrow 0$$

dans \mathcal{C} si et seulement si l'on a un isomorphisme fonctoriel

$$\overline{\text{Hom}}_{\mathcal{C}}(-, Y) \xrightarrow{\sim} D\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, -).$$

(b) Supposons que $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, U)$ et $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(U, X)$ sont de dimension finie pour tout U dans \mathcal{C} . Si X n'est pas injectif, alors il existe une suite presque scindée

$$0 \rightarrow X \rightarrow E' \rightarrow Z \rightarrow 0$$

dans \mathcal{C} si et seulement si l'on a un isomorphisme fonctoriel

$$\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{C}}(Z, -) \xrightarrow{\sim} D\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(-, X).$$

Démonstration. Nous montrons seulement (a). Pour la nécessité, la preuve de la proposition 3.1 dans [27] peut facilement être adaptée à notre situation.

Pour la suffisance, nous adaptions substantiellement la preuve de la proposition 4.1 de [27]. Supposons que X n'est pas projectif et que

$$\overline{\text{Hom}}_{\mathcal{C}}(-, Y) \xrightarrow{\sim} D\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, -).$$

La composition du morphisme fonctoriel

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y) \rightarrow \overline{\text{Hom}}_{\mathcal{C}}(-, Y)$$

et de l'isomorphisme

$$\Psi_X : \overline{\text{Hom}}_{\mathcal{C}}(-, Y) \xrightarrow{\sim} D\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, -)$$

donne, en vertu du lemme de Yoneda, un élément k_X dans $D\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, Y)$ qui, rappelons-le, est obtenu en prenant l'image de 1_Y , c'est-à-dire que $k_X = \Psi_X(\overline{1}_Y)$. Par conséquent k_X est nul si et seulement si $\overline{1}_Y$ est nul, si et seulement si $\overline{\text{Hom}}(L, Y) = 0$ pour tout $L \in \mathcal{C}$, si et seulement si $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, L) = 0$ pour tout $L \in \mathcal{C}$. Selon la proposition 6.2.1,

cela est le cas si et seulement si X est projectif, ce qui est impossible. Ainsi, on a que k_X est non nul. On a donc une application k -linéaire $k_X : \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, Y) \rightarrow k$ qui est non nulle. Fixons un objet W de \mathcal{C} . Si $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Y)$ et $\beta \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, W)$, on note $\alpha \cdot \beta$ l'élément $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, \alpha)(\beta)$. En utilisant le fonctorialité de Ψ_X , on a

$$k_X(\alpha \cdot \beta) = \Psi_X(\overline{1_Y})(\alpha \cdot \beta) = \Psi_X(\overline{\alpha})(\beta)$$

où $\overline{\alpha}$ note la classe de α dans $\overline{\text{Hom}_{\mathcal{C}}}(W, Y)$. Maintenant, $\text{End}_{\mathcal{C}}(Y)$ est une algèbre locale de dimension finie sur k et donc, $0 \neq \overline{\text{End}_{\mathcal{C}}}(Y)$ est aussi une algèbre locale de dimension finie sur k , et donc de coiffe simple. L'isomorphisme $\Psi_X(Y)$ donne donc que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, Y)$ a un socle simple en tant que $\text{End}_{\mathcal{C}}(Y)$ -module à gauche. Soit $\mu_X \neq 0$ un élément de ce socle, représenté par la suite exacte

$$0 \rightarrow Y \rightarrow E \rightarrow X \rightarrow 0.$$

Nous montrons que μ_X est presque scindée. Pour ce faire, nous devons montrer que si $f : Y \rightarrow W$ n'est pas une section, alors ce morphisme se factorise par E . Il est donc suffisant de montrer que la somme amalgamée de f et μ_X , notée $f \cdot \mu_X$, est nulle. Cependant, si $\beta : W \rightarrow Y$, alors

$$\Psi_X(\overline{\beta})(f \cdot \mu_X) = k_X((\beta f) \cdot \mu_X) = k_X(0) = 0$$

puisque βf est dans le radical de $\text{End}_{\mathcal{C}}(Y)$, étant donné que f n'est pas une section. Si $f \cdot \mu_X \neq 0$, soit $\eta \in D\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, W)$ une application k -linéaire qui ne s'annule pas sur $f \cdot \mu_X$. Comme Ψ_X est un isomorphisme, il existe $\beta \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Y)$ avec $\Psi_X(\overline{\beta}) = \eta$ et donc, $\Psi_X(\overline{\beta})(f \cdot \mu_X) \neq 0$, une contradiction. Par conséquent, μ_X est presque scindée. \square

Nous voulons montrer que si X est une représentation indécomposable non projective de $\text{rep}^+(Q)$, alors il existe une suite presque scindée se terminant en X dans $\text{rep}(Q)$. En vertu du théorème précédent, il est suffisant de trouver un module indécomposable τX dans

$\text{rep}^-(Q)$ tel que l'isomorphisme du théorème 6.3.1 (a) soit vérifié. Les autres conditions de (a) sont satisfaites en vertu du lemme 6.2.2. Construisons donc le module τX . La construction est classique, mais nous la donnons tout de même par souci de complétude.

Soit X un objet indécomposable non projectif de $\text{rep}^+(Q)$ et supposons que $f : P_1 \rightarrow P_0$ est une présentation projective minimale de X dans \mathcal{P} . En particulier, f est un monomorphisme dont l'image est contenue dans le radical de P_0 . Nous définissons τX comme étant la représentation de $\text{rep}^-(Q)$ qui est le noyau de $\nu(f)$. Comme f est un monomorphisme, on obtient que $\text{Hom}_A(f, A)$ est un monomorphisme et donc que $\nu(f) = D_Q \text{Hom}_A(f, A)$ est un épimorphisme. Comme f est un morphisme radiciel, on a que $\text{Hom}_A(f, A)$ est également radiciel de sorte que $\nu(f)$ s'annule sur le socle de νP_1 . Par conséquent, $\nu(f)$ est une co-présentation injective minimale de τX . Si la représentation τX se décompose de façon non triviale, alors on obtient une décomposition de $\nu(f)$ en

$$\nu(f) \cong \text{diag}(f_1, f_2) : I_{11} \oplus I_{12} \rightarrow I_{01} \oplus I_{02}$$

de sorte que

$$f \cong \nu^{-1}\nu(f) \cong \text{diag}(\nu^{-1}(f_1), \nu^{-1}(f_2))$$

se décompose également et on obtient ainsi une décomposition non triviale

$$X \cong \text{coker}(\nu^{-1}(f_1)) \oplus \text{coker}(\nu^{-1}(f_2)),$$

ce qui contredit le fait que X est indécomposable. Cela montre que τX doit être indécomposable. Comme cette représentation est dans $\text{rep}^-(Q)$, elle a une algèbre d'endomorphisme locale. Bien sûr, on a la construction duale $\tau^- X$ pour $X \in \text{rep}^-(Q)$.

Cependant, on aimerait faire de τ un foncteur de $\text{rep}^+(Q)$ vers $\text{rep}^-(Q)$. Remarquons qu'avec les notations ci-haut, la suite exacte

$$0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow X \rightarrow 0$$

donne lieu, en appliquant le foncteur $\text{Hom}_A(-, A)$, à

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(X, A) \rightarrow \text{Hom}_A(P_0, A) \rightarrow \text{Hom}_A(P_1, A) \rightarrow \text{Ext}_A^1(X, A) \rightarrow 0.$$

Comme X est indécomposable non projectif, on a $\text{Hom}_A(X, A) = 0$ de sorte que l'on a

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(P_0, A) \rightarrow \text{Hom}_A(P_1, A) \rightarrow \text{Ext}_A^1(X, A) \rightarrow 0.$$

Comme $\text{Hom}_A(P_0, A)$ et $\text{Hom}_A(P_1, A)$ sont des A^{op} -modules unifères, $\text{Ext}_A^1(X, A)$ est unifère. On a donc

$$0 \rightarrow D_Q \text{Ext}_A^1(X, A) \rightarrow D_Q \text{Hom}_A(P_1, A) \rightarrow D_Q \text{Hom}_A(P_0, A) \rightarrow 0,$$

de sorte que $\tau X \cong D_Q \text{Ext}_A^1(X, A)$. On pose alors

$$\tau = D_Q \text{Ext}_A^1(-, A) : \text{rep}^+(Q) \rightarrow \text{rep}^-(Q).$$

Avant de continuer l'investigation, nous avons besoin de ce lemme.

Lemme 6.3.2. *Soient $P \in \mathcal{P}$ et $L \in \text{rep}(Q)$. Alors on a un isomorphisme $\text{Hom}_A(P, L) \cong D\text{Hom}_A(L, \nu P)$ qui est naturel en chaque variable.*

Démonstration. Soit $P_x = e_x A$ un module projectif indécomposable. Alors

$$\begin{aligned} \text{Hom}_A(L, I_x) &= \text{Hom}_A(L, D_Q(Ae_x)) \\ &\cong \text{Hom}_{A^{\text{op}}}(Ae_x, D_Q L) \\ &\cong e_x(D_Q L) \\ &\cong D(Le_x) \\ &\cong D\text{Hom}_A(P_x, L). \end{aligned}$$

Le résultat demeure vrai si l'on remplace P_x par une somme directe finie de modules projectifs dans \mathcal{P} . La functorialité est un exercice facile et suit de la functorialité de chacun des isomorphismes. □

Nous avons vu précédemment que les catégories stables peuvent être définies en utilisant les morphismes injectivement triviaux et projectivement triviaux. Puisque la catégorie $\text{rep}(Q)$ n'admet pas suffisamment d'objets injectifs et projectifs, nous devons considérer ces morphismes. En fait, nous avons besoin des lemmes suivants.

Lemme 6.3.3. *On a les résultats suivants.*

- (a) *Si $X \in \text{rep}(Q)$ a un support qui ne contient pas de chemins infinis à droite, alors il existe une enveloppe injective $X \rightarrow I$ dans $\text{rep}(Q)$.*
- (b) *Si $X \in \text{rep}(Q)$ a un support qui ne contient pas de chemins infinis à gauche, alors il existe une couverture projective $P \rightarrow X$ dans $\text{rep}(Q)$.*

Démonstration. Nous montrons seulement (a), la preuve de (b) étant similaire. Soit $X \in \text{rep}(Q)$ dont le support ne contient pas de chemins infinis à droite. On pose $\text{soc}(X)$ la sous-représentation semi-simple de X telle que pour $a \in Q_0$,

$$\text{soc}(X)(a) = \bigcap_{\alpha: a \rightarrow b} \ker X(\alpha).$$

Si X' est une sous-représentation de X , alors comme le support de X' ne contient pas de chemins infinis à droite, il existe $a \in \text{supp}(X')$ qui est un puits. On a alors que $X'(a)$ est une sous-représentation de X' telle que $X'(a) \subseteq X' \cap \text{soc}(X)$ de sorte que $\text{soc}(X)$ est un sous-module essentiel de X . On peut écrire

$$\text{soc}(X) = \bigoplus_{j \in J} S_{x_j}$$

où S_{x_j} est la représentation simple associée au sommet x_j de Q . On a alors un monomorphisme essentiel $\text{soc}(X) \rightarrow \bigoplus_{j \in J} I_{x_j}$. On affirme que la représentation $I = \bigoplus_{j \in J} I_{x_j}$ est dans $\text{rep}(Q)$. Autrement, il existe $b \in Q_0$ tel que $I(b)$ est de dimension infinie. Ainsi, il existe un sous-ensemble infini J' de J tel que pour $j \in J'$, il y a un chemin dans Q de b vers x_j . Comme Q est localement fini et fini par intervalle, on obtient des chemins

arbitrairement longs de b vers les x_j . Selon le lemme de König, on obtient un chemin infini dans Q partant de b et qui se factorise par une infinité de x_j , $j \in J'$. Cela contredit le fait que le support de X ne contient pas de chemins infinis à droite. Comme le foncteur D_Q transforme les sommes directes en sommes directes et que $D_Q(I)$ est projectif, on a bien que I est une représentation injective. On a donc une enveloppe injective

$$0 \rightarrow \text{soc}(X) \rightarrow I$$

dans $\text{rep}(Q)$ qui se prolonge en une enveloppe injective

$$0 \rightarrow X \rightarrow I.$$

□

Lemme 6.3.4. *Soient $L \in \text{rep}(Q)$, $X \in \text{rep}^+(Q)$ et $Y \in \text{rep}^-(Q)$ avec X, Y indécomposables. Alors on a*

(a) $\underline{\text{Hom}}_A(X, L) = \text{Hom}_A(X, L)$ si et seulement si X n'est pas projectif,

(b) $\overline{\text{Hom}}_A(L, Y) = \text{Hom}_A(L, Y)$ si et seulement si Y n'est pas injectif.

Démonstration. Nous montrons seulement le deuxième cas, le premier cas étant similaire. Soit I l'enveloppe injective de Y et posons $\Sigma = Q \setminus \text{supp}(I)$. Notons que Σ est stable pour les successeurs. Soit

$$0 \rightarrow L_\Sigma \rightarrow L \rightarrow L/L_\Sigma \rightarrow 0$$

la suite exacte canonique où L_Σ est la sous-représentation de L qui est la restriction de L à Σ . Remarquons que puisque le support de L/L_Σ ne contient pas de chemins infinis à droite, il existe une enveloppe injective

$$0 \rightarrow L/L_\Sigma \rightarrow I$$

dans $\text{rep}(Q)$. Puisque la catégorie $\text{rep}(Q)$ est héréditaire, on a un épimorphisme

$$\text{Ext}_A^1(I, L_\Sigma) \rightarrow \text{Ext}_A^1(L/L_\Sigma, L_\Sigma) \rightarrow 0.$$

Par conséquent, il existe une extension $\eta \in \text{Ext}_A^1(I, L_\Sigma)$ telle que on a le produit fibré

$$\eta : \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L_\Sigma & \longrightarrow & L & \longrightarrow & L/L_\Sigma \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow g & & \downarrow \\ & & L_\Sigma & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & I \longrightarrow 0 \end{array}$$

avec un monomorphisme g . Soit maintenant f un morphisme non nul dans $\text{Hom}_A(L, Y)$. Si f est injectivement trivial, cela signifie que $\text{Ext}_A^1(Z, f) = 0$ pour toute représentation Z de $\text{rep}(Q)$. Donc, $\text{Ext}_A^1(L/L', f) = 0$ de sorte que f se factorise par le monomorphisme $g : L \rightarrow L'$. Donc il existe $h : L' \rightarrow Y$ tel que $f = hg$. Puisque le support de L_Σ est contenu dans Σ et que le support de Y est disjoint de Σ , on vérifie que L_Σ est une sous-représentation du noyau de h . Cela nous donne que h se factorise par I et donc on a un morphisme non nul $f' : I \rightarrow Y$. Puisque Y est indécomposable et que l'image de f' est injective, on doit avoir que Y est injectif. La réciproque est triviale. \square

Proposition 6.3.5. *Soient $X \in \text{rep}^+(Q)$ indécomposable et non projectif et τX la représentation définie comme plus haut. Si $L \in \text{rep}(Q)$, alors on a un isomorphisme $\overline{\text{Hom}}_A(L, \tau X) \cong D\text{Ext}_A^1(X, L)$ fonctoriel en chaque variable.*

Démonstration. Soit

$$0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow X \rightarrow 0$$

une présentation projective minimale de X . La définition de τ donne une suite exacte

$$0 \rightarrow \tau X \rightarrow \nu P_1 \rightarrow \nu P_0.$$

En appliquant le foncteur $\text{Hom}_A(L, -)$, on obtient

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(L, \tau X) \rightarrow \text{Hom}_A(L, \nu P_1) \rightarrow \text{Hom}_A(L, \nu P_0).$$

Maintenant, en appliquant le foncteur $D\text{Hom}_A(-, L)$ à la présentation projective de X , on a

$$0 \rightarrow D\text{Ext}_A^1(X, L) \rightarrow D\text{Hom}_A(P_1, L) \rightarrow D\text{Hom}_A(P_0, L).$$

En vertu du lemme précédent, ces deux suites doivent être isomorphes. Par conséquent, puisque τX n'est pas injectif, $\overline{\text{Hom}}_A(L, \tau X) = \text{Hom}_A(L, \tau X) \cong \text{DExt}_A^1(X, L)$ naturellement. \square

Le résultat dual est également vrai, avec une preuve duale. Maintenant, en utilisant le théorème 6.3.1, on obtient le résultat suivant.

Théorème 6.3.6. *Soit X un objet indécomposable dans $\text{rep}(Q)$.*

(a) *Si $X \in \text{rep}^+(Q)$ n'est pas projectif, alors $\text{rep}(Q)$ admet une suite presque scindée*

$$0 \rightarrow \tau X \rightarrow E \rightarrow X \rightarrow 0$$

avec $\tau X \in \text{rep}^-(Q)$. De plus, $E \in \text{rep}^-(Q)$ si et seulement si $X \in \text{rep}^b(Q)$.

(b) *Si $X \in \text{rep}^-(Q)$ n'est pas injectif, alors $\text{rep}(Q)$ admet une suite presque scindée*

$$0 \rightarrow X \rightarrow E \rightarrow \tau^- X \rightarrow 0$$

avec $\tau^- X \in \text{rep}^+(Q)$. De plus, $E \in \text{rep}^+(Q)$ si et seulement si $X \in \text{rep}^b(Q)$.

Démonstration. La deuxième partie est duale à la première. Il ne reste plus à démontrer que la seconde partie de (a). Si $X \in \text{rep}^b(Q) \subseteq \text{rep}^-(Q)$, alors $\tau X \in \text{rep}^-(Q)$ donne que E est aussi dans $\text{rep}^-(Q)$ puisque $\text{rep}^-(Q)$ est stable pour les extensions. Réciproquement, si $E \in \text{rep}^-(Q)$, alors $X \in \text{rep}^-(Q)$ en utilisant le fait que $\text{rep}^-(Q)$ est abélienne. On conclut avec le lemme 6.2.4. \square

On a le théorème suivant

Proposition 6.3.7. *Le foncteur τ induit une équivalence*

$$\underline{\text{rep}}^+(Q) \cong \overline{\text{rep}}^-(Q)$$

Démonstration. Si X est projectif, alors $\tau X = D_Q \text{Ext}_A^1(X, A) = 0$ de sorte qu'avec le lemme 6.3.4, on a bien que τ induit un foncteur, noté aussi τ , de $\underline{\text{rep}}^+(Q)$ vers $\overline{\text{rep}}^-(Q)$. Si $X \in \text{rep}^-(Q)$ est indécomposable non injectif et

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow I_0 \xrightarrow{f} I_1$$

est une co-présentation injective avec $I_0, I_1 \in \mathcal{I}$, alors le conoyau Y de $\nu^-(f)$ est tel que $\tau Y \cong X$. Ceci montre que τ est dense. Soient X, Y indécomposables non projectifs dans $\text{rep}^+(Q)$. Puisque l'on a déjà montré, en vertu de la proposition 6.3.5, que

$$\underline{\text{Hom}}_A(X, Y) \cong D \text{Ext}_A^1(Y, \tau X) \cong \overline{\text{Hom}}(\tau X, \tau Y),$$

il suffit de montrer que τ est fidèle. Soit $f : X \rightarrow Y$ non nul. En prenant les résolutions projectives minimales de X et Y , on obtient le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow s & & \downarrow t & & \downarrow f & & \\ 0 & \longrightarrow & Q_1 & \longrightarrow & Q_0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où t est obtenue en utilisant le fait que P_0 est projectif et s par passage aux noyaux. On a donc le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_A(P_0, A) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(P_1, A) & \longrightarrow & \text{Ext}_A^1(X, A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \text{Hom}(s, A) & & \downarrow \text{Hom}(t, A) & & \downarrow \text{Ext}_A^1(f, A) & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_A(Q_0, A) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(Q_1, A) & \longrightarrow & \text{Ext}_A^1(Y, A) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

et donc le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \tau X & \longrightarrow & \nu(P_0) & \longrightarrow & \nu(P_1) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \tau f & & \downarrow \nu(t) & & \downarrow \nu(s) & & \\ 0 & \longrightarrow & \tau Y & \longrightarrow & \nu(Q_0) & \longrightarrow & \nu(Q_1) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Si $\tau f = 0$, $\nu(t)$ se factorise par $\nu(P_1)$ et donc que t se factorise par P_1 . Dans ce cas, on obtient que $f = 0$. Cela montre que τ est fidèle et donc une équivalence. \square

Nous terminons cette section avec le résultat suivant.

Proposition 6.3.8. *Soit $Y \in \text{rep}^+(Q)$ indécomposable et de dimension infinie sur k , et soit*

$$0 \rightarrow X \rightarrow E \rightarrow Y \rightarrow 0$$

une suite presque scindée dans $\text{rep}(Q)$. Si E_1 est un facteur direct de E , alors E_1 est de co-présentation finie si et seulement si E_1 est de dimension finie sur k .

Démonstration. On peut écrire

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{(f_1 \ f_2)^T} E_1 \oplus E_2 \xrightarrow{(g_1 \ g_2)} Y \rightarrow 0 .$$

On a ainsi que g_1 est un morphisme irréductible de E_1 vers Y . Supposons que E_1 est de co-présentation finie et que E_1 est de dimension infinie sur k . Alors $\text{supp}(E_1)$ doit contenir un chemin infini à gauche. Supposons d'abord que g_1 est un monomorphisme. Puisqu'alors, $\text{supp}(Y)$ contient $\text{supp}(E_1)$, $\text{supp}(Y)$ contient un chemin infini à gauche. Ceci contredit le fait que Y est de présentation finie. Supposons maintenant que g_1 est un épimorphisme. Comme $\text{supp}(Y)$ est contenu dans $\text{supp}(E_1)$ et que Y est de dimension infinie, cela implique que $\text{supp}(E_1)$ contient un chemin infini à droite. Ceci contredit le fait que E_1 est de co-présentation finie. Cela montre la nécessité. La réciproque est triviale. \square

6.4 L'existence de suites presque scindées dans $\text{rep}^+(Q)$

Dans cette section, on donne des conditions nécessaires et suffisantes sur le carquois Q pour que la condition suivante soit satisfaite.

$$\text{Pour tout } M \in \text{rep}^+(Q), \tau M \in \text{rep}^+(Q). \tag{6.1}$$

On voit aisément que cette condition revient à dire que toute suite presque scindée de $\text{rep}(Q)$ se terminant avec un objet de $\text{rep}^+(Q)$ est une suite presque scindée dans $\text{rep}^+(Q)$.

On montre que (6.1) est équivalente à la condition affirmant que $\text{rep}^+(Q)$ a des suites presque scindées à droite. Nous avons d'abord besoin de l'énoncé suivant.

Proposition 6.4.1. *Soit $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ une suite exacte courte dans $\text{rep}(Q)$.*

- (a) *Cette suite est presque scindée dans $\text{rep}^+(Q)$ si et seulement si elle est presque scindée dans $\text{rep}(Q)$ avec $X \in \text{rep}^b(Q)$.*
- (b) *Cette suite est presque scindée dans $\text{rep}^-(Q)$ si et seulement si elle est presque scindée dans $\text{rep}(Q)$ avec $Z \in \text{rep}^b(Q)$.*

Démonstration. Nous montrons seulement la partie (a). Nous devons seulement montrer la nécessité. Soit

$$0 \rightarrow Z \rightarrow Y \rightarrow X \rightarrow 0$$

une suite presque scindée de $\text{rep}^+(Q)$. Alors X n'est pas projectif dans $\text{rep}^+(Q)$. Par conséquent, il existe une suite presque scindée

$$0 \rightarrow Z' \rightarrow Y' \rightarrow X \rightarrow 0$$

dans $\text{rep}(Q)$. Notons $f : Y \rightarrow X$ le morphisme minimal presque scindé à droite dans $\text{rep}^+(Q)$ et $g : Y' \rightarrow X$ le morphisme minimal presque scindé à droite dans $\text{rep}(Q)$. Comme, manifestement, f n'est pas une rétraction dans $\text{rep}(Q)$, on obtient une factorisation $f = gu$ où $u : Y \rightarrow Y'$.

Soit Σ_1 le support de Y et Σ_2 le support de Y' . On note Q' le sous-carquois plein et convexe de Σ_2 engendré par les sommets de Σ_2 qui sont des successeurs de sommets de Σ_1 . En particulier, $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \subseteq Q'$. De plus, comme tout sommet de Q' est un successeur d'un sommet de Σ_1 et que Σ_1 est fini à gauche, Q' n'a pas de chemins infinis à gauche. Étant

contenu dans l'intersection de Σ_1 et Σ_2 , $\text{supp}(X)$ est contenu dans Q' . Soit maintenant Y'' la restriction de la représentation Y' au carquois Q' . Puisque Q' est stable pour les successeurs dans Σ_2 , Y'' est une sous-représentation de Y' . On a une suite exacte courte

$$0 \rightarrow Z'' \rightarrow Y'' \rightarrow X \rightarrow 0$$

en prenant la restriction à Q' de la suite presque scindée de $\text{rep}(Q)$ se terminant en X . Supposons que $\text{supp}(Z'') = \text{supp}(Z') \cap Q'$ contient un nombre infini de sommets $\{x_i\}_{i \geq 1}$. Comme $\text{supp}(Z')$ est fini à droite et donc possède un nombre fini de puits, on peut supposer que parmi ces x_i , il y en a un nombre infini qui sont tous prédécesseurs d'un même puits a dans $\text{supp}(Z')$. Soit $\{y_i\}_{i \geq 1}$ ces sommets. On obtient, pour $i \geq 1$, un chemin ω_i de y_i vers a dans Q . Par définition de Q' , les chemins ω_i sont dans Q' . Comme Q' est localement fini, la longueur des chemins ω_i n'est pas bornée. Par le lemme de König, Q' doit contenir un chemin infini (qui est infini à gauche en fait) se terminant en a , ce qui est une contradiction. Par conséquent, $\text{supp}(Z'')$ est fini ce qui donne que Z'' est de dimension finie sur k . Ainsi, Y'' doit être de présentation finie.

Maintenant, soit $g' : Y'' \rightarrow X$ la restriction de g à Y'' et $u' : Y \rightarrow Y''$ la co-restriction de u à $Y'' \supset \text{Im}(u)$. On obtient une factorisation $f = g'u'$ dans $\text{rep}^+(Q)$. Ainsi, g' est une rétraction ou u' est une section. Notons $i : Y'' \rightarrow Y'$ l'inclusion. Si g' est une rétraction, alors il existe $s : X \rightarrow Y''$ avec $g's = 1_X$, ce qui donne que $gis = g's = 1_X$ et donc, que g est une rétraction. Ceci est impossible puisque g est irréductible dans $\text{rep}(Q)$. Donc, $u' : Y \rightarrow Y''$ doit être une section. Cela donne, en particulier, que $iu' = u$ est un monomorphisme. On a donc le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{f} & X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow v & & \downarrow u & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & Y' & \xrightarrow{g} & X \longrightarrow 0 \end{array}$$

qui est une somme amalgamée. On obtient donc un monomorphisme $v : Z \rightarrow Z'$. Le support de Z' ne contient pas de chemins infinis à droite, ce qui donne que le support

de Z ne contient pas de chemins infinis à droite. Donc, étant dans $\text{rep}^+(Q)$, Z est de dimension finie sur k . La suite presque scindée commençant en Z dans $\text{rep}(Q)$ doit être dans $\text{rep}^+(Q)$ et donc une suite presque scindée dans $\text{rep}^+(Q)$. Par conséquent,

$$0 \rightarrow Z \rightarrow Y \rightarrow X \rightarrow 0$$

est une suite presque scindée dans $\text{rep}(Q)$. □

Maintenant, si P_x , $x \in Q_0$, est une représentation projective indécomposable, alors on vérifie aisément que l'inclusion canonique $\text{rad}(P_x) \rightarrow P_x$ est minimale presque scindée à droite. La preuve est identique au cas des algèbres d'Artin. La dernière proposition combinée avec cette observation montre que la condition (6.1) est équivalente à dire que $\text{rep}^+(Q)$ a des suites presque scindées à droite. Maintenant, si la condition (6.1) est vérifiée, alors pour toute représentation simple S_x , $x \in Q_0$, on a que τS_x est de présentation finie et donc de dimension finie selon le lemme 6.2.4. Nous avons besoin de deux lemmes techniques avant de présenter le théorème.

Lemme 6.4.2. *Soit $a \in Q_0$ le but d'un chemin infini à gauche. S'il y a plus d'une flèche commençant en a , alors τS_a est de dimension infinie sur k .*

Démonstration. Soient $\beta_i : a \rightarrow a_i$, $i = 1, 2, \dots, r$, les flèches commençant en a . La présentation projective minimale de la représentation simple en a , S_a , est donnée par

$$\bigoplus_{i=1}^r P_{a_i} \rightarrow P_a \rightarrow S_a \rightarrow 0.$$

Le module τS_a est le noyau du morphisme (qui est un épimorphisme)

$$\bigoplus_{i=1}^r I_{a_i} \rightarrow I_a.$$

Soit

$$\cdots \rightarrow b_2 \rightarrow b_1 \rightarrow b_0 = a$$

un chemin infini à gauche dans Q . Supposons que $r > 1$. Pour tout nombre positif i , on a

$$\dim_k(\tau S_a(b_i)) = \dim_k(\oplus_{i=1}^r I_{a_i}(b_i)) - \dim_k(I_a(b_i)) > 0.$$

Par conséquent, on obtient que τS_a est de dimension infinie. □

Lemme 6.4.3. *Soit $a \in Q_0$ le but d'un chemin infini à gauche. S'il existe une flèche $b \rightarrow a$ qui ne fait pas partie de ce chemin infini, alors τS_b est de dimension infinie sur k .*

Démonstration. La présentation projective minimale de la représentation simple en b , S_b , est donnée par

$$P_a \oplus P \rightarrow P_b \rightarrow S_b \rightarrow 0$$

avec P une représentation projective de \mathcal{P} (qui peut être nulle). Maintenant, τS_b est le noyau de

$$I_a \oplus I \rightarrow I_b$$

où $I = \nu(P)$. Il est évident que la restriction de ce morphisme à I_a a un noyau de dimension infinie sur k . Cela donne le résultat voulu. □

Un carquois est dit de **type** \mathbb{A}_∞ si le graphe sous-jacent de ce carquois est de la forme

$$\circ - \circ - \circ - \circ - \dots$$

et de **type** \mathbb{A}_∞^∞ si le graphe sous-jacent est de la forme

$$\dots - \circ - \circ - \circ - \circ - \dots$$

On a maintenant le théorème suivant.

Théorème 6.4.4. $\text{rep}^+(Q)$ a des suites presque scindées à droite si et seulement si Q est l'un des carquois suivants.

- (a) Q ne contient pas de chemins infinis à gauche,

(b) Q est de type \mathbb{A}_∞ ayant un unique puits,

(c) Q est de type \mathbb{A}_∞^∞ ayant ni puits ni sources.

Démonstration. Supposons que $\text{rep}^+(Q)$ ait des suites presque scindées à droite. On a que la condition (6.1) est vérifiée. En vertu des deux lemmes précédents, s'il existe un chemin infini à gauche dans Q , chaque sommet de ce chemin a exactement un prédécesseur immédiat dans Q et au plus un successeur immédiat dans Q . Ainsi, puisque Q est connexe, il doit être de type \mathbb{A}_∞ ou \mathbb{A}_∞^∞ avec toutes les flèches orientées dans la même direction. Ceci montre la nécessité. Supposons maintenant que Q n'a pas de chemins infinis à gauche. Alors $\text{rep}^-(Q) = \text{rep}^b(Q)$. Cela donne que si $X \in \text{rep}^+(Q)$ est indécomposable non projectif, alors $\tau X \in \text{rep}^b(Q)$ et le résultat suit. Si Q est comme dans (b) ou (c), alors tout module non projectif X dans $\text{rep}^+(Q)$ est de dimension finie et est unisériel. Soit $\omega = \omega_1\omega_2 \cdots \omega_n$ le chemin de Q égal au support de X . Posons $a = s(\omega)$ et $b = t(\omega)$. Soit $\omega_{n+1} : b \rightarrow c$ l'unique flèche commençant en b . Une telle flèche existe puisque X n'est pas projectif. Il est alors facile de vérifier que $P_c \rightarrow P_a$ est une présentation projective minimale de X de sorte que τX est le noyau de $I_c \rightarrow I_a$. On obtient ainsi que τX est unisériel de dimension finie de support $\omega_2 \cdots \omega_n \omega_{n+1}$. \square

On énonce le résultat dual.

Théorème 6.4.5. $\text{rep}^-(Q)$ a des suites presque scindées à gauche si et seulement si Q est l'un des carquois suivants.

(a) Q ne contient pas de chemins infinis à droite,

(b) Q est de type \mathbb{A}_∞ ayant une unique source,

(c) Q est de type \mathbb{A}_∞^∞ ayant ni puits ni sources.

Nous finissons avec le corollaire suivant.

Corollaire 6.4.6. *On a les résultats suivants.*

(a) $\text{rep}^+(Q)$ a des suites presque scindées si et seulement si Q n'a pas de chemins infinis ou est de type \mathbb{A}_∞ ayant un seul puits.

(b) $\text{rep}^-(Q)$ a des suites presque scindées si et seulement si Q n'a pas de chemins infinis ou est de type \mathbb{A}_∞ ayant une seule source.

Démonstration. Supposons que $\text{rep}^+(Q)$ ait des suites presque scindées. Soit X un module indécomposable non injectif de $\text{rep}^+(Q)$. On a une suite presque scindée

$$0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$$

dans $\text{rep}^+(Q)$. En vertu de la proposition 6.4.1, cette suite est presque scindée dans $\text{rep}(Q)$ et donc, $X \in \text{rep}^b(Q)$. Par conséquent, tout module indécomposable non injectif de $\text{rep}^+(Q)$ est de dimension finie. Ainsi, si Q contient un chemin infini à droite, soit $\alpha : a \rightarrow b$ une flèche de ce chemin. Alors la représentation projective indécomposable P_b est de dimension infinie. De plus, comme l'inclusion $P_b \rightarrow P_a$ n'est pas une section, P_b n'est pas injectif. Ceci est une contradiction. Ainsi, Q ne contient pas de chemins infinis à droite. Selon le théorème 6.4.4, Q ne contient pas de chemins infinis à gauche ou est de type \mathbb{A}_∞ avec un unique puits. Dans le premier cas, on obtient que Q ne contient pas de chemins infinis. Réciproquement, si Q n'a pas de chemins infinis ou est de type \mathbb{A}_∞ avec un unique puits, il est facile de voir que $\text{rep}^+(Q) = \text{rep}^b(Q)$ a des suites presque scindées. La preuve de (b) est duale. □

6.5 Structure des composantes du carquois d'Auslander-Reiten de $\text{rep}^+(Q)$

Dans [35], les catégories abéliennes héréditaires admettant un foncteur de Serre à droite (c'est-à-dire qui admettent des suites presque scindées à droite) sont étudiées. Une classification des catégories noethériennes, héréditaires et abéliennes admettant un foncteur de Serre est donnée. C.M. Ringel a montré dans [37] une autre façon d'étudier ces catégories lorsqu'ils ont des objets projectifs non nuls. La catégorie $\text{rep}^+(Q)$ est abélienne et héréditaire mais pas nécessairement noethérienne. Ainsi, la description générale des composantes du carquois d'Auslander-Reiten de $\text{rep}^+(Q)$ lorsque $\text{rep}^+(Q)$ admet des suites presque scindées à droite n'est pas connue en dehors de cette thèse.

Dans cette section, on étudie la forme des composantes du carquois d'Auslander-Reiten de la catégorie $\text{rep}^+(Q)$. Pour ce faire, nous supposons que la catégorie $\text{rep}^+(Q)$ admet des suites presque scindées à droite. Par conséquent, on suppose que Q satisfait à l'une des trois conditions du théorème 6.4.4. Rappelons les trois cas possibles :

- (a) Q ne contient pas de chemins infinis à gauche,
- (b) Q est de type \mathbb{A}_∞ avec un unique puits,
- (c) Q est de type \mathbb{A}_∞^∞ avec ni puits ni sources.

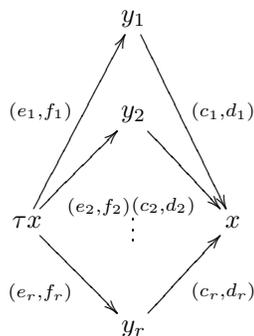
Si Q ne satisfait à aucune de ces conditions, le carquois d'Auslander-Reiten n'est pas donné par les suites presque scindées. Il y a donc peu d'espoir d'obtenir une description intéressante pour le carquois d'Auslander-Reiten. Notons que si Q satisfait à l'une des trois conditions du théorème 6.4.4, alors si $X \in \text{rep}^+(Q)$, la suite presque scindée se terminant en X dans $\text{rep}(Q)$ est une suite presque scindée dans $\text{rep}^+(Q)$ dont le premier terme est dans $\text{rep}^b(Q)$. Ainsi, τX est de dimension finie. Soit maintenant X une représentation de $\text{rep}^+(Q)$ et $E \rightarrow X$ un morphisme minimal presque scindé à droite. Rappelons que

le module E détermine entièrement les flèches du carquois d'Auslander-Reiten dont le but est X ainsi que les valuations de ces flèches. Puisque k est algébriquement clos, les valuations sont toutes symétriques. Nous commençons maintenant l'étude du carquois d'Auslander-Reiten $\Gamma_{\text{rep}^+(Q)}$ de $\text{rep}^+(Q)$. Pour cette fin, on considère d'abord un cadre combinatoire plus général.

Soit (Γ, τ) un carquois valué (localement fini) à translation avec translation τ . La plupart des définitions qui suivent se retrouvent dans [29] ou [36]. Pour un sommet x de Γ , on note x^- l'ensemble des prédécesseurs immédiats de x et x^+ l'ensemble de ses successeurs immédiats. Si $x^- = \{y_1, y_2, \dots, y_r\}$ et (c_i, d_i) , $1 \leq i \leq r$, sont les valuations des flèches correspondantes, alors on dit que x a un **poinds à gauche** de $\sum_{i=1}^r d_i$. Dualement, si $x^+ = \{z_1, z_2, \dots, z_s\}$ et (a_i, b_i) , $1 \leq i \leq s$, sont les valuations des flèches correspondantes, alors on dit que x a un **poinds à droite** de $\sum_{i=1}^s a_i$. On appelle $f : \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ une **fonction additive** sur Γ si, pour tout sommet non projectif $x \in \Gamma_0$, on a

$$f(x) + f(\tau x) = \sum_{i=1}^r f(y_i)d_i = \sum_{i=1}^r f(y_i)e_i$$

où on a, localement,



On dit que f est **stricte** si, de plus, $f(x) \neq f(y)$ lorsqu'il y a une flèche $x \rightarrow y$ dans Γ avec $f(x) \neq \infty$. On dit que f est **strictement monotone** si, de plus, pour toute flèche $\alpha : x \rightarrow y$ dans Γ avec x, y non projectifs et $f(x) < f(y)$, on a $f(\tau x) < f(\tau y)$. Étant donné un sous-carquois plein Γ' de Γ , on dit que f est **croissante** (ou **décroissante**) sur

Γ' si $f(x) < f(y)$ (ou $f(x) > f(y)$, respectivement) lorsqu'il y a une flèche $x \rightarrow y$ dans Γ' .

On dit qu'un sous-carquois Δ du carquois à translation (Γ, τ) est une **section** si Δ est convexe, connexe et contient exactement un sommet de chaque τ -orbite de Γ . Maintenant, on présente le lemme suivant. La preuve est inspirée de [29, lemme 2.4].

Lemme 6.5.1. *Soit (Γ, τ) un carquois à translation valué qui est stable à gauche avec f une fonction additive strictement monotone. Soit Δ une section de Γ qui satisfait aux conditions suivantes.*

- (i) $f(x) = \infty$ pour tout sommet x dans Δ ,
- (ii) $f(\tau x) < \infty$ pour tout sommet x dans Δ ,
- (iii) Tout sommet x dans Δ a un poids à gauche de un dans Δ .

Alors Δ est de type \mathbb{A}_∞ avec un unique puits.

Démonstration. Supposons que $\alpha : x \rightarrow y$ est une flèche avec $x \in \Gamma \setminus \Delta$ et $y \in \Delta$. Si $\tau^n x \in \Delta$ pour un entier positif n , alors puisqu'il y a un chemin de $\tau^n x$ vers y qui passe par x , on a que $x \in \Delta$, car Δ est convexe. Ceci est une contradiction. Puisque Δ est une section, il existe un entier positif et minimal n tel que $\tau^{-n} x \in \Delta$. Puisque Δ est convexe et qu'il y a un chemin de y vers $\tau^{-n} x$ qui passe par $\tau^{-1} x$, on a que $n = 1$. Donc $\tau^{-1} x \in \Delta$. Selon la condition (ii), cela donne que $f(\tau \tau^{-1} x) = f(x) < \infty = f(y)$. Maintenant, si $\alpha : x \rightarrow y$ est une flèche de Δ , alors $f(\tau x) > f(\tau y)$. Autrement, $f(\tau x) < f(\tau y) < f(x)$ et donc, puisque f est monotone,

$$\dots < f(\tau^n x) < f(\tau^n y) < f(\tau^{n-1} x) < \dots < f(\tau x) < f(\tau y)$$

ce qui est une contradiction puisque chaque terme de cette chaîne est fini. Ainsi, on obtient que f est décroissante sur $\tau\Delta$. Cela montre, en particulier, que Δ n'a pas de chemins infinis à droite.

Supposons maintenant que x est un sommet de Δ avec un poids à droite d'au moins deux dans Δ . Soient y_1, y_2, \dots, y_r , avec $r \geq 2$, les successeurs immédiats de x , en comptant les multiplicités (selon les valuations des flèches dont la source est x). Soit u l'unique prédécesseur immédiat de x dans Δ . Puisque $u \in \Delta$, $\tau y_i \neq u$ pour tout i . Selon l'observation ci-dessus, f est décroissante sur $\tau\Delta$ et donc, $f(\tau u) > f(\tau x)$. La condition $f(\tau x) < f(u)$ donne que $f(\tau^3 x) < f(\tau^2 u)$. Maintenant, on a

$$f(\tau^3 x) + f(\tau^2 x) \geq f(\tau^3 y_1) + f(\tau^3 y_2) + f(\tau^2 u) \quad (6.2)$$

puisque $\tau^3 y_1, \tau^3 y_2$ et $\tau^2 u$ sont trois prédécesseurs immédiats de $\tau^2 x$. On a aussi que

$$f(\tau^3 y_i) + f(\tau^2 y_i) \geq f(\tau^2 x), \quad i = 1, 2 \quad (6.3)$$

et

$$f(\tau^2 u) + f(\tau u) \geq f(\tau^2 x). \quad (6.4)$$

Finalement, on a aussi

$$f(\tau^2 x) + f(\tau x) \geq f(\tau^2 y_1) + f(\tau^2 y_2) + f(\tau u). \quad (6.5)$$

En combinant ces inégalités, on obtient

$$\begin{aligned} f(\tau^3 x) + f(\tau^2 x) + f(\tau^2 x) + f(\tau x) &\geq (f(\tau^3 y_1) + f(\tau^3 y_2) + f(\tau^2 u)) + \\ &\quad (f(\tau^2 y_1) + f(\tau^2 y_2) + f(\tau u)) \\ &= (f(\tau^3 y_1) + f(\tau^2 y_1)) + (f(\tau^3 y_2) + f(\tau^2 y_2)) + \\ &\quad (f(\tau^2 u) + f(\tau u)) \\ &\geq f(\tau^2 x) + f(\tau^2 x) + f(\tau^2 u) + f(\tau u) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$f(\tau^3 x) + f(\tau x) \geq f(\tau^2 u) + f(\tau u).$$

Mais cela est impossible puisque $f(\tau^3 x) < f(\tau^2 u)$ et $f(\tau x) < f(\tau u)$. Par conséquent, x ne peut avoir un poids à droite supérieur à un dans Δ . On a donc que tout sommet de

Δ a un poids à gauche de un et un poids à droite d'au plus un dans Δ et que Δ n'a pas de chemins infinis à droite. Ceci donne que Δ est le carquois \mathbb{A}_∞ avec un unique puits et des valuations triviales. Cela termine la preuve. \square

Nous appliquons ce résultat à notre situation. Avant tout, nous avons besoin des deux lemmes suivants. Le premier de ces lemmes peut être vu comme une généralisation de l'énoncé correspondant pour les algèbres héréditaires de dimension finie (voir [9, Corollaire 4.2]).

Lemme 6.5.2. *Soient X, Y des représentations indécomposables non projectives dans $\text{rep}^+(Q)$. Si $g : X \rightarrow Y$ est un morphisme (ou monomorphisme) irréductible, alors τg est un morphisme (ou monomorphisme, respectivement) irréductible.*

Démonstration. Nous montrons d'abord que τ préserve les monomorphismes. Soit $g : X \rightarrow Y$ un monomorphisme irréductible. Soit $i : K \rightarrow \tau X$ le noyau du morphisme τg . Puisque $\text{rep}^-(Q)$ est abélienne, on a que $K \in \text{rep}^-(Q)$. De plus K n'a pas de facteurs directs injectifs puisque τX n'est pas injectif. Cela donne un morphisme $\tau^-i : \tau^-K \rightarrow X$ tel que $g\tau^-i = 0$. Cela donne que $g\tau^-i$ se factorise par un module projectif. Comme τ^-K ne contient pas de facteur direct projectif, on doit avoir que $g\tau^-i = 0$ et donc, $\tau^-i = 0$ puisque g est un monomorphisme. Cela donne que i se factorise par un module injectif. Comme K n'a pas de facteurs directs injectifs, on a $i = 0$ et donc $K = 0$. Cela montre que τg est un monomorphisme.

Maintenant, nous montrons que τg est irréductible si $g : X \rightarrow Y$ est irréductible. Supposons que τg se factorise par une représentation Z dans $\text{rep}^+(Q)$ via $\tau g = h_2 h_1$. Notons que $\text{supp}(Z)$ est un carquois fini à gauche et donc, a un nombre fini de sources et ne contient pas de chemins infinis à gauche. Notons aussi que τX et τY sont de dimension finie et donc, ont un support fini. Soit Q' le sous-carquois plein de Q contenant $\text{supp}(\tau X \oplus \tau Y)$, les successeurs immédiats de même que les prédécesseurs immédiats de

ces sommets dans Q . Comme Q est localement fini et que $\text{supp}(\tau X \oplus \tau Y)$ est fini, Q' doit être fini. Soit Z' la restriction de Z à Q' . Remarquons que Z' est de dimension finie. On a une factorisation induite de τg par Z' via $\tau g = \beta \alpha$ où α est la restriction de h_1 à Q' et β la restriction de h_2 à Q' . Les morphismes $\alpha : \tau X \rightarrow Z'$ et $\beta : Z' \rightarrow \tau Y$ sont vus comme des morphismes de $\text{rep}(Q)$. Maintenant, décomposons $Z' = M \oplus I$ avec I injectif et M ne contenant aucun facteur direct injectif. Comme τY n'est pas injectif et que $\tau g \neq 0$, $M \neq 0$. Les morphismes α et β se décomposent donc comme $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)^T$ et $\beta = (\beta_1, \beta_2)$. On obtient alors $\tau^-(Z') = \tau^-M \neq 0$ n'a pas de facteur direct non nul qui soit projectif. Comme $g = \tau^-(\tau g)$, on obtient que g se factorise par τ^-M selon $g = \tau^- \beta_1 \tau^- \alpha_1$. Puisque g est irréductible, on a que $\tau^- \beta_1$ est une rétraction ou $\tau^- \alpha_1$ est une section. Remarquons qu'aucun de X, Y et τ^-M n'a de facteur direct non nul qui soit projectif. Ainsi, si $\tau^- \alpha_1$ est une section, alors $\alpha_1 = \tau(\tau^- \alpha_1)$ est une section. De même, si $\tau^- \beta_1$ est une rétraction, alors β_1 est une rétraction. Par conséquent, β est une rétraction ou α est une section. Supposons que β est une rétraction. Soit $\beta' : \tau Y \rightarrow Z'$ tel que $\beta \beta' = 1_{\tau Y}$. Selon le choix de Q' , β' peut être prolongé en un morphisme $\beta'' : \tau Y \rightarrow Z$ qui est tel que pour tout sommet a qui n'est pas dans $\text{supp}(Z')$, $\beta''_a = 0$. Cela donne que $h_2 \beta'' = 1_{\tau Y}$ et donc que h_2 est une rétraction. De même, on montre que si α est une section, alors h_1 est une section. \square

Lemme 6.5.3. *Il n'y a pas de cycles orientés dans le carquois d'Auslander-Reiten de $\text{rep}^+(Q)$.*

Démonstration. Soit $X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \dots \rightarrow X_n = X_1$ un tel cycle. Il est évident qu'un prédécesseur d'un module de dimension finie doit aussi être de dimension finie. Par conséquent, soit que tous les X_i sont de dimension finie ou tous de dimension infinie. Considérons le premier cas. Soit Σ un sous-carquois de Q qui est plein, connexe, fini et qui contient le support de $\oplus X_i$. Le cycle plus haut est aussi un cycle dans le carquois d'Auslander-Reiten de $\text{rep}(\Sigma)$. Il est bien connu que dans ce cas, Σ doit être un carquois euclidien.

Mais ceci est vrai peu importe le sous-carquois de Q qui est plein, connexe, fini et qui contient le support de $\oplus X_i$. Ceci est une contradiction puisque Q est infini. Maintenant, supposons que tous les modules X_i sont de dimension infinie. Si l'un des X_i est projectif, alors tous les modules du cycle doivent être projectifs, puisqu'un prédécesseur d'un module projectif est projectif. Rappelons que $\text{Hom}_A(P_x, P_y)$ est identifié naturellement avec les combinaisons linéaires de chemins de y vers x . S'il existe un cycle orienté de modules projectifs, cela donne donc un cycle orienté dans Q , ce qui est impossible. Ainsi, aucun des X_i n'est projectif. On a donc un cycle $\tau X_1 \rightarrow \tau X_2 \rightarrow \cdots \rightarrow \tau X_n = \tau X_1$. On peut alors utiliser la preuve du premier cas. \square

On dit qu'un objet indécomposable X de $\text{rep}^+(Q)$ est **préprojectif** s'il existe un entier non négatif n pour lequel $\tau^n X$ est projectif dans $\text{rep}^+(Q)$. On dit qu'une composante Γ de $\Gamma_{\text{rep}^+(Q)}$ est **préprojective** si tout sommet de Γ est préprojectif. Un objet indécomposable X de $\text{rep}^+(Q)$ est **préinjectif** s'il existe un entier non négatif n pour lequel $\tau^{-n} X$ est isomorphe à un objet de \mathcal{I} . On dit qu'une composante Γ est **préinjective** si tout sommet de Γ est préinjectif.

Notons que dans la définition d'un objet préinjectif, nous avons spécifié explicitement que $\tau^{-n} X$ doit non seulement être injectif mais de la forme I_x , $x \in Q_0$. Ceci vient du fait qu'il existe des objets indécomposables injectifs dans $\text{rep}^+(Q)$ qui ne sont pas de la forme I_x pour $x \in Q_0$. Par exemple, si Q est le carquois de type \mathbb{A}_∞ avec une unique source a , alors P_a est injectif indécomposable et non isomorphe à un objet de \mathcal{I} . Cependant, tout objet projectif indécomposable de $\text{rep}^+(Q)$ est de la forme P_x pour $x \in Q_0$. Si X est indécomposable dans $\text{rep}^+(Q)$ tel que τX n'est pas défini, alors $X = P_x$ pour un certain sommet $x \in Q_0$. Cependant, si X est une représentation indécomposable de $\text{rep}^+(Q)$ telle que $\tau^{-1} X$ n'est pas défini, alors ou bien X est de dimension infinie ou bien X est injective de dimension finie dans \mathcal{I} . Rappelons qu'une telle représentation est dite quasi-injective.

Les représentations indécomposables de \mathcal{I} sont des cas particuliers de représentations quasi-injectives.

On dit finalement qu'une composante Γ de $\Gamma_{\text{rep}^+(Q)}$ est **régulière** si elle ne contient pas de sommets dans $\mathcal{P} \cup \mathcal{I}$. Nous verrons que toute composante Γ de $\Gamma_{\text{rep}^+(Q)}$ est soit préprojective, soit préinjective, soit régulière.

On commence par étudier les composantes régulières de $\Gamma_{\text{rep}^+(Q)}$. On débute avec le lemme suivant.

Lemme 6.5.4. *Soit Γ une composante de $\Gamma_{\text{rep}^+(Q)}$ et Δ le sous-carquois plein qui satisfait à l'une des deux conditions suivantes.*

- (a) Δ consiste en toutes les représentations de dimension infinie de Γ ,
- (b) Δ consiste en toutes les représentations injectives de \mathcal{I} de Γ .

Alors Δ est stable pour les successeurs ainsi que les prédécesseurs quasi-injectifs.

Démonstration. (a) Supposons que Δ est non vide. Soit $X \in \Delta$ de dimension infinie. Soit $\alpha : X \rightarrow Y$ une flèche de Γ . Si Y est une représentation projective, alors, étant un prédécesseur de Y , X est projective. Si $X = P_x$ et $Y = P_y$, on obtient un chemin de y vers x . Puisque P_x est de dimension infinie, il existe un chemin infini partant de x et donc un chemin infini partant de y , ce qui donne que P_y est de dimension infinie. Si Y n'est pas projectif et de dimension finie, soit

$$0 \rightarrow Z \rightarrow X \oplus E \rightarrow Y \rightarrow 0$$

une suite presque scindée avec Z de dimension finie. Ainsi, X est de dimension finie, une contradiction. Soit $\beta : Y \rightarrow X$ avec X et Y des sommets quasi-injectifs et $X \in \Delta$. Si $Y \notin \Delta$, alors $Y \in \mathcal{I}$ et est de dimension finie. Soit $g : Y \rightarrow X$ le morphisme irréductible correspondant à β . Alors $0 \neq \text{Im}(g) \cong Y/\ker(g)$ est injectif. Puisque X est indécomposable, on a que $X = \text{Im}(g)$ est injectif de dimension finie, une contradiction.

(b) Soit $X \in \Delta$ une représentation de \mathcal{I} . Comme $X \in \text{rep}^+(Q)$, X doit être de dimension finie. Soit $\alpha : X \rightarrow Y$ une flèche de Γ et $f : X \rightarrow Y$ le morphisme irréductible correspondant. Alors $0 \neq \text{Im}(f) \cong X/\ker(f)$ est injectif. Puisque Y est indécomposable, on a que $Y = \text{Im}(f)$ est injectif. Soit $\beta : Y \rightarrow X$ avec X et Y des sommets quasi-injectifs et $X \in \Delta$. Si $Y \notin \Delta$, alors Y est de dimension infinie, ce qui donne que X est de dimension infinie en vertu de (a). Ceci est une contradiction. \square

On dit qu'une section d'un carquois à translation est à l'**extrême droite** (ou à l'**extrême gauche**) si cette section ne consiste qu'en des sommets quasi-injectifs (ou projectifs, respectivement) du carquois. Une telle section est nécessairement unique.

Lemme 6.5.5. *Soit Γ une composante de $\Gamma_{\text{rep}^+(Q)}$ et Δ un sous-carquois plein et non vide dont les sommets consistent en une famille de sommets quasi-injectifs de Γ qui est stable pour les successeurs et stable pour les prédécesseurs quasi-injectifs. Alors Δ est la section à l'extrême droite de Γ .*

Démonstration. Puisque Δ est stable pour les successeurs, on a que Δ est convexe. Nous montrons que Δ intersecte la τ -orbite de tout sommet exactement une fois. Il est clair que Δ intersecte la τ -orbite de chaque sommet au plus une fois. Soit $\alpha : Y \rightarrow X$ une flèche de Γ telle que la τ -orbite de X intersecte Δ . Il existe un entier non négatif n tel que $\tau^{-n}X \in \Delta$. On doit montrer qu'il existe un entier non négatif m tel que $\tau^{-m}Y \in \Delta$. Supposons qu'il existe un entier $0 \leq s < n$ tel que $\tau^{-s}Y$ est un sommet quasi-injectif. Comme un successeur d'un sommet quasi-injectif est quasi-injectif, on obtient que $\tau^{-s}X$ est un sommet quasi-injectif, une contradiction. Maintenant, si $\tau^{-n}Y$ est un sommet quasi-injectif, alors comme on a une flèche $\tau^{-n}Y \rightarrow \tau^{-n}X$ et que Δ est stable pour les prédécesseurs quasi-injectifs, on obtient que $\tau^{-n}Y \in \Delta$. Si $\tau^{-n}Y$ n'est pas quasi-injectif, alors on a une flèche $\tau^{-n}X \rightarrow \tau^{-n-1}Y$ ce qui donne que $\tau^{-n-1}Y \in \Delta$ puisque Δ est stable pour les successeurs. De même, on montre que si $\alpha : X \rightarrow Y$ est une flèche de Γ

telle que la τ -orbite de X intersecte Δ , alors la τ -orbite de Y intersecte aussi Δ . Comme Γ est connexe, tout sommet de Γ est connecté à un sommet dont la τ -orbite intersecte Δ . Par récurrence, on obtient que la τ -orbite de tout sommet intersecte Δ . Cette preuve montre aussi que Δ est connexe. \square

Étant donné un carquois localement fini Δ , on note $\mathbb{Z}\Delta$ le carquois défini de la façon suivante. On a $(\mathbb{Z}\Delta)_0 = \mathbb{Z} \times \Delta_0$. Pour chaque flèche $\alpha : x \rightarrow y$ de Δ et chaque entier n , on a une flèche $\alpha_n : (n, x) \rightarrow (n, y)$ et une flèche $\alpha_n^* : (n-1, y) \rightarrow (n, x)$. Pour tout entier n et tout sommet x de Δ_0 , on pose $\tau(n, x) = (n-1, x)$. On note que τ fait de $\mathbb{Z}\Delta$ un carquois à translation qui est stable à gauche et à droite. De façons similaires, on peut définir les carquois $\mathbb{N}\Delta$ et $\mathbb{N}^-\Delta$. Dans le premier cas, la translation τ n'est défini que pour les sommets de la forme (n, x) avec $n > 0$ et $x \in \Delta_0$. On obtient que $\mathbb{N}\Delta$ est un carquois à translation qui est stable à droite. Dans le second cas, la translation τ est défini pour tous les sommets de $\mathbb{N}^-\Delta$. On obtient que $\mathbb{N}^-\Delta$ est un carquois à translation qui est stable à gauche.

Proposition 6.5.6. *Soit X une représentation de dimension infinie à l'intérieur d'une composante régulière Γ de $\text{rep}^+(Q)$. Alors $\Gamma = \mathbb{N}^-\mathbb{A}_\infty$ avec la section à l'extrême droite de type \mathbb{A}_∞ ayant seulement un puits. De plus, cette section contient toutes les représentations de dimension infinie de Γ .*

Démonstration. Soit

$$0 \rightarrow \tau X \rightarrow E \rightarrow X \rightarrow 0$$

la suite presque scindée se terminant en X . Comme τX est de dimension finie, E doit être de dimension infinie. Comme $E \in \text{rep}^+(Q)$, E se décompose en une somme directe finie de représentations indécomposables de $\text{rep}^+(Q)$. Soient Y_1, Y_2, \dots, Y_n ces facteurs directs indécomposables, en comptant les multiplicités. Au moins un de ces facteurs directs est de dimension infinie. Supposons que s telles représentations sont de dimension infinie.

Sans perdre de généralité, supposons que ce sont Y_1, Y_2, \dots, Y_s . Notons $f_i : Y_i \rightarrow X$ le morphisme irréductible correspondant, $i = 1, 2, \dots, s$. Supposons qu'il existe j tel que f_j est un monomorphisme. Soit $g_j : \tau X \rightarrow Y_j$ le morphisme irréductible correspondant. Comme Y_j est de dimension infinie, g_j est un monomorphisme. Puisque τ préserve les monomorphismes, on obtient une chaîne de monomorphismes

$$\dots \longrightarrow \tau^2 Y_j \xrightarrow{\tau^2 f_j} \tau^2 X \xrightarrow{\tau g_j} \tau Y_j \xrightarrow{\tau f_j} \tau X$$

avec toutes les représentations de dimension finie. Cela implique que $\tau^m X = 0$ pour un entier positif m . Ceci est une contradiction. Par conséquent, tous les f_i sont des épimorphismes. Maintenant, si $s \geq 2$, la suite exacte

$$0 \rightarrow \tau X \rightarrow E/Y_1 \oplus Y_1 \rightarrow X \rightarrow 0$$

donne lieu à un produit fibré

$$\begin{array}{ccc} \tau X & \longrightarrow & E/Y_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_1 & \xrightarrow{f_1} & X \end{array}$$

et donc, on a un épimorphisme de τX vers E/Y_1 , lequel est de dimension infinie. Ceci est une contradiction. Nous avons montré qu'exactly un facteur direct de E est de dimension infinie. De plus, le morphisme irréductible correspondant est un épimorphisme.

Soit maintenant Δ le sous-carquois plein de Γ qui contient tous les modules de dimension infinie de $\text{rep}^+(Q)$. Selon les deux lemmes précédents, Δ est une section. On veut alors montrer que $\Delta = \mathbb{A}_\infty$ avec un unique puits. On a que (Γ, τ) , avec τ la translation d'Auslander-Reiten est un carquois à translation valué qui est stable à gauche. Comme nous l'avons vu, toute représentation de Δ a un poids à gauche de un dans Δ . De plus, il est clair que la fonction $f = \dim_k(-)$ est additive et stricte sur Γ . Finalement, la fonction f est strictement monotone selon le lemme 6.5.2. En utilisant le lemme 6.5.1, on obtient que $\Delta = \mathbb{A}_\infty$ avec un seul puits. Comme Γ ne contient pas de cycles orientés et que Δ est une section à l'extrême droite, on obtient que $\Gamma = \mathbb{N}^- \Delta = \mathbb{N}^- \mathbb{A}_\infty$. \square

Maintenant, nous étudions les composantes régulières qui ne contiennent que des représentations de dimension finie.

Proposition 6.5.7. *Supposons que Γ est une composante régulière de $\Gamma_{\text{rep}^+(Q)}$ contenant seulement des représentations de dimension finie. Alors $\Gamma = \mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$.*

Démonstration. Notons que puisque toutes les représentations de Γ sont de dimension finie, le carquois (Γ, τ) avec τ la translation d'Auslander-Reiten est un carquois valué à translation qui est stable à gauche et à droite. La fonction $f = \dim_k(-)$ est additive et son image est dans \mathbb{N}^* . Comme Γ est stable et que τ préserve les monomorphismes, on a que f est strictement monotone. Puisque Γ ne contient pas de cycles orientés, la proposition de [36] donne que $\Gamma = \mathbb{Z}\Delta$ avec $\Delta = \mathbb{A}_\infty$ ou Δ un carquois fini. On montre que le deuxième cas est impossible. Supposons que Δ est fini. On a que Δ est une section finie de Γ . Soit U le sous-carquois plein de Γ contenant les sommets de $\Delta \cup \tau\Delta \cup \tau^{-1}\Delta$. Alors U est convexe puisque Δ est une section. Soit Σ un sous-carquois fini et connexe de Q qui contient le support de toutes les représentations de U et contient plus de sommets que Δ . Un tel carquois existe puisque Q est infini. Il est facile de vérifier que toute suite presque scindée dans U est également une suite presque scindée de $\text{rep}(\Sigma)$. Par conséquent, U est un sous-carquois à translation plein et convexe de $\Gamma_{\text{rep}(\Sigma)}$. Maintenant, soit Γ' la composante de $\Gamma_{\text{rep}(\Sigma)}$ qui contient Δ . On a que Δ est connexe, convexe et intersecte la τ -orbite de tout sommet de Γ' au plus une fois. De plus, Δ satisfait à la condition S4 de [30, section 3.1], c'est-à-dire la condition

(S4) Soit $x \rightarrow y$ une flèche de Γ' . Si $x \in \Delta$, alors y ou τy est dans Δ . Si $y \in \Delta$, alors x ou $\tau^{-1}x$ est dans Δ .

Pour montrer que Δ est une section de Γ' , on doit montrer que Δ intersecte la τ -orbite de tout sommet de Γ' exactement une fois. Supposons le contraire. Soit x un sommet de Γ' dont la τ -orbite n'intersecte pas Δ . Soit ω une marche finie de Γ reliant x et Δ . Sans perte

de généralité, on peut supposer que tous les sommets de ω autres que x ont une τ -orbite qui intersecte Δ . En particulier, il existe une flèche α de Γ' qui relie x et y telle que la τ -orbite de y intersecte Δ . Soit n un entier tel que $\tau^n y \in \Delta$. Supposons que $\alpha : x \rightarrow y$. Si n est positif, on a une flèche $\alpha' : \tau^n y \rightarrow \tau^{n-1} x$. La condition $S4$ nous permet d'affirmer que $\tau^{n-1} x$ ou $\tau^n x$ est dans Δ . Si n est négatif, alors on a une flèche $\alpha' : \tau^n x \rightarrow \tau^n y$. La condition $S4$ nous permet d'affirmer que $\tau^n x$ ou $\tau^{n-1} x$ est dans Δ . Dans les deux cas, on obtient que la τ -orbite de x intersecte Δ , une contradiction. De même, le cas où $\alpha : y \rightarrow x$ mène également à une contradiction. Ainsi, Δ est une section de Γ' . Une section finie d'une composante du carquois d'Auslander-Reiten d'une algèbre héréditaire de dimension finie est nécessairement à l'intérieur d'une composante préprojective ou préinjective, donc une composante de la forme $\mathbb{N}\Sigma^{\text{op}}$ ou $\mathbb{N}^-\Sigma^{\text{op}}$. Puisque Δ est une section, les graphes sous-jacents à Δ et Σ sont les mêmes, ce qui est une contradiction puisque Σ a plus de sommets que Δ . \square

Il reste maintenant à regarder les composantes qui contiennent des représentations injectives de \mathcal{I} ou des représentations projectives de \mathcal{P} . Nous avons d'abord besoin du lemme suivant.

Lemme 6.5.8. *Soit M une représentation indécomposable de dimension finie et de support Σ . Soit x un successeur immédiat de Σ dans Q qui n'est pas dans Σ et y un prédécesseur immédiat de Σ dans Q qui n'est pas dans Σ . On a les énoncés suivants :*

- (a) $x \in \text{supp}(\tau M)$,
- (b) $y \in \text{supp}(\tau^- M)$,
- (c) $\text{supp}(\tau M) \neq \Sigma$.

Démonstration. Comme Σ n'est pas stable pour les successeurs, M n'est pas projectif. Soit $f : E \rightarrow M$ le morphisme minimal presque scindé à droite se terminant en M . Soient

$\alpha : z \rightarrow x$ une flèche avec $z \in \Sigma$ et M_x la représentation telle que pour $u \in Q_0$,

$$M_x(u) = \begin{cases} M(u) & \text{si } u \in \Sigma, \\ M(z) & \text{si } u = x, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et pour $\beta \in Q_1$,

$$M_x(\beta) = \begin{cases} M(\beta) & \text{si } \beta : u \rightarrow v \text{ avec } u, v \in \Sigma, \\ \text{Id} & \text{si } \beta = \alpha, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $g : M_x \rightarrow M$ le morphisme de représentations tel que, pour $u \in Q_0$, $g_u = \text{Id}$ si $u \neq x$ et $g_x = 0$. Il est évident que g n'est pas une rétraction. Par conséquent, il existe un morphisme $h : M_x \rightarrow E$ tel que $g = fh$. Si $h_x = 0$, alors le morphisme h induit un morphisme $h' : M \rightarrow E$ avec $1_M = fh'$, ce qui est une contradiction. Ainsi, $h_x \neq 0$, ce qui signifie que $x \in \text{supp}(E)$. Puisque $x \notin \text{supp}(M)$, on a que $x \in \text{supp}(\tau M)$. (b) est dual à (a).

Maintenant, supposons que $\text{supp}(\tau X) = \Sigma$. Selon (a), cela implique que Σ ne possède pas de successeurs immédiats. Puisque $\tau^-(\tau M) = M$ est également de support Σ , on trouve, en vertu de (b), que Σ ne possède pas de prédécesseurs immédiats. Ainsi $\Sigma = Q$, ce qui est absurde puisque Q est infini. Cela prouve (c). \square

Pour toute flèche $\alpha : a \rightarrow b$ de Q , on introduit son inverse formel noté α^{-1} de source b et de but a . Une **marche finie** (ou simplement marche, s'il n'y a pas de risque de confusion) dans un carquois Q est une suite finie $\omega = \omega_1\omega_2 \dots \omega_n$ telle que pour $1 \leq i \leq n$, ω_i est une flèche ou l'inverse formel d'une flèche et pour $2 \leq i \leq n$, la source de ω_i est égale au but de ω_{i-1} . On dit que la marche ω est **réduite** si pour $2 \leq i \leq n$, ω_i n'est pas l'inverse de ω_{i-1} .

Une **marche infinie** dans Q est une suite infinie $\omega_1\omega_2 \dots$ dans laquelle, pour $n \geq 1$, $\omega_1\omega_2 \dots \omega_n$ est une marche finie. Si ω est une marche (finie ou infinie) de Q telle que

les sources de ses composantes ω_i sont deux à deux différentes, alors ω est appelée une **marche acyclique**. Si, en plus, ω est telle que tous les ω_i sont des flèches sauf peut-être un nombre fini, alors ω est appelée une **marche acyclique quasi-dirigée**. Notons que toute marche acyclique finie est acyclique quasi-dirigée. Par contre, une marche acyclique infinie quasi-dirigée $\omega = \omega_1\omega_2\cdots$ est telle qu'il existe un entier positif n tel que ω_i est une flèche pour tout $i \geq n$. Notons que puisque Q est connexe et infini, tout sommet de Q est la source d'une marche acyclique infinie. Si Σ est un sous-carquois de Q et ω est une marche acyclique telle que l'intersection de Σ et ω consiste seulement en le point de départ de ω , alors on appelle ω une marche Σ -**acyclique**. Remarquons finalement que si Σ est un sous-carquois fini de Q et que $\omega = \omega_1\omega_2\cdots$ est une marche acyclique infinie, alors il existe un entier positif n tel que $\omega_n\omega_{n+1}\cdots$ est disjointe de Σ . Ces définitions nous permettent d'énoncer le lemme suivant.

Lemme 6.5.9. *Soient X une représentation indécomposable de dimension finie et de support Σ et $\omega = \omega_1\omega_2\cdots$ une marche Σ -acyclique infinie.*

(a) *Si ω_1 est une flèche, alors*

$$\omega \cap \text{supp}(\tau^n X) \neq \omega \cap \text{supp}(\tau^m X) \neq \emptyset \quad \text{si } m > n \geq 0.$$

En particulier, X est stable à gauche et n'est pas préprojectif.

(b) *Si ω_1 est l'inverse d'une flèche et si $\tau^{-n} X$ n'est pas de dimension infinie pour $n \geq 1$, alors*

$$\omega \cap \text{supp}(\tau^n X) \neq \omega \cap \text{supp}(\tau^m X) \neq \emptyset \quad \text{si } m < n \leq 0.$$

En particulier, X est stable à droite et n'est pas préinjectif.

(c) *Si ω est acyclique quasi-dirigée et ω_1 est l'inverse d'une flèche, alors il existe un entier positif n tel que $\tau^{-n} X$ est de dimension infinie.*

Démonstration. (a) Supposons que pour $i \geq 1$, la source de ω_i est notée i . Pour chaque entier n , posons $i_n = 0$ si ω est disjoint de $\text{supp}(\tau^n X)$ et, autrement, i_n est l'entier

maximal tel que $i_n \in \text{supp}(\tau^n M)$. Un tel entier existe puisque $\tau^n M$ est de dimension finie pour tout n . En vertu du lemme précédent, on a que $2 \in \text{supp}(\tau X)$ de sorte que $i_1 > 1 = i_0$. Nous montrons, par récurrence, que $i_n > i_{n-1}$ pour $n \geq 1$. Supposons que $n \geq 1$ est tel que $i_n > i_{n-1}$. Si ω_{i_n} est une flèche, le lemme 6.5.8 nous donne que $i_n + 1 \in \text{supp}(\tau^{n+1} M)$ de sorte que $i_{n+1} > i_n$. Si ω_1 est l'inverse d'une flèche, alors $i_n + 1 \in \text{supp}(\tau^{-1} \tau^n M) = \text{supp}(\tau^{n-1} M)$, une contradiction du fait que $i_{n-1} < i_n$. On a donc bien que $i_n > i_{n-1}$ pour $n \geq 1$ et cela prouve (a).

(b) La preuve de ce cas est duale à celle de (a).

(c) Supposons donc que ω_1 est l'inverse d'une flèche et que ω est acyclique quasi-dirigée. Supposons, au contraire, que pour $n \geq 1$, $\tau^{-n} X$ n'est pas de dimension infinie pour $n \geq 1$. Pour chaque entier non négatif n , posons $i_n = 0$ si ω est disjoint de $\text{supp}(\tau^{-n} X)$ et, autrement, i_n est l'entier maximal tel que $i_n \in \text{supp}(\tau^{-n} M)$. Comme dans le cas précédent, on obtient que $\{i_n\}_{n \geq 1}$ est une suite croissante. Par conséquent, il existe un entier minimal m tel que i_m est un sommet du chemin infini à droite de ω . Comme ω_{i_m} est une flèche, on a que $i_m + 1 \in \text{supp}(\tau \tau^{-m} X) = \text{supp}(\tau^{-(m-1)} X)$, ce qui contredit la minimalité de m . Ainsi, il existe un entier positif n tel que $\tau^{-n} X$ est de dimension infinie. \square

Ce lemme nous permet d'obtenir le résultat suivant.

Proposition 6.5.10. *Une composante Γ du carquois d'Auslander-Reiten $\Gamma_{\text{rep}^+(Q)}$ ne peut contenir à la fois une représentation injective de \mathcal{I} et une représentation projective.*

Démonstration. Supposons le contraire. Soit Δ le sous-carquois plein de Γ qui contient tous les sommets qui correspondent à des représentations de \mathcal{I} . Alors Δ est une section à l'extrême droite. Par conséquent, s'il existe $Y \in \mathcal{P}$ dans Γ , alors il existe un entier positif n tel que $\tau^{-n} Y \in \Delta$. On obtient donc une τ -orbite finie dans Γ . Par contre, si Σ note le

support de $\tau^{-n}Y \in \mathcal{I}$, alors, puisque Σ est fini et est stable pour les prédécesseurs, il existe une marche Σ -acyclique infinie $\omega = \omega_1\omega_2 \cdots$ telle que ω_1 est une flèche. Cela implique, en vertu du lemme 6.5.9 (a), que $\tau^{-n}Y$ est stable à gauche, une contradiction. \square

Dans les énoncés qui suivent, on note, par abus de notation, Q^{op} le carquois obtenu à partir de Q^{op} en remplaçant les flèches multiples par les valuations symétriques correspondantes.

Proposition 6.5.11. *Soit Γ une composante de $\Gamma_{\text{rep}^+(Q)}$ contenant une représentation injective de \mathcal{I} . Alors $\Gamma = \mathbb{N}^-Q^{\text{op}}$. De plus, Γ est préinjective et admet une section à l'extrême droite qui contient toutes les représentations de \mathcal{I} .*

Démonstration. Comme dans le cas d'une algèbre de dimension finie, il est facile de vérifier que lorsque I est injective et indécomposable dans \mathcal{I} , alors $I \rightarrow I/\text{soc}(I)$ est un morphisme minimal presque scindé à gauche. Maintenant, tout facteur direct de $I/\text{soc}(I)$ est injectif, puisque $\text{rep}^+(Q)$ est héréditaire. Si $I = I_x$, alors $I/\text{soc}(I) = \bigoplus I_{x_i}$ où les x_i sont tous les prédécesseurs immédiats de x dans Q , en comptant les multiplicités. En utilisant le fait qu'une base de $\text{Hom}(I_x, I_{x_i})$ correspond à l'ensemble des chemins de x_i vers x , on obtient qu'une base de $\text{Irr}(I_x, I_{x_i})$ correspond aux flèches de x_i vers x . Par conséquent, les morphismes irréductibles commençant en une représentation injective de \mathcal{I} sont donnés par le carquois Q^{op} (où l'on a remplacé les flèches multiples par la valuation symétrique correspondante). Soit Δ le sous-carquois plein de Γ qui contient tous les sommets de \mathcal{I} . Selon les lemmes 6.5.4 et 6.5.5, $\Delta = Q^{\text{op}}$ est une section de Γ . Puisqu'il n'y a pas de cycles orientés dans Γ et que tout sommet de Δ est stable à gauche, on obtient que $\Gamma = \mathbb{N}^-Q^{\text{op}}$. \square

Étant donné le carquois Q , construisons un nouveau carquois noté Γ_P comme suit. Considérons d'abord le carquois $\mathbb{N}Q^{\text{op}}$, dans lequel les flèches multiples sont remplacées par

les valuations symétriques correspondantes. À chaque sommet projectif u (qui est de la forme $(0, x)$ avec $x \in Q_0$), on associe un élément $f(u)$ dans $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. C'est le nombre de chemins commençant en x dans Q (ce qui correspond à la dimension de P_x). Maintenant, si $u \rightarrow v$ est une flèche dans $\mathbb{N}Q^{\text{op}}$ avec $f(u) = \infty$, alors on pose $f(v) = \infty$. Si u est un sommet de $\mathbb{N}Q^{\text{op}}$ et v_1, v_2, \dots, v_r sont tous les successeurs immédiats de u (en comptant les multiplicités) dans $\mathbb{N}Q^{\text{op}}$ et que $f(v_i) < \infty$ pour tout i , alors on pose

$$f(\tau^-u) = \sum_{i=1}^r f(v_i) - f(u).$$

Lemme 6.5.12. *On peut définir uniquement une fonction additive $f : \mathbb{N}Q^{\text{op}} \rightarrow \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ qui respecte les propriétés ci-haut.*

Démonstration. Si $u = (1, x)$ avec $x \in Q_0$, alors on a deux cas. Soit il existe un chemin infini à gauche dans τ^-Q^{op} se terminant en $(1, x)$ dans lequel cas $f((0, x))$ est infini et donc, $f((1, x))$ doit également être infini. Soit il n'existe pas de chemins infinis à gauche se terminant en $(1, x)$ dans τ^-Q^{op} . Dans ce cas, soit n_x la longueur du chemin le plus long se terminant en $(1, x)$ dans τ^-Q^{op} . Un tel chemin maximal existe car autrement, en vertu du lemme de König, on obtient un chemin infini à gauche se terminant en $(1, x)$ dans τ^-Q^{op} . On procède par récurrence sur n_x . Si $n_x = 0$, tout prédécesseur de $(1, x)$ est dans Q^{op} et on peut définir $f((1, x))$. Supposons que $n_x > 0$. Alors tout prédécesseur de $(1, x)$ dans $\mathbb{N}Q^{\text{op}}$ est soit dans Q^{op} ou soit de la forme $(1, y)$ avec $n_y < n_x$. Cela montre que l'on peut définir $f((1, x))$ et donc définir $f(u)$ pour tout $u \in \tau^-Q^{\text{op}}$. En appliquant cette règle récursivement, on obtient une unique fonction additive $f : \mathbb{N}Q^{\text{op}} \rightarrow \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ qui respecte les propriétés que l'on vient de mentionner. \square

On définit le carquois Γ_P comme étant le sous-carquois plein de $\mathbb{N}Q^{\text{op}}$ des sommets u tels que $f(\tau u) < \infty$ ou u est un sommet projectif. On a le résultat suivant.

Proposition 6.5.13. *Soit Γ une composante du carquois d'Auslander-Reiten de $\text{rep}^+(Q)$ contenant une représentation projective de $\text{rep}^+(Q)$. Alors $\Gamma = \Gamma_{\mathcal{P}}$. De plus, Γ est préprojective et admet une section à l'extrême gauche qui contient toutes les représentations de \mathcal{P} .*

Démonstration. Comme dans la preuve de la proposition 6.5.11, on obtient que les représentations de \mathcal{P} forment une section à l'extrême gauche de Γ qui est donnée par le carquois Q^{op} , dans lequel on a remplacé les flèches multiples par les valuations symétriques correspondantes. Dans ce cas, on a que Γ est un sous-carquois plein de $\mathbb{N}Q^{\text{op}}$. La seule différence avec la preuve du cas de la composante préinjective étant que ce carquois Γ n'est pas nécessairement stable à droite puisque pour X projectif, il est possible que $\tau^{-n}X$ avec $n \geq 0$ soit de dimension infinie et donc que $\tau^{-n-1}X$ ne soit pas défini dans $\Gamma_{\text{rep}^+(Q)}$. La fonction $g = \dim_k$ est additive sur Γ . On a $g(u) = f(u)$ lorsque u est un sommet projectif de $\mathbb{N}Q^{\text{op}}$. De plus, si $u \rightarrow v$ est une flèche de Γ telle que $g(u) = \infty$, alors on doit avoir $g(v) = \infty$. Par conséquent f et g coïncident sur Γ . Il est clair que Γ est le sous-carquois plein de $\mathbb{N}Q^{\text{op}}$ des sommets u tels que $g(\tau u) < \infty$ ou u est projectif. Cela achève la preuve. \square

On a le corollaire suivant qui nous donne un peu plus d'information sur la composante préprojective $\Gamma_{\mathcal{P}}$.

Corollaire 6.5.14. *On a deux cas possibles.*

- (a) *Si Q n'a pas de chemins infinis à droite, alors $\Gamma_{\mathcal{P}} = \mathbb{N}Q^{\text{op}}$.*
- (b) *Sinon, $\Gamma_{\mathcal{P}}$ contient une section à l'extrême droite qui contient toutes les représentations de dimension infinie de $\Gamma_{\mathcal{P}}$. En particulier, toute τ -orbite de $\Gamma_{\mathcal{P}}$ est finie.*

Démonstration. On remarque que si Q n'a pas de chemins infinis à droite, alors $f(u) < \infty$ pour tout sommet projectif de $\mathbb{N}Q^{\text{op}}$. On obtient donc, en regardant la construction dans

la preuve du lemme 6.5.12, que $f(u) < \infty$ pour tout sommet de u de $\mathbb{N}Q^{\text{op}}$, ce qui donne que $\Gamma_P = \mathbb{N}Q^{\text{op}}$. Si Γ_P contient une représentation de dimension infinie, alors soit Δ le sous-carquois plein de Γ_P qui contient toutes les représentations de dimension infinie. On a vu que Δ est une section à l'extrême droite de Γ_P . Comme on a aussi une section à l'extrême gauche, soit Q^{op} , toute τ -orbite doit être de longueur finie. \square

Remarquons que si Q est comme dans les cas (b) et (c) du théorème 6.4.4, alors \mathcal{I} est vide. Si Q est comme dans le cas (a) de ce théorème, c'est-à-dire si Q n'a pas de chemins infinis à gauche, alors \mathcal{I} est non vide.

Corollaire 6.5.15. *Les composantes de $\Gamma_{\text{rep}^+(Q)}$ sont les suivantes.*

- (a) *Une composante préinjective $\mathbb{N}^-Q^{\text{op}}$ si \mathcal{I} est non vide,*
- (b) *De possibles composantes régulières de type $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$,*
- (c) *De possibles composantes régulières de type \mathbb{N}^-A_∞ ,*
- (d) *Une composante préprojective Γ_P définie plus haut.*

Corollaire 6.5.16. *Supposons que Q ne contient pas de chemins infinis. Alors les composantes de $\Gamma_{\text{rep}^+(Q)}$ sont les suivantes.*

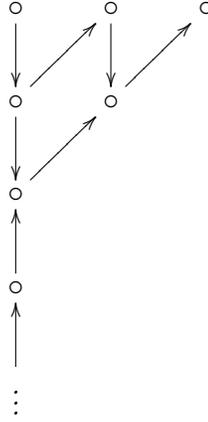
- (a) *Une composante préinjective $\mathbb{N}^-Q^{\text{op}}$,*
- (b) *De possibles composantes régulières de type $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$,*
- (c) *Une composante préprojective de type $\mathbb{N}Q^{\text{op}}$.*

Démonstration. Si Q ne contient pas de chemins infinis, alors $\text{rep}^+(Q) = \text{rep}^b(Q)$ et il n'y a pas de composantes de la forme \mathbb{N}^-A_∞ . De plus, dans ce cas, on a vu que $\Gamma_P = \mathbb{N}Q^{\text{op}}$. \square

Exemples 6.5.17. (a) *Soit le carquois suivant*

$$\circ \leftarrow \circ \leftarrow \circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ \rightarrow \dots$$

Un calcul direct donne que la composante $\Gamma_{\mathcal{P}}$ est la suivante :



Dans ce cas, on peut montrer qu'il n'y a pas de composantes de type $\mathbb{N}^- \mathbb{A}_\infty$ ni de composantes de type $\mathbb{Z} \mathbb{A}_\infty$. Cela sera discuté dans une section ultérieure.

(b) Considérons maintenant le carquois

$$\cdots \leftarrow -2 \leftarrow -1 \leftarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow \cdots .$$

Toute représentation projective indécomposable de \mathcal{P} est de dimension infinie. Par conséquent, la composante préprojective $\Gamma_{\mathcal{P}}$ de ce carquois correspond aux représentations projectives, c'est-à-dire $Q^{\text{op}} = Q$. Cette composante ne contient donc aucune suite presque scindée. Considérons les représentations $M_1 = P_0/P_1$ et $M_2 = P_0/P_{-1}$. On a

$$M_1 = \cdots \leftarrow k \leftarrow k \leftarrow k \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

et

$$M_2 = \cdots \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow k \rightarrow k \rightarrow k \rightarrow \cdots$$

avec toutes les applications linéaires l'application identité. Un exercice facile donne que $\tau^i M_j \neq 0$ pour $j = 1, 2$ et $i > 0$. Ceci signifie que ces deux représentations sont dans des composantes de type $\mathbb{N}^- \mathbb{A}_\infty$. On verra dans une section ultérieure que dans ce cas, on a deux composantes de type $\mathbb{N}^- \mathbb{A}_\infty$ et aucune composante de type $\mathbb{Z} \mathbb{A}_\infty$. Les représentations M_1 et M_2 sont dans des composantes régulières différentes.

On dit qu'une représentation indécomposable M de $\text{rep}^+(Q)$ est **régulière** si cette représentation n'est ni préinjective ni préprojective. Cela signifie que $\tau^m M$ est défini pour tout entier positif m et que, ou bien $\tau^{-m} M$ est défini pour tout entier positif m , ou bien il existe un entier non-négatif n tel que $\tau^{-n} M$ est de dimension infinie. Pour conclure cette section, on donne une condition suffisante sur Q pour que toutes les composantes régulières soient de type $\mathbb{N}^- \mathbb{A}_\infty$.

Proposition 6.5.18. *Supposons que Q est tel que toute marche acyclique infinie est quasi-dirigée. Alors toute composante régulière de $\Gamma_{\text{rep}^+(Q)}$ est de type $\mathbb{N}^- \mathbb{A}_\infty$.*

Démonstration. Soit X une représentation indécomposable régulière de dimension finie. Il est suffisant de montrer qu'il existe un entier positif n pour lequel $\tau^{-n} X$ est de dimension infinie. Soit Ω le support de X . Soit Σ' le sous-carquois plein de Q contenant les sommets y avec

- (1) $y \notin \Omega$,
- (2) Il existe une marche Ω -acyclique $\omega_y = \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_r$ se terminant en y telle qu'il n'y a pas de marche Ω -acyclique infinie commençant avec ω_1 .

On prétend que Σ' est fini. Sinon, puisque Q est localement fini et que Ω est fini, il existe une famille infinie $\{x_i\}_{i \geq 1}$ de sommets de Σ' et un élément α (qui est une flèche ou l'inverse d'une flèche) tels que pour $i \geq 1$, ω_{x_i} commence avec α . De plus, il n'y a pas de marche Ω -acyclique infinie commençant avec α . Or, comme la famille $\{x_i\}_{i \geq 1}$ est infinie, le lemme de König nous donne justement une marche Ω -acyclique infinie commençant avec α , une contradiction. Maintenant, posons $\Sigma = \Omega \cup \Sigma'$. Soit $\alpha : u \rightarrow v$ avec $u \in \Sigma$ et $v \notin \Sigma$. Si $u \in \Omega$, alors la définition de Σ' nous donne que α est la première flèche d'une marche Ω -acyclique infinie. Si $u \notin \Omega$, alors $u \in \Sigma'$. Par conséquent, il existe une marche Ω -acyclique $\omega_u = \omega_1 \cdots \omega_r$ se terminant en u telle que ω_1 n'est pas le premier élément d'une marche Ω -acyclique infinie. Notons que pour $1 \leq i \leq r$, le but de ω_i est dans Σ' .

Ainsi, $\omega_1 \cdots \omega_r \alpha$ est une marche Ω -acyclique se terminant en v telle qu'il n'y a pas de marche Ω -acyclique infinie commençant en ω_1 . Cela signifie que $v \in \Sigma$, une contradiction. Cela montre que si $\alpha : u \rightarrow v$ est une flèche avec $u \in \Sigma$ et $v \notin \Sigma$, alors $u \in \Omega$ et il y a une marche Ω -acyclique infinie commençant en α . De même, toute flèche $\alpha : v \rightarrow u$ avec $u \in \Sigma$ et $v \notin \Sigma$ est telle que $u \in \Omega$ et il existe une marche Ω -acyclique infinie commençant en α^{-1} .

On prétend que l'on peut se restreindre au cas où pour $i \geq 1$, le support de $\tau^{-i}X$ est contenu dans Σ . Supposons donc qu'il existe un entier positif i tel que le support de $\tau^{-i}X$ n'est pas contenu dans Σ . Soit u un sommet du support de $\tau^{-i}X$ qui n'est pas dans Σ . Il existe une marche Σ -acyclique $\rho = \rho_1 \rho_2 \cdots \rho_n$ qui relie Σ et u . Selon ce qui a été montré, la dernière marche est une marche Ω -acyclique et il existe une marche Ω -acyclique infinie $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots$ avec $\sigma_1 = \rho_n$. Notons qu'aucun des buts des σ_i n'est dans Σ . Ainsi,

$$\nu = \rho_n^{-1} \cdots \rho_2^{-1} \sigma_2 \sigma_3 \cdots$$

est une marche infinie disjointe de Σ et commence en un sommet du support de $\tau^{-i}X$. Si nécessaire, on peut réduire la marche ν en une marche $\text{supp}(\tau^{-i}X)$ -acyclique infinie $\mu = \mu_1 \mu_2 \mu_3 \cdots$ qui est disjointe de Σ . Si μ_1 est l'inverse d'une flèche, alors le lemme 6.5.9 et le fait que μ est quasi-dirigée donnent le résultat. Sinon, μ_1 est une flèche et pour $j \geq 0$, $\text{supp}(\tau^{-i+j}X)$ contient un sommet de μ . En particulier, $\Omega = \text{supp}(\tau^{-i+i}X)$ contient un sommet de μ , une contradiction. Par conséquent, on a montré que l'on peut supposer que $\text{supp}(\tau^{-i}X)$ est non-vide et est contenu dans Σ pour tout entier positif i .

Soit s le nombre de sommets dans Σ . Le nombre de sous-carquois pleins de Σ est $t = 2^s$. Soit $Y = \tau^{-t-1}X$. Selon le lemme 6.5.9, il existe une direction dans la τ -orbite de Y telle que toutes les représentations ont des supports deux à deux différents. Ainsi, pour $0 \leq i \leq t+1$, ou bien les $\text{supp}(\tau^i Y) \subseteq \Sigma$ sont deux à deux différents ou bien les $\text{supp}(\tau^{-i} Y) \subseteq \Sigma$ sont deux à deux différents. Ceci est une contradiction. \square

6.6 Les carquois de type Dynkin infini

Dans cette section, nous étudions les cas où le graphe sous-jacent de Q est de type Dynkin infini. On montre que le nombre de composante régulières (toutes de type $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$ ou $\mathbb{N}^-\mathbb{A}_\infty$) est fini.

Un carquois Q dont le graphe sous-jacent est de type \mathbb{A}_∞ , \mathbb{D}_∞ ou \mathbb{A}_∞^∞ , c'est-à-dire que le graphe sous-jacent de Q est respectivement l'un des graphes suivants

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{A}_\infty : \circ - \circ - \circ - \circ - \dots \\ \mathbb{D}_\infty : \quad \quad \quad | \\ \quad \quad \quad \circ \\ \mathbb{A}_\infty^\infty : \dots - \circ - \circ - \circ - \circ - \dots \end{array} \right.$$

est dit de type **Dynkin infini**.

Avant de commencer l'étude des représentations de tels carquois, nous avons besoin de la notion de foncteur de réflexion. Cela sera utile pour étudier les représentations des carquois de type \mathbb{D}_∞ . Les foncteurs de réflexion sont bien connus pour les carquois finis depuis Bernstein, Gelfand et Ponomarev dans [13]. Nous avons cependant besoin de certains résultats reliés à ces foncteurs mais lorsque Q est infini et localement fini. Soit Q un carquois localement fini et a un puits dans ce carquois. On note Q_a le carquois obtenu à partir de Q en renversant l'orientation de toutes les flèches dont le but est a . On peut définir un foncteur de réflexion

$$\mathcal{S}_a^+ : \text{rep}(Q) \rightarrow \text{rep}(Q_a),$$

comme suit. Soit $\alpha_i : a_i \rightarrow a$, $1 \leq i \leq r$, la liste complète des flèches se terminant en a . Si $M = (M(x), M(\alpha))_{x \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ est dans $\text{rep}(Q)$, alors on pose, pour $v \in Q_0$,

$$\mathcal{S}_a^+(M)(v) = \begin{cases} M(v) & \text{si } v \neq a, \\ \ker(M(\alpha_1) \cdots M(\alpha_r)) & \text{si } v = a. \end{cases}$$

et, pour $\alpha \in Q_1$,

$$\mathcal{S}_a^+(M)(\alpha) = \begin{cases} M(\alpha) & \text{si } \alpha : u \rightarrow v \text{ avec } v \neq a, \\ p_i \circ q & \text{si } \alpha : a_i \rightarrow a. \end{cases}$$

où q est l'inclusion canonique $\mathcal{S}_a^+M(a) \rightarrow \bigoplus_{j=1}^r M(a_j)$ et p_i est la projection canonique $\bigoplus_{j=1}^r M(a_j) \rightarrow M(a_i) = \mathcal{S}_a^+(M)(a_i)$. Maintenant, si $f : M \rightarrow N$ est un morphisme avec $N = (N(x), N(\alpha))_{x \in Q_0, \alpha \in Q_1}$, alors on pose, pour $v \in Q_0$,

$$\mathcal{S}_a^+(f)_v = \begin{cases} f_v & \text{si } v \neq a, \\ f'_a & \text{si } v = a \end{cases}$$

où f'_a est l'unique application k -linéaire qui fait commuter le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{S}_a^+(M)(a) & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^r M(a_i) & \xrightarrow{(M(\alpha_i))} & M(a) \\ & & & & \downarrow \bigoplus_{i=1}^r f(a_i) & & \downarrow f(a) \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{S}_a^+(N)(a) & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^r N(a_i) & \xrightarrow{(N(\alpha_i))} & N(a) \end{array}$$

Une vérification facile nous permet d'affirmer que \mathcal{S}_a^+ est bien un foncteur. On a aussi le foncteur

$$\mathcal{S}_a^- : \text{rep}(Q_a) \rightarrow \text{rep}(Q),$$

qui est défini d'une façon duale. Maintenant, selon [4, théorème 5.3], on sait que si Q est un carquois fini dans lequel a est un puits, alors \mathcal{S}_a^+ et \mathcal{S}_a^- induisent des équivalences quasi-inverses de $\text{rep}(Q)/\text{add}(S_a)$ vers $\text{rep}(Q_a)/\text{add}(S_a)$, où $\text{add}(S_a)$ est la sous-catégorie pleine de $\text{rep}(Q)$ de toutes les sommes directes finies de S_a , S_a étant la représentation simple associée au sommet a . On peut généraliser ce résultat pour les carquois localement fini.

Lemme 6.6.1. *Soit Q un carquois localement fini avec un puits $a \in Q_0$. On a que \mathcal{S}_a^+ induit une équivalence de $\text{rep}(Q)/\text{add}(S_a)$ vers $\text{rep}(Q_a)/\text{add}(S_a)$ avec \mathcal{S}_a^- comme foncteur quasi-inverse.*

Démonstration. Remarquons d'abord que \mathcal{S}_a^+ s'annule sur les objets de $\text{add}(S_a)$ de sorte que \mathcal{S}_a^+ peut être considéré comme un foncteur de $\text{rep}(Q)/\text{add}(S_a)$ vers $\text{rep}(Q_a)/\text{add}(S_a)$. De même, le foncteur \mathcal{S}_a^- peut être considéré comme un foncteur de $\text{rep}(Q_a)/\text{add}(S_a)$ vers $\text{rep}(Q)/\text{add}(S_a)$.

Soient M et N deux représentations avec f un morphisme de M vers N . Soit $M = Z \oplus M'$ avec $Z \in \text{add}(S_a)$ et M' ne contenant pas de facteur direct non nul dans $\text{add}(S_a)$. Alors $p_M : M \rightarrow M'$, la projection canonique, est un isomorphisme dans $\text{rep}(Q)/\text{add}(S_a)$. De même, soit $N = Y \oplus N'$ avec $Y \in \text{add}(S_a)$ et N' ne contenant pas de facteur direct non nul dans $\text{add}(S_a)$. Alors $p_N : N \rightarrow N'$, la projection canonique, est un isomorphisme dans $\text{rep}(Q)/\text{add}(S_a)$. Si la décomposition correspondante de $f : Z \oplus M' \rightarrow Y \oplus N'$ est $f = (f_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$, alors $f_{22} : M' \rightarrow N'$ est tel que $p_N f = f_{22} p_M$, ce qui montre que f est isomorphe à f_{22} . On peut donc supposer que M et N n'ont pas de facteur direct non nul dans $\text{add}(S_a)$. Il suffit alors de montrer que $\mathcal{S}_a^- \mathcal{S}_a^+(f) \cong f$. Soient $\alpha_i : a_i \rightarrow a$, $1 \leq i \leq n$, les flèches se terminant en a dans Q . Puisque M n'a pas de facteur direct non nul dans $\text{add}(S_a)$, on a que $(M(\alpha_i))_{1 \leq i \leq n} : \bigoplus_{i=1}^n M(a_i) \rightarrow M(a)$ est un épimorphisme. Autrement, on a que $M(a)/\text{Im}((M(\alpha_i))_{1 \leq i \leq n}) \neq 0$ est un facteur direct de M isomorphe à une somme directe de copies de S_a , une contradiction. Remarquons que le noyau de $(M(\alpha_i))_{1 \leq i \leq n}$ est $\mathcal{S}_a^+(M)(a)$, par définition. De même, on a que $(N(\alpha_i))_{1 \leq i \leq n} : \bigoplus_{i=1}^n N(a_i) \rightarrow N(a)$ est un épimorphisme de noyau $\mathcal{S}_a^+(N)(a)$. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{S}_a^+(M)(a) & \xrightarrow{(S_a^+(M)(\alpha_i))^T} & \bigoplus_{i=1}^n M(a_i) & \xrightarrow{(M(\alpha_i))} & M(a) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \mathcal{S}_a^+(f)_a & & \downarrow \bigoplus_{i=1}^n f_{a_i} & & \downarrow f_a \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{S}_a^+(N)(a) & \xrightarrow{(S_a^+(N)(\alpha_i))^T} & \bigoplus_{i=1}^n N(a_i) & \xrightarrow{(N(\alpha_i))} & N(a) \longrightarrow 0
\end{array}$$

En utilisant la définition de \mathcal{S}_a^- , on voit que $\mathcal{S}_a^- \mathcal{S}_a^+(M)(a) \cong M(a)$ et que $\mathcal{S}_a^- \mathcal{S}_a^+(M)(\alpha_i) \cong M(\alpha_i)$ de sorte que $\mathcal{S}_a^- \mathcal{S}_a^+(M) \cong M$. De même, $\mathcal{S}_a^- \mathcal{S}_a^+(N) \cong N$. Finalement, $\mathcal{S}_a^- \mathcal{S}_a^+(f)_x = f_x$ si $x \neq a$ et $\mathcal{S}_a^- \mathcal{S}_a^+(f)_a \cong f_a$ de sorte que $\mathcal{S}_a^- \mathcal{S}_a^+(f) \cong f$. \square

Proposition 6.6.2. *Les équivalences de la proposition précédente se restreignent à des équivalences de $\text{rep}^+(Q)/\text{add}(S_a)$ vers $\text{rep}^+(Q_a)/\text{add}(S_a)$.*

Démonstration. Il suffit simplement de montrer que si $M \in \text{rep}^+(Q)$, alors $\mathcal{S}_a^+(M) \in \text{rep}^+(Q_a)$ et si $N \in \text{rep}^+(Q_a)$, alors $\mathcal{S}_a^-(N) \in \text{rep}^+(Q)$. Nous montrons seulement le premier cas car la preuve du second cas est similaire.

Soit $M \in \text{rep}^+(Q)$. Puisque a est un puits, $M(a)$ est une sous-représentation de M . Soit $M' = M/M(a)$. Alors $M' \in \text{rep}^+(Q)$. Il est clair que $\mathcal{S}_a^+(M') \in \text{rep}^+(Q_a)$ si et seulement si $\mathcal{S}_a^+(M) \in \text{rep}^+(Q_a)$. Notons que $\mathcal{S}_a^+(P_x)$ est le module projectif indécomposable associé au sommet x de Q_a si $x \neq a$. Soit

$$0 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f} P_0 \xrightarrow{g} M' \longrightarrow 0$$

une présentation projective minimale de M' . Alors P_0 ne contient pas de facteur direct isomorphe à S_a . La suite de morphismes

$$\mathcal{S}_a^+(P_1) \xrightarrow{\mathcal{S}_a^+(f)} \mathcal{S}_a^+(P_0) \xrightarrow{\mathcal{S}_a^+(g)} \mathcal{S}_a^+(M')$$

est telle que $\mathcal{S}_a^+(g)$ est un épimorphisme et

$$\mathcal{S}_a^+(P_1)(x) \xrightarrow{\mathcal{S}_a^+(f)_x} \mathcal{S}_a^+(P_0)(x) \xrightarrow{\mathcal{S}_a^+(g)_x} \mathcal{S}_a^+(M')(x)$$

est exacte pour $x \neq a$. Ainsi, soit X le noyau de la projection de $\ker(\mathcal{S}_a^+(g))$ vers $\ker(\mathcal{S}_a^+(g))(a)$ et Y le noyau de la projection de $\mathcal{S}_a^+(P_1)$ vers $\mathcal{S}_a^+(P_1)(a)$. Alors $X \cong Y$. Comme $\mathcal{S}_a^+(P_1)$ est projectif et que $\mathcal{S}_a^+(P_1)(a)$ est de dimension finie, on a que $Y \in \text{rep}^+(Q_a)$ et donc que $\ker(\mathcal{S}_a^+(g)) \in \text{rep}^+(Q_a)$. Comme $\text{rep}^+(Q_a)$ est abélienne, on obtient bien que $\mathcal{S}_a^+(M') \in \text{rep}^+(Q_a)$. \square

Selon [28, proposition 2.9], le carquois d'Auslander-Reiten de $\text{rep}^+(Q)/\text{add}(S_a)$ est obtenu à partir du carquois d'Auslander-Reiten de $\text{rep}^+(Q)$ en enlevant le sommet associé à S_a .

Comme les carquois d'Auslander-Reiten de $\text{rep}^+(Q)/\text{add}(S_a)$ et $\text{rep}^+(Q_a)/\text{add}(S_a)$ sont les mêmes, on voit bien que si $M \in \text{rep}^+(Q)$ est indécomposable et non isomorphe à S_a , alors

- (1) M est préprojectif si et seulement si $\mathcal{S}_a^+(M)$ est préprojectif,
- (2) M est préinjectif si et seulement si $\mathcal{S}_a^+(M)$ est préinjectif,
- (3) M est régulier si et seulement si $\mathcal{S}_a^+(M)$ est régulier.

En particulier, le nombre de composantes régulières du carquois d'Auslander-Reiten de $\text{rep}^+(Q)$ et $\text{rep}^+(Q_a)$ est le même.

Supposons maintenant que Q est de type Dynkin infini. Nous avons besoin, dans les sous-sections subséquentes, de la notion de représentation quasi-simple. Une représentation indécomposable M est dite **quasi-simple** si elle est régulière et si elle admet exactement un prédécesseur immédiat dans le carquois d'Auslander-Reiten et au plus un successeur immédiat. Notons qu'étant donné une composante régulière Γ de $\Gamma_{\text{rep}^+(Q)}$, il existe une seule τ -orbite constituée de toutes les représentations quasi-simples de Γ .

6.6.1 Le cas \mathbb{A}_∞^∞

Supposons que le carquois Q est de type \mathbb{A}_∞^∞ . Considérons d'abord le cas où Q ne contient pas de chemins infinis. Supposons que les sommets du carquois sont les éléments de \mathbb{Z} de sorte que i et j sont deux sommets voisins si et seulement si $|i - j| = 1$. Supposons également que les puits sont $\{n_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ et les sources $\{m_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ avec $n_i < m_i < n_{i+1} < m_{i+1}$ pour tout i . La représentation indécomposable dont le support contient les sommets $r, r+1, \dots, s$ et de dimension $s-r+1$ est notée $M_{r,s}$. Toute représentation indécomposable de $\text{rep}^b(Q) = \text{rep}^+(Q)$ est de cette forme.

Étant donné une telle représentation $M_{r,s}$, il existe un sous-carquois plein Σ de Q qui supporte $\tau M_{r,s} \oplus M_{r,s} \oplus \tau^- M_{r,s}$ et qui est de type \mathbb{A}_n pour un certain entier positif n .

On a alors que $M_{r,s}$ est un module de corde sur l'algèbre de corde $k\Sigma$. De plus, les suites presque scindées se terminant ou commençant en $M_{r,s}$ dans $\text{rep}(Q)$ sont des suites presque scindées de $\text{rep}(\Sigma)$. Pour plus de détails sur les modules de corde, le lecteur est invité à consulter [15]. Soit $\alpha : x \rightarrow y$ une flèche de $\Sigma \subset Q$. Soit ρ_1 le plus long chemin de Σ commençant en x et qui ne se factorise pas par α ; ρ_1 pouvant être le chemin trivial e_x . Soit également ρ_2 le chemin le plus long de Σ se terminant en y et qui ne se factorise pas par α ; ρ_2 pouvant être le chemin trivial e_y . Pour une marche finie ω de Q , notons $M(\omega)$ la représentation $M_{r,s}$ si ω admet $r, r+1, \dots, s$ comme sommets. Rappelons que selon [15], on a une suite presque scindée

$$(*) : 0 \rightarrow M(\rho_2) \rightarrow M(\rho_1^{-1}\alpha\rho_2^{-1}) \rightarrow M(\rho_1) \rightarrow 0$$

dans $\text{rep}(\Sigma)$ avec le terme médian indécomposable. Toute suite presque scindée de $\text{rep}(\Sigma)$ avec un terme médian indécomposable est de cette forme, pour les algèbres de corde. Par conséquent, il est aisé de voir qu'une représentation indécomposable $M_{r,s}$ a exactement un successeur immédiat et un prédécesseur immédiat dans le carquois d'Auslander-Reiten de $\text{rep}^+(Q)$ si et seulement si elle est l'une des représentations suivantes.

- (i) $r = s$ et il y a une flèche $r+1 \rightarrow r$ et une flèche $r \rightarrow r-1$,
- (ii) $r = m_i$ et $s = n_{i+1}$ pour un entier i ,
- (iii) $r = s$ et il y a une flèche $r-1 \rightarrow r$ et une flèche $r \rightarrow r+1$,
- (iv) $r = n_i, s = m_i$ pour un entier i .

Remarquons que les représentations simples associées à un sommet qui est un puits ou une source ne sont pas dans cette liste. Maintenant, considérons la représentation M_{m_0, n_1} . On a, en utilisant la forme de la suite presque scindée (*), que

$$\tau M_{m_0, n_1} = \begin{cases} M_{m_0-1, m_0-1} & \text{si } m_0 - 1 \text{ n'est pas un puits,} \\ M_{m_0-1, n_0} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $\tau M_{m_0, n_1} = M_{m_0-1, m_0-1}$, alors

$$\tau^2 M_{m_0, n_1} = \begin{cases} M_{m_0-2, m_0-2} & \text{si } m_0 - 2 \text{ n'est pas un puits,} \\ M_{m_0-1, n_0} & \text{sinon.} \end{cases}$$

En continuant de cette façon, on obtient la τ -orbite suivante, qui est infinie dans les deux directions :

$$\begin{array}{cccccccc} \cdots & \dashrightarrow & M_{m_0-2, m_0-2} & \dashrightarrow & M_{m_0-1, m_0-1} & \dashrightarrow & M_{m_0, n_1} & \dashrightarrow & \cdots \\ \cdots & \dashrightarrow & M_{m_0-1, m_0-1} & \dashrightarrow & M_{m_0, n_1} & \dashrightarrow & M_{n_0+1, n_0+1} & \dashrightarrow & \cdots \end{array}$$

On constate que cette τ -orbite est composée de toutes les représentations quasi-simples de type (i) et (ii) plus haut. De même, toutes les représentations de type (iii) et (iv) sont des représentations quasi-simples dans une même τ -orbite, infinie dans les deux directions. Ainsi, ces deux τ -orbites correspondent à deux composantes régulières de type $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$ dans ce cas.

Maintenant, supposons que Q a exactement une direction dans laquelle il y a un chemin infini à droite, c'est-à-dire qu'il existe un seul chemin infini à droite qui soit maximal. Le carquois Q est donc de la forme

$$\cdots \quad \leftarrow \quad \circ \quad \leftarrow \quad \circ \quad \leftarrow \quad \circ \quad \rightarrow \quad \circ \quad \rightarrow \quad \cdots$$

avec l'orientation des flèches correspondant aux lignes horizontales choisie de telle sorte que Q ne contient qu'un seul chemin infini à droite qui soit maximal. Supposons, comme plus haut, que les sommets du carquois sont les éléments de \mathbb{Z} de sorte que i et j sont deux sommets voisins si et seulement si $|i - j| = 1$. On peut supposer que les sommets du chemin infini à droite correspondent aux entiers non négatifs. Supposons que les puits sont $\{n_i\}_{i \leq 0}$ et les sources $\{m_i\}_{i \leq 0}$ avec $n_i < m_i < n_{i+1} < m_{i+1}$ pour tout i et $m_0 = 0$. Posons $n_1 = \infty$ et $M_{m_0, n_1} = M_{0, \infty}$ comme étant le quotient de P_0 par P_{-1} . Notons que si une représentation M est quasi-simple, alors $\tau^2 M$ est quasi-simple de dimension finie et il existe un sous-carquois Σ de Q qui est de type \mathbb{A}_n pour un certain entier positif n et qui

contient le support de $\tau(\tau^2 M) \oplus \tau^2 M \oplus \tau^-(\tau^2 M)$. On obtient donc que la représentation $\tau^2 M = M_{r,s}$ doit être comme dans la liste plus haut. En utilisant ceci, on obtient une composante régulière de type $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$ où la τ -orbite des représentations quasi-simples est

$$\begin{array}{ccccccc} M_{n_0-1, n_0-1} & \dashrightarrow & \cdots & \dashrightarrow & M_{m_{-1}+1, m_{-1}+1} & \dashrightarrow & M_{n_{-1}, m_{-1}} & \cdots \\ \cdots & \dashrightarrow & M_{2,2} & \dashrightarrow & M_{1,1} & \dashrightarrow & M_{n_0,0} & \dashrightarrow \end{array}$$

Remarquons que $P_{-1} \rightarrow P_0$ est une présentation projective de $M_{0,\infty}$ et que $\tau M_{0,\infty}$, le noyau de $I_{-1} \rightarrow I_0$, est $M_{-1,-1}$ si -1 n'est pas un puits et M_{m_{-1}, n_0} , sinon. En effectuant les calculs comme dans le cas précédent, on obtient la τ -orbite de représentations quasi-simples suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} \dashrightarrow & M_{n_0+1, n_0+1} & \dashrightarrow & \cdots & \dashrightarrow & M_{-1,-1} & \dashrightarrow & M_{0,\infty} \\ & & & & & \cdots & \dashrightarrow & M_{m_{-1}-1, m_{-1}-1} & \dashrightarrow & M_{m_{-1}, n_0} \end{array}$$

Cette τ -orbite correspond à une composante régulière de type $\mathbb{N}^-\mathbb{A}_\infty$ puisque'elle est infinie seulement à gauche. Comme toutes les représentations quasi-simples sont incluses dans ces deux τ -orbites, on a exactement deux composantes régulières, une de type $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$ et l'autre de type $\mathbb{N}^-\mathbb{A}_\infty$.

De façon similaire, si Q a des chemins infinis à droite dans les deux directions, alors on a deux composantes régulières, mais toutes deux de type $\mathbb{N}^-\mathbb{A}_\infty$.

Selon le théorème 6.4.4, il reste à regarder le cas où Q est orienté linéairement. Des considérations similaires aux cas précédents nous donnent que les seules représentations quasi-simples sont les représentations simples et se retrouvent toutes dans la même τ -orbite infinie dans les deux directions. On a donc une seule composante régulière de type $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$ dans ce cas.

6.6.2 Le cas \mathbb{A}_∞

Supposons que Q est de type \mathbb{A}_∞ . Supposons que les sommets de Q sont les éléments de \mathbb{N} de sorte que i et j sont deux sommets voisins si et seulement si $|i - j| = 1$. On

la même orientation dans Q et Q' , alors $\sigma_1 Q = Q'$. Si la flèche reliant 1 et 3 a la même orientation dans Q et Q' mais que la flèche reliant 2 et 3 a une orientation différente dans Q et Q' , alors $\sigma_2 Q = Q'$. Finalement, si ces deux flèches ont des orientations différentes dans Q et Q' , on a $\sigma_1 \sigma_2 Q = Q'$. Supposons que $n > 3$ et que n est minimal pour la propriété de l'énoncé. Soit α la flèche de Q reliant les sommets $n - 1$ et n . Supposons d'abord que $\alpha : n - 1 \rightarrow n$. Supposons qu'il existe $3 \leq m < n$ tel que m est une source de Q et que si $m < s < n$, alors s n'est pas une source de Q . On a alors que

$$\Sigma = \sigma_{n-1} \cdots \sigma_{m+1} \sigma_m Q$$

a le même graphe sous-jacent que Q' et toutes les flèches reliant les sommets plus grand ou égaux à $n - 1$ ont la même orientation dans Σ et dans Q' . On applique l'hypothèse de récurrence. S'il n'existe pas un tel entier m , alors pour $3 \leq i \leq n - 1$, il y a une flèche $i \rightarrow i + 1$ dans Q . En utilisant σ_1 ou σ_2 , on peut ramener Q à un carquois Ω qui admet 3 comme source. On a alors que

$$\Sigma' = \sigma_{n-1} \cdots \sigma_4 \sigma_3 \Omega$$

a le même graphe sous-jacent que Q' et toutes les flèches reliant les sommets plus grand ou égaux à $n - 1$ ont la même orientation dans Σ' et dans Q' . On applique l'hypothèse de récurrence. Le cas où $\alpha : n \rightarrow n - 1$ se prouve de façon similaire. \square

Considérons d'abord le cas où Q n'a pas de chemins infinis. En utilisant les foncteurs de réflexion et le lemme 6.6.3, on peut supposer que le carquois est de la forme

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & \rightarrow & 3 & \leftarrow & 4 & \rightarrow & 5 & \rightarrow & 6 & - & 7 & - & \dots \\ & & \uparrow & & & & & & & & & & \\ & & 2 & & & & & & & & & & \end{array}$$

avec l'orientation des flèches correspondant aux lignes horizontales choisie de telle sorte que Q ne contient pas de chemins infinis. Toute représentation indécomposable de la catégorie $\text{rep}^+(Q) = \text{rep}^b(Q)$ correspond à une représentation indécomposable d'un carquois

de type \mathbb{D}_n pour un entier $n \geq 4$. Par conséquent, on obtient que les représentations indécomposables de $\text{rep}^+(Q)$ sont (voir [4, page 299, exercice 11]) :

- (i) Les représentations $M_{r,s}$, $3 \leq r \leq s$, dont le support contient les sommets $r, r + 1, \dots, s$ et dont la dimension est de $s - r + 1$,
- (ii) Les représentations $M_{i,s}$ pour $i = 1, 2$ et $s \geq 3$ dont le support contient les sommets $i, 3, \dots, s$ et dont la dimension est de $s - 1$,
- (iii) La représentation simple en 1, $M_{1,1}$,
- (iv) La représentation simple en 2, $M_{2,2}$,
- (v) Pour tout $i \geq 0, j > 0$, une représentation $N_{i,j}$ dont le vecteur dimension est

$$(1, 1, \overbrace{2, 2, \dots, 2}^{i \text{ fois}}, \overbrace{1, 1, \dots, 1}^{j \text{ fois}}, 0, 0, \dots).$$

Soient $\{n_i\}_{i \geq 1}$ les puits du carquois tels que $n_i \geq 6$ et $\{m_i\}_{i \geq 1}$ les sources du carquois telles que $m_i \geq 6$. Supposons que $n_i < m_i < n_{i+1} < m_{i+1}$ pour tout $i \geq 1$. On a le lemme suivant.

Lemme 6.6.4. *Soit Q de type \mathbb{D}_∞ comme plus haut. Alors toute représentation quasi-simple a une représentation de la forme $M_{r,s}$ avec $5 \leq r \leq s$ dans sa τ -orbite.*

Démonstration. On prétend d'abord que l'on a que $\tau^-M_{4,t}$ avec $t \geq 4$ est nul ou de la forme $M_{u,v}$ avec $v \geq u \geq 5$. En effet, si $t = 4$, $M_{4,t} = M_{4,4}$ est injectif et $\tau^-M_{4,t} = 0$. Sinon, dans la co-présentation injective minimale $J_0 \rightarrow J_1$ de $M_{4,t}$, on retrouve seulement des facteurs injectifs I_i avec $i \geq 5$. Ainsi, on retrouve seulement des facteurs projectifs P_i avec $i \geq 5$ dans la présentation projective $\nu^-(J_0) \rightarrow \nu^-(J_1)$ de $\tau^-M_{4,t}$. L'affirmation est une conséquence immédiate de ceci. Ensuite, on prétend que $\tau M_{3,t}$ avec $t \geq 3$ est nul ou de la forme $M_{u,v}$ avec $v \geq u \geq 5$. En effet, si $t = 3$, $M_{3,t}$ est projectif et $\tau M_{3,t} = 0$. Sinon, dans la présentation projective minimale $R_1 \rightarrow R_0$ de $M_{3,t}$, on retrouve seulement des facteurs projectifs P_i avec $i \geq 4$. Ainsi, on retrouve seulement des facteurs injectifs I_i

avec $i \geq 4$ dans la co-présentation injective $\nu(R_1) \rightarrow \nu(R_0)$ de $\tau M_{3,t}$. Donc, $\tau M_{3,t} = M_{u,v}$ avec $v \geq u \geq 4$. Si $u = 4$, alors on a montré que $M_{3,t} = \tau^- M_{u,v}$ est nul ou de la forme $M_{u',v'}$ avec $u' \geq 5$, une contradiction. Ainsi, $u \geq 5$. Par conséquent, il est suffisant de montrer que toute représentation quasi-simple admet une représentation de la forme $M_{r,s}$ avec $r \geq 3$ dans sa τ -orbite. Supposons maintenant que $N_{i,j}$ est une représentation quasi-simple. Comme $N_{i,j}$ n'est pas projective, on a une suite presque scindée

$$0 \rightarrow \tau N_{i,j} \rightarrow E \rightarrow N_{i,j} \rightarrow 0$$

avec E indécomposable. Si $\tau N_{i,j}(1) \neq 0$, alors la dimension de $E(1)$ est au moins deux, ce qui est impossible, en regardant la liste des représentations indécomposables de $\text{rep}^+(Q)$. Ainsi, $\tau N_{i,j}(1) = 0$. De même, $\tau N_{i,j}(2) = 0$. On a donc que $\tau N_{i,j} = M_{r,s}$ avec $3 \leq r \leq s$.

Maintenant, il reste à considérer les représentations de la forme $M_{i,s}$ avec $i = 1, 2$ et $s \geq 3$. Soit $\{r_i\}_{i \geq 1}$ la liste des sommets (en ordre croissant) de Q tels que $r_1 = 4$ et $r_i \rightarrow r_i + 1$ est une flèche pour tout $i \geq 1$. Par récurrence sur i avec $i \geq 1$, on montre que

$$\tau^i M_{1,1} = \begin{cases} M_{1,r_i} & \text{si } i \text{ est pair,} \\ M_{2,r_i} & \text{si } i \text{ est impair.} \end{cases}$$

Un calcul direct donne $\tau M_{1,1} = M_{2,4}$ et $\tau M_{2,4} = M_{1,5} = M_{1,r_2}$. Supposons que l'on ait $\tau^i M_{1,1} = M_{1,r_i}$ avec i pair. La présentation projective minimale de M_{1,r_i} est donnée par

$$\left(\bigoplus_{6 \leq n_j < r_i} P_{n_j} \right) \oplus P_3 \oplus P_{r_i+1} \rightarrow \left(\bigoplus_{6 \leq m_j < r_i} P_{m_j} \right) \oplus P_4 \oplus P_1 \rightarrow M_{1,r_i} \rightarrow 0$$

Ainsi, $\tau^{i+1} M_{1,1} = \tau M_{1,r_i}$ est le noyau de l'épimorphisme

$$\left(\bigoplus_{6 \leq n_j < r_i} I_{n_j} \right) \oplus I_3 \oplus I_{r_i+1} \rightarrow \left(\bigoplus_{6 \leq m_j < r_i} I_{m_j} \right) \oplus I_4 \oplus I_1$$

Parmi les facteurs injectifs indécomposables de cette co-présentation, seul I_3 contient le sommet 2 dans son support. Par conséquent, 2 appartient au support du noyau,

c'est-à-dire $\tau^{i+1}M_{1,1}$. Aussi, I_3 et I_1 sont les seuls facteurs injectifs indécomposables qui contiennent le sommet 1 dans leur support. Cela donne que 1 n'est pas dans le support de $\tau^{i+1}M_{1,1}$. Si $r_i + 1$ n'est pas un puits, alors $r_i + 1 = r_{i+1}$ et c'est l'entier le plus grand de $\text{supp}(\tau^{i+1}M_{1,1})$. Si $r_i + 1$ est un puits, alors la prochaine source, soit r_{i+1} , est l'entier le plus grand de $\text{supp}(\tau^{i+1}M_{1,1})$. Par conséquent, la seule possibilité pour $\tau^{i+1}M_{1,1}$ est $M_{2,r_{i+1}}$. La preuve du cas où i est impair est similaire. Cela achève la preuve de l'affirmation.

De même, on a, pour $i \geq 1$,

$$\tau^i M_{2,2} = \begin{cases} M_{2,r_i} & \text{si } i \text{ est pair,} \\ M_{1,r_i} & \text{si } i \text{ est impair.} \end{cases}$$

Dualement, soit $\{s_i\}_{i \geq 1}$ la liste des sommets (en ordre croissant) de Q tels que $s_1 > 3$ et $s_i + 1 \rightarrow s_i$ est une flèche pour tout $i \geq 1$. Par récurrence sur i avec $i \geq 1$, on montre que

$$\tau^{-i} M_{1,3} = \begin{cases} M_{1,s_i} & \text{si } i \text{ est pair,} \\ M_{2,s_i} & \text{si } i \text{ est impair.} \end{cases}$$

De même, pour $i \geq 1$,

$$\tau^{-i} M_{2,3} = \begin{cases} M_{2,s_i} & \text{si } i \text{ est pair,} \\ M_{1,s_i} & \text{si } i \text{ est impair.} \end{cases}$$

Ces calculs montrent que les représentations $M_{i,s}$, avec $i = 1, 2$ et $s \geq 3$ tel qu'il existe une flèche de s vers $s + 1$, sont préinjectives. Les représentations $M_{i,s}$, avec $i = 1, 2$ et $s \geq 3$ tel qu'il existe une flèche de $s + 1$ vers s , sont préprojectives. \square

On a montré que toute représentation quasi-simple contient une représentation de la forme $M_{p,q}$ avec $q \geq p \geq 5$ dans sa τ -orbite. Puisque $M_{p,q}$ est aussi quasi-simple et que le support de $\tau M_{p,q} \oplus M_{p,q} \oplus \tau^{-1} M_{p,q}$ consiste en un carquois de la forme \mathbb{A}_n pour un entier positif n , on a que $M_{p,q}$ satisfait à l'une des conditions suivantes :

- (i) $p = q$ et il y a une flèche $p + 1 \rightarrow p$ et une flèche $p \rightarrow p - 1$,
- (ii) $p = m_i$ et $q = n_{i+1}$ pour un entier i ,

(iii) $p = q$ et il y a une flèche $p - 1 \rightarrow p$ et une flèche $p \rightarrow p + 1$,

(iv) $p = n_i, q = m_i$ pour un entier i .

D'après les calculs du cas \mathbb{A}_∞ , les représentations de la forme (i) et (ii) ont un seul prédécesseur immédiat et un seul successeur immédiat dans le carquois d'Auslander-Reiten et appartiennent à la même τ -orbite. De plus, ces représentations sont stables à droite : si $M_{r,s}$ est de la forme (i) ou (ii), alors $\tau^- M_{r,s}$ est aussi de la forme (i) ou (ii). De même, les représentations de la forme (iii) et (iv) ont un seul prédécesseur immédiat et un seul successeur immédiat dans le carquois d'Auslander-Reiten et appartiennent à la même τ -orbite. De plus, ces représentations sont stables à gauche. Cependant, des calculs directs donnent $\tau^- M_{5,5} = M_{3,4}$, $\tau^- M_{3,4} = N_{0,1}$, $\tau^- N_{0,1} = M_{4,n_1}$ et $\tau^- M_{4,n_1}$ est de la forme $M_{u,v}$ avec $v \geq u \geq 5$ selon la démonstration précédente. Comme le carquois d'Auslander-Reiten ne contient pas de cycles orientés, $M_{u,v}$ doit être de la forme (i) ou (ii). On note que $M_{5,5}$ est de la forme (iii) et $\tau^{-4} M_{5,5}$ de la forme (i) ou (ii). Cela montre que les représentations (i), (ii), (iii) et (iv) sont dans la même τ -orbite. Par conséquent, il y a exactement une τ -orbite de représentations quasi-simples. Cette τ -orbite étant infinie dans les deux directions doit correspondre à une composante régulière de type $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$.

Maintenant, supposons que Q a un chemin infini à droite. En utilisant les foncteurs de réflexion et le lemme 6.6.3, on peut supposer que Q est le carquois suivant.

$$\begin{array}{cccccccc}
 2 & \rightarrow & 3 & \leftarrow & 4 & \rightarrow & 5 & \rightarrow & 6 & \rightarrow & \dots \\
 & & \uparrow & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & &
 \end{array}$$

Les représentations indécomposables de $\text{rep}^b(Q)$ sont comme plus haut. Notons $M_{4,\infty}$ la représentation indécomposable P_4/P_3 et, pour $r \geq 5$, $M_{r,\infty}$ note la représentation P_r . On a le lemme suivant, dont la preuve est similaire à celle du lemme 6.6.4. Nous donnons seulement les grandes lignes et omettons les calculs.

Lemme 6.6.5. *Soit Q de type \mathbb{D}_∞ comme plus haut. Alors toute représentation quasi-simple de dimension finie a une représentation de la forme $M_{r,s}$ avec $5 \leq r \leq s < \infty$ dans sa τ -orbite.*

Démonstration. On a que $\tau^-M_{4,t} = 0$ pour $4 \leq t < \infty$. La représentation $M_{3,t}$ avec $3 \leq t < \infty$ est telle que $\tau M_{3,t}$ est nul ou de la forme $M_{u,v}$ avec $5 \leq u \leq v < \infty$. Par conséquent, il est suffisant de montrer que toute représentation quasi-simple admet une représentation de la forme $M_{r,s}$ avec $3 \leq r \leq s < \infty$ dans sa τ -orbite. On peut montrer que si $N_{i,j}$ est une représentation quasi-simple, alors $\tau N_{i,j} = M_{r,s}$ avec $3 \leq r \leq s < \infty$.

Maintenant, comme $M_{1,3}$ et $M_{2,3}$ sont injectifs, il reste à considérer les représentations de la forme $M_{i,s}$ avec $i = 1, 2$ et $s \geq 4$. On a, par récurrence, que pour $i \geq 1$,

$$\tau^i M_{1,1} = \begin{cases} M_{1,i+3} & \text{si } i \text{ est pair,} \\ M_{2,i+3} & \text{si } i \text{ est impair.} \end{cases}$$

De même, on a, pour $i \geq 1$,

$$\tau^i M_{2,2} = \begin{cases} M_{2,i+3} & \text{si } i \text{ est pair,} \\ M_{1,i+3} & \text{si } i \text{ est impair.} \end{cases}$$

Ces calculs montrent que les représentations $M_{i,s}$, avec $i = 1, 2$ et $s \geq 3$ sont préinjectives. □

Comme dans le cas où Q n'a pas de chemins infinis, on obtient une caractérisation identique pour les représentations de dimension finie ayant seulement un prédécesseur immédiat et un successeur immédiat dans le carquois d'Auslander-Reiten. Selon le lemme précédent, une représentation quasi-simple admet une représentation de la forme $M_{r,s}$ avec $r \geq 5$ et $s < \infty$ dans sa τ -orbite. Cependant, cette dernière représentation admet seulement un prédécesseur immédiat et un successeur immédiat dans le carquois d'Auslander-Reiten si et seulement si $r = s$. Ainsi, chaque τ -orbite de représentations

quasi-simples doit contenir une représentation $M_{r,r}$ avec $r \geq 5$ dans sa τ -orbite. Remarquons que $\tau M_{4,\infty} = N_{0,1}$. Des calculs directs et faciles nous donnent la τ -orbite suivante :

$$\cdots \dashrightarrow M_{7,7} \dashrightarrow M_{6,6} \dashrightarrow M_{5,5} \dashrightarrow M_{3,4} \dashrightarrow N_{0,1} \dashrightarrow M_{4,\infty}$$

C'est donc la seule τ -orbite de représentations quasi-simples. On a donc qu'une seule composante régulière qui est de type $\mathbb{N}^- \mathbb{A}_\infty$ dans ce cas.

En combinant tous les résultats obtenus dans cette section, on a le théorème suivant.

Théorème 6.6.6. *Si le carquois Q est de type Dynkin infini, alors le nombre de composantes régulières de $\Gamma_{\text{rep}^+(Q)}$ est fini.*

- (a) *Si Q est de type \mathbb{A}_∞ , alors il n'y a pas de composantes régulières.*
- (b) *Si Q est de type \mathbb{A}_∞^∞ avec aucun chemin infini à gauche, alors il y a deux composantes régulières. Le nombre de composantes de type $\mathbb{N}^- \mathbb{A}_\infty$ est le nombre de directions pour lesquelles il existe un chemin infini à droite dans le carquois.*
- (c) *Si Q est de type \mathbb{A}_∞^∞ avec l'orientation linéaire, il y a une seule composante régulière de type $\mathbb{Z} \mathbb{A}_\infty$.*
- (d) *Si Q est de type \mathbb{D}_∞ , alors il n'y a qu'une seule composante régulière. Cette composante est de type $\mathbb{N}^- \mathbb{A}_\infty$ lorsque Q a un chemin infini à droite et de type $\mathbb{Z} \mathbb{A}_\infty$, sinon.*

6.7 Le nombre de composantes régulières

Le but de cette section est de déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur Q pour que le nombre de composantes régulières du carquois d'Auslander-Reiten de $\text{rep}^+(Q)$ soit fini. On suppose donc que Q est infini, connexe, localement fini, fini par intervalle et est tel que $\text{rep}^+(Q)$ a des suites presque scindées à droite. Comme les cas (b)

et (c) du théorème 6.4.4 sont réglés : on connaît déjà toutes les composantes du carquois d'Auslander-Reiten dans ces cas, on peut supposer que Q ne contient pas de chemins infinis à gauche.

De deux choses l'une : ou bien Q n'a pas de chemins infinis à droite ou bien Q admet au moins un chemin infini à droite. Dans le premier cas, il est évident que toute composante régulière, si elle existe, doit être de type $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$. Dans le second cas, il peut arriver que l'on ait à la fois des composantes de type $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$ et $\mathbb{N}^-\mathbb{A}_\infty$. Nous montrons que si Q n'est pas de type Dynkin infini et est comme dans le premier cas, alors il y a une infinité de composantes régulières de type $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$. Ensuite, nous montrons que si Q n'est pas de type Dynkin infini et est comme dans le second cas, alors il y a une infinité de composantes régulières de type $\mathbb{N}^-\mathbb{A}_\infty$.

6.7.1 Quelques généralités

Nous commençons par démontrer qu'une représentation préprojective ou préinjective ne peut avoir une auto-extension non nulle. Avant de ce faire, nous avons besoin de deux lemmes.

Lemme 6.7.1. *On a les deux résultats suivants.*

- (a) *Soit X une représentation indécomposable préprojective. Alors X a seulement un nombre fini de prédécesseurs non projectifs dans la composante préprojective.*
- (b) *Soit X une représentation indécomposable préinjective. Alors X a seulement un nombre fini de successeurs dans la composante préinjective.*

Démonstration. Nous montrons seulement le premier énoncé. La preuve du deuxième énoncé est similaire. On utilise le résultat de la section 6.5 affirmant que la composante préprojective est un sous-carquois plein, noté Γ_P , de $\mathbb{N}Q^{\text{op}}$. Supposons, au contraire,

que X a un nombre infini de prédécesseurs non projectifs. Cela signifie qu'il existe un prédécesseur (n, b) de X , où $b \in Q_0$ et $n \geq 1$, tel que (n, b) a un nombre infini de prédécesseurs de la forme (n, a_i) avec $a_i \in Q_0$ et i un entier positif. Par conséquent, le sommet $(0, b)$ lui aussi admet un nombre infini de prédécesseurs, en l'occurrence $(0, a_i)$, pour $i \geq 1$. Cela donne que la représentation correspondante, P_b , est de dimension infinie. Par conséquent, par définition de Γ_P , les sommets (m, b) avec $m \geq 1$ ne sont pas dans Γ_P , une contradiction. \square

Dans le résultat suivant, on considère les composantes préprojectives et préinjectives comme des carquois non valués, en remplaçant la valuation symétrique (a, a) de $x \rightarrow y$ par a flèches de x vers y . Cela a pour but de simplifier les notations.

Proposition 6.7.2. *On a les deux résultats suivants.*

- (a) *Soit X indécomposable, préprojectif et $f : Y \rightarrow X$ un non-isomorphisme non nul avec $Y \in \text{rep}^+(Q)$ indécomposable. Alors f est donné par une combinaison linéaire de chemins dans la composante préprojective. En particulier, Y est un prédécesseur de X dans la composante préprojective.*
- (b) *Soit X indécomposable, préinjectif et $f : X \rightarrow Y$ un non-isomorphisme non nul avec $Y \in \text{rep}^+(Q)$ indécomposable. Alors f est donné par une combinaison linéaire de chemins dans la composante préinjective. En particulier, Y est un successeur de X dans la composante préinjective.*

Démonstration. Nous montrons seulement le premier énoncé. Soit $x \in Q_0$. On montre d'abord, par récurrence, que $\text{End}_A(\tau^{-r}P_x) \cong k$ pour $r \geq 0$ tel que $\tau^{-r}P_x$ est défini. Lorsque $r = 0$, on a

$$\text{End}_A(P_x) \cong e_x A e_x = k \langle e_x \rangle \cong k$$

puisque Q ne contient pas de cycles orientés. Soit $r \geq 1$ tel que $\tau^{-r}P_x$ est défini. Selon la

proposition 6.3.7, on a

$$\underline{\text{End}}_A(\tau^{-r}P_x) \cong \overline{\text{End}}_A(\tau^{-r+1}P_x).$$

Comme $\tau^{-r}P_x$ n'est pas projectif, on a que $\underline{\text{End}}_A(\tau^{-r}P_x) = \text{End}_A(\tau^{-r}P_x)$. De même, puisque $\tau^{-r+1}P_x$ n'est pas injectif et est dans $\text{rep}^-(Q)$, $\overline{\text{End}}_A(\tau^{-r+1}P_x) = \text{End}_A(\tau^{-r+1}P_x)$. Par récurrence, $\text{End}_A(\tau^{-r+1}P_x) \cong k$, ce qui donne que $\text{End}_A(\tau^{-r}P_x) \cong k$. Ceci termine la preuve de l'affirmation. Si $X = P_x$ est projectif, alors Y , en tant que prédécesseur indécomposable d'une représentation projective, doit aussi être projectif et donc $Y = P_y$ pour $y \in Q_0$. En utilisant le fait que $\text{Hom}_A(P_y, P_x)$ admet l'ensemble des chemins de x vers y comme base, on obtient que le morphisme f est donné par une combinaison linéaire de chemins de Q allant de x vers y . Ce morphisme est donc obtenu par la combinaison linéaire correspondante dans la section Q^{op} des représentations projectives de Γ_P . Supposons maintenant que X n'est pas projectif. Soit $n \geq 0$ la longueur maximale d'un chemin dans Γ_P commençant en une représentation non projective et se terminant en X . Un tel entier maximal doit exister en vertu du lemme précédent. On montre le résultat par récurrence sur n . Soit

$$0 \longrightarrow \tau X \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^r E_i \xrightarrow{f} X \longrightarrow 0$$

une suite presque scindée se terminant en X et $f = (f_1, f_2, \dots, f_r)$ la décomposition correspondante de f . Soit $g : Y \rightarrow X$ un non-isomorphisme non nul. On a que g se factorise par $\bigoplus_{i=1}^r E_i$. Par conséquent, il existe un morphisme $h = (h_1, h_2, \dots, h_r)^T : Y \rightarrow \bigoplus_{i=1}^r E_i$ qui donne cette factorisation. Si tous les h_i non nuls sont des isomorphismes (et donc un multiple scalaire du morphisme identité), on a que $g = f_1 h_1 + \dots + f_r h_r$ est une combinaison linéaire des f_i . La preuve est donc terminée dans ce cas. Supposons que $1 \leq j \leq r$ est tel que $h_j : Y \rightarrow E_j$ est un non-isomorphisme non nul. Par récurrence, un tel morphisme est donné par une combinaison linéaire de chemins dans Γ_P . \square

Proposition 6.7.3. *Si X est indécomposable et préprojectif (préinjectif), alors on a $\text{Ext}_A^1(X, X) = 0$.*

Démonstration. La preuve du cas où X est préinjectif est duale et nous l'omettons. Supposons que $\text{Ext}_A^1(X, X) \neq 0$. Alors la formule d'Auslander-Reiten 6.3.5 donne un élément non nul \bar{f} dans $\overline{\text{Hom}}_A(X, \tau X)$. Notons que X n'est ni injectif ni projectif puisque $\text{Ext}_A^1(X, X) \neq 0$. On a que f est un morphisme non nul de X vers τX . Par conséquent, X est un prédécesseur de τX dans la composante préprojective. Ceci contredit le lemme 6.5.3. □

Cette proposition affirme que si X est indécomposable avec une auto-extension non nulle, alors X doit être dans une composante régulière de $\Gamma_{\text{rep}^+(Q)}$.

6.7.2 Le cas général

On montre que si le carquois Q n'est pas de type Dynkin infini, alors $\Gamma_{\text{rep}^+(Q)}$ a un nombre infini de composantes régulières. On commence l'analyse avec cette première proposition.

Proposition 6.7.4. *Le nombre de composantes régulières du carquois d'Auslander-Reiten de $\text{rep}^+(Q)$ est fini si et seulement si Q est de type Dynkin infini.*

Démonstration. La suffisance est prouvée par le théorème 6.6.6. Maintenant, si Q n'est pas de type Dynkin infini, alors il existe un sous-carquois de Q (pas nécessairement plein) de type euclidien. Soit Σ un tel sous-carquois. Pour chaque $\lambda \in \mathbb{P}^1(k)$, il existe une composante Γ_λ de $\Gamma_{\text{rep}(\Sigma)}$ de type $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty/\tau$. Pour chaque tel λ , soit M_λ la représentation indécomposable quasi-simple de la composante Γ_λ . Il est bien connu que toutes ces représentations ont la même dimension, disons d , et ont un même support égal au carquois en entier Σ . De plus, pour $\lambda \in \mathbb{P}^1(k)$, M_λ a une auto-extension non nulle dans $\text{rep}(\Sigma)$ et

donc une auto-extension non nulle dans $\text{rep}(Q)$. Selon le lemme 6.7.3, les représentations M_λ doivent apparaître dans des composantes régulières de $\Gamma_{\text{rep}^+(Q)}$. Soit $\lambda \in \mathbb{P}^1(k)$ et Γ la composante régulière de $\Gamma_{\text{rep}^+(Q)}$ qui contient M_λ . Soit

$$N_r \rightarrow N_{r-1} \rightarrow \cdots \rightarrow N_2 \rightarrow N_1$$

une chaîne de morphismes irréductibles de longueur $r \geq d$ qui contient M_λ avec N_1 quasi-simple et telle que pour $1 \leq i \leq r-2$, $\tau N_i \neq N_{i+2}$. Tous ces morphismes sont des épimorphismes de sorte que si $M_\lambda = N_i$, alors

$$d = \dim_k(N_i) \geq \dim_k(N_r) + i - 1 \geq i.$$

Ainsi, $1 \leq i \leq d$ de sorte que M_λ se retrouve nécessairement dans les d premières τ -orbites de Γ , c'est-à-dire les τ -orbites qui contiennent les représentations N_1, N_2, \dots, N_d . Par conséquent, si le nombre de composantes régulières de $\Gamma_{\text{rep}^+(Q)}$ est fini, alors, puisque $\mathbb{P}^1(k)$ est infini, il existe une τ -orbite \mathcal{O} qui contient une infinité de représentations de la forme M_λ . Soit $M_{\lambda_0} \in \mathcal{O}$ avec $\lambda_0 \in \mathbb{P}^1(k)$. Rappelons que le support de M_{λ_0} est Σ . En vertu du lemme 6.5.9, il existe une direction dans \mathcal{O} dans laquelle toutes les représentations ont un support différent de Σ . Cela montre que \mathcal{O} contient au plus deux représentations dont le support est Σ , une contradiction. \square

Maintenant, on considère le cas où Q contient au moins un chemin infini à droite. Nous montrons que dans ce cas, si Q n'est pas de type Dynkin infini, alors le carquois d'Auslander-Reiten de $\text{rep}^+(Q)$ contient une infinité de composantes régulières de type $\mathbb{N}^- \mathbb{A}_\infty$. On obtient donc une description plus précise que celle de la proposition précédente pour les composantes régulières. Avant de procéder à la preuve de cette proposition, nous avons besoin d'un lemme. Soit Σ un sous carquois (pas nécessairement plein) fini de Q . Pour $x \in \Sigma_0$, nous notons P'_x la représentation projective indécomposable associée à x dans $\text{rep}(\Sigma)$ et I'_x la représentation injective indécomposable associée à x dans $\text{rep}(\Sigma)$.

Notons que P'_x est une représentation indécomposable de $\text{rep}^+(Q)$ qui est un quotient de P_x . De même, I'_x est indécomposable dans $\text{rep}^+(Q)$ et est une sous-représentation de I_x .

Maintenant, si Σ est un sous-carquois non plein de Q , alors on dit qu'une représentation M de $\text{rep}(Q)$ est de support Σ si

- (1) Pour $x \in Q_0$, $M(x) \neq 0$ si et seulement si $x \in \Sigma_0$,
- (2) Pour $\alpha \in Q_1$, $M(\alpha) \neq 0$ implique que $\alpha \in \Sigma_1$.

Pour une représentation X de $\text{rep}^+(Q)$ dont le support est inclu dans Σ et qui n'est pas projective dans $\text{rep}(\Sigma)$, on note $\tau_\Sigma X$ la translation d'Auslander-Reiten de X dans $\text{rep}(\Sigma)$.

Lemme 6.7.5. *Soit M une représentation indécomposable de $\text{rep}(\Sigma)$ qui est non projective dans $\text{rep}(\Sigma)$. Alors pour $x \in \Sigma_0$, on a $\dim_k(\tau M(x)) \geq \dim_k(\tau_\Sigma M(x))$.*

Démonstration. Soit

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^m P'_{y_i} \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n P'_{x_i} \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$$

une présentation projective de M dans $\text{rep}(\Sigma)$ où les x_i et les y_i sont des sommets de Σ . Rappelons que la coiffe d'une représentation N de Q est la représentation semi-simple $\text{top}(N)$ telle que pour $x \in Q_0$, $\text{top}(N)(x) = N(x) / \sum_{\alpha: y \rightarrow x} \text{Im}(N(\alpha))$. Il est donc clair que la coiffe de M dans $\text{rep}(\Sigma)$ est la même que la coiffe de M dans $\text{rep}^+(Q)$. On a donc le diagramme suivant de $\text{rep}^+(Q)$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^n P_{x_i} & \xrightarrow{u} & M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow h & & \downarrow g & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^m P'_{y_i} & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^n P'_{x_i} & \xrightarrow{f} & M \longrightarrow 0 \end{array}$$

où $g = (g_i)_{1 \leq i \leq n}$ est l'épimorphisme dans lequel, pour tout i , $g_i : P_{x_i} \rightarrow P'_{x_i}$ est la projection canonique et K est le noyau de $u = fg$. Le morphisme h est obtenu par passage aux noyaux. Remarquons que K est projectif. Comme ce diagramme est une

somme amalgamée et que g est un épimorphisme, on a que h est un épimorphisme. Ainsi, on a

$$K = \left(\bigoplus_{i=1}^m P_{y_i} \right) \oplus P$$

pour un certain module projectif P . Pour $x, y \in \Sigma_0$, soit $\Sigma(x, y)$ le nombre de chemins de x vers y dans Σ et $Q(x, y)$ le nombre de chemins de x vers y dans Q . On note $F(x, y)$ le nombre de chemins de x vers y dans Q qui ne sont pas des chemins de Σ . On a $F(x, y) = Q(x, y) - \Sigma(x, y)$. Comme $\tau_\Sigma M$ est le noyau de l'épimorphisme

$$\bigoplus_{i=1}^m I'_{y_i} \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n I'_{x_i} \rightarrow 0,$$

on a que pour $x \in \Sigma_0$,

$$\dim_k(\tau_\Sigma M(x)) = \sum_{i=1}^m \Sigma(x, y_i) - \sum_{i=1}^n \Sigma(x, x_i).$$

De même, puisque τM est le noyau de l'épimorphisme

$$\phi : \left(\bigoplus_{i=1}^m I_{y_i} \right) \oplus \nu(P) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n I_{x_i} \rightarrow 0,$$

on a que pour $x \in \Sigma_0$,

$$\begin{aligned} \dim_k(\tau M(x)) &= \sum_{i=1}^m Q(x, y_i) + \dim_k(\nu(P)(x)) - \sum_{i=1}^n Q(x, x_i) \\ &= \sum_{i=1}^m \Sigma(x, y_i) + \sum_{i=1}^m F(x, y_i) + \dim_k(\nu(P)(x)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \Sigma(x, x_i) - \sum_{i=1}^n F(x, x_i). \end{aligned}$$

Soit V_x le sous-espace vectoriel de $\bigoplus_{i=1}^n I_{x_i}(x)$ engendré par les éléments $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ tels que pour $1 \leq i \leq n$, $v_i : x \rightsquigarrow x_i$ est un chemin qui n'est pas dans Σ ou est nul. On a que $\bigoplus_{i=1}^n I_{x_i}(x) = V_x \oplus \bigoplus_{i=1}^n I'_{x_i}(x)$ en tant que k -espace vectoriels. Ensuite, on a que $((\bigoplus_{i=1}^m I_{y_i}) \oplus \nu(P))(x)$ s'écrit comme $\bigoplus_{i=1}^r I_{z_i}(x)$ pour des sommets z_i de Q_0 . Soit

W_x le sous-espace vectoriel de $\bigoplus_{i=1}^r I_{z_i}(x)$ engendré par les éléments $(w_i)_{1 \leq i \leq r}$ tels que pour $1 \leq i \leq r$, $w_i : x \rightsquigarrow z_i$ est un chemin qui n'est pas dans Σ ou est nul. On a que $\bigoplus_{i=1}^r I_{z_i}(x) = W_x \oplus \bigoplus_{i=1}^r I'_{z_i}(x)$ en tant que k -espace vectoriels. Soit $1 \leq i \leq r$ et p un chemin de x vers z_i qui est un chemin de Σ . Supposons que $\phi_x(p) = u + v$ avec $0 \neq u \in V_x$ et $v \in \bigoplus_{i=1}^n I'_{x_i}(x)$. Il existe un chemin $q : x \rightarrow x_j$, $1 \leq j \leq n$, qui n'est pas dans Σ tel que $uq \neq 0$. On a $vq = 0$ et $\phi(p)q = uq + vq = uq \neq 0$. Mais $pq = 0$, ce qui donne $0 \neq \phi(p)q = \phi(pq) = \phi(0) = 0$, une contradiction. Cela montre que $\phi_x(\bigoplus_{i=1}^r I'_{z_i}) \subseteq \bigoplus_{i=1}^n I'_{x_i}$. Ainsi,

$$\phi_x : W_x \oplus \bigoplus_{i=1}^r I'_{z_i} \rightarrow V_x \oplus \bigoplus_{i=1}^n I'_{x_i}$$

s'écrit $\phi_x = \begin{pmatrix} \phi_1 & 0 \\ \phi_2 & \phi_3 \end{pmatrix}$. Comme ϕ_x est un épimorphisme, ϕ_1 est un épimorphisme et

$$\dim_k W_x \geq \dim_k V_x.$$

On a donc

$$\sum_{i=1}^m F(x, y_i) + \dim_k(\nu(P)(x)) \geq \dim_k(W_x) \geq \dim_k(V_x) = \sum_{i=1}^n F(x, x_i)$$

de sorte que l'on trouve

$$\dim_k(\tau M(x)) \geq \sum_{i=1}^m \Sigma(x, y_i) - \sum_{i=1}^n \Sigma(x, x_i) = \dim_k(\tau_\Sigma M(x)).$$

□

Lemme 6.7.6. *Soit Σ un carquois comme plus haut et M une représentation indécomposable de $\text{rep}(\Sigma)$ non injective de support Σ et telle que le support de $\tau_\Sigma^{-1}M$ est Σ . Alors il existe $n \geq 1$ tel que $\tau^{-n}M$ est de dimension infinie.*

Démonstration. Supposons le contraire. Selon l'hypothèse de l'énoncé et en vertu du dual du lemme précédent, on a que le support de τ^-M contient Σ . Puisque Q est connexe et

contient un chemin infini à droite, il existe une marche Σ -acyclique infinie quasi-dirigée $\omega = \omega_1\omega_2\cdots$. Supposons que la source de ω_i est notée i , pour $i \geq 1$. Pour chaque entier n , soit i_n l'entier maximal tel que $i_n \in \text{supp}(\tau^{-n}M)$. Si $\text{supp}(\tau^{-n}M)$ est disjoint de ω ou nul, on pose $i_n = 0$. On a $i_0 = 1$ et $i_1 \geq 1$. Nous montrons, par récurrence, que $i_n > i_{n-1}$ pour $n \geq 1$. Si ω_1 est l'inverse d'une flèche, le lemme 6.5.8 nous donne que $2 \in \text{supp}(\tau^{-1}M)$ de sorte que $i_1 \geq 2$. Si ω_1 est une flèche et que $i_1 = 1$, alors $2 \in \text{supp}(\tau\tau^{-1}M) = \text{supp}(M)$, une contradiction. Donc, dans les deux cas, $i_1 > i_0$. Le reste de la récurrence se fait exactement comme dans la preuve du lemme 6.5.9. Par conséquent, il existe un entier minimal m tel que i_m est un sommet du chemin infini à droite de ω . Comme ω_{i_m} est une flèche, on a que $i_m + 1 \in \text{supp}(\tau\tau^{-m}X) = \text{supp}(\tau^{-(m-1)}X)$, ce qui contredit la minimalité de m . \square

Proposition 6.7.7. *Supposons que Q contient au moins un chemin infini à droite. Alors le nombre de composantes régulières de type $\mathbb{N}^- \mathbb{A}_\infty$ du carquois d'Auslander-Reiten de $\text{rep}^+(Q)$ est fini si et seulement si Q est de type Dynkin infini.*

Démonstration. La suffisance est prouvée par le théorème 6.6.6. Maintenant, si Q n'est pas de type Dynkin infini, alors il existe un sous-carquois de Q (pas nécessairement plein) de type euclidien. Soit Σ un tel sous-carquois. Pour chaque $\lambda \in \mathbb{P}^1(k)$, il existe une composante Γ_λ de $\Gamma_{\text{rep}(\Sigma)}$ de type $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty/\tau$. Pour chaque tel λ , soit M_λ la représentation indécomposable quasi-simple de la composante Γ_λ . Il est bien connu que toutes ces représentations ont la même dimension, disons d , et ont un même support égal au carquois en entier Σ . De plus, pour $\lambda \in \mathbb{P}^1(k)$, $\tau_\Sigma M_\lambda \cong \tau_\Sigma^{-1} M_\lambda \cong M_\lambda$ de sorte que M_λ a une auto-extension non nulle dans $\text{rep}(\Sigma)$ et donc une auto-extension non nulle dans $\text{rep}(Q)$. Selon le lemme 6.7.3, les représentations M_λ doivent apparaître dans des composantes régulières de $\Gamma_{\text{rep}^+(Q)}$. Soit $\lambda \in \mathbb{P}^1(k)$ et Γ la composante régulière de $\Gamma_{\text{rep}^+(Q)}$ qui contient M_λ . Soit

$$N_r \rightarrow N_{r-1} \rightarrow \cdots \rightarrow N_2 \rightarrow N_1$$

une chaîne de morphismes irréductibles de longueur $r \geq d$ qui contient M_λ avec N_1 quasi-simple et telle que pour $1 \leq i \leq r - 2$, $\tau N_i \neq N_{i+2}$. Tous ces morphismes sont des épimorphismes de sorte que si $M_\lambda = N_i$, alors

$$d = \dim_k(N_i) \geq \dim_k(N_r) + i - 1 \geq i.$$

Ainsi, $1 \leq i \leq d$ de sorte que M_λ se retrouve nécessairement dans les d premières τ -orbites de Γ , c'est-à-dire les τ -orbites qui contiennent les représentations N_1, N_2, \dots, N_d . Selon le lemme précédent, chaque M_λ contient une représentation de dimension infinie dans sa τ -orbite de sorte que les M_λ apparaissent dans des composantes de type $\mathbb{N}^- \mathbb{A}_\infty$. Par conséquent, si le nombre de composantes régulières de type $\mathbb{N}^- \mathbb{A}_\infty$ de $\Gamma_{\text{rep}^+(Q)}$ est fini, alors, puisque $\mathbb{P}^1(k)$ est infini, il existe une τ -orbite \mathcal{O} qui contient une infinité de représentations de la forme M_λ . Soient $M_{\lambda_1}, M_{\lambda_2} \in \mathcal{O}$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{P}^1(k)$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et M_{λ_1} un prédécesseur de M_{λ_2} . Selon la preuve du lemme précédent, les supports des représentations $\tau^{-n} M_{\lambda_1}$, $n \geq 1$, sont tous différents. Ceci contredit le fait que $\text{supp}(M_{\lambda_2}) = \Sigma$. \square

Voici un théorème qui résume les résultats obtenus, en ce qui concerne le nombre de composantes du carquois d'Auslander-Reiten.

Théorème 6.7.8. *Soit Q un carquois infini, connexe, localement fini, fini par intervalle et tel que $\text{rep}^+(Q)$ a des suites presque scindées à droite. Alors*

- (a) *Le nombre de composantes de $\Gamma_{\text{rep}^+(Q)}$ est fini si et seulement si Q est de type Dynkin infini.*
- (b) *Si Q n'est pas de type Dynkin infini et contient un chemin infini à droite, alors il y a une infinité de composantes régulières de type $\mathbb{N}^- \mathbb{A}_\infty$.*

CONCLUSION

Cette thèse regroupe trois sujets tous reliés à la théorie des représentations des algèbres.

À l'origine, le premier projet de la thèse se voulait être une étude des conjectures homologiques pour les algèbres stratifiées. Le but était de montrer que la dimension finitiste d'une algèbre stratifiée est finie et que le déterminant de Cartan est toujours positif, ce qui prouve la conjecture du déterminant de Cartan dans ce cas. Cependant, les propriétés homologiques des algèbres stratifiées, bien que très étoffées, ne semblaient pas être suffisantes pour en arriver à une preuve de ces affirmations. L'auteur a donc étudié une classe d'algèbres un peu plus restreinte, les algèbres strictement stratifiées. Concernant ces algèbres, il reste encore deux problèmes à résoudre, qui sont reliés à cette thèse :

Conjecture 6.7.9. *Si A est strictement stratifiée et S est un A -module simple de dimension projective finie, alors $\text{Ext}_A^1(S, S) = 0$.*

Conjecture 6.7.10. *Si A est strictement stratifiée, alors la dimension finitiste projective de A est finie.*

Pour ce qui est du troisième projet de cette thèse, c'est-à-dire l'étude de la théorie d'Auslander-Reiten pour les représentations de carquois infinis, plusieurs thèmes restent encore à explorer.

D'abord, de vérifier que les composantes préprojective et préinjective du carquois d'Auslander-Reiten de la catégorie $\text{rep}^+(Q)$ sont toujours standard. Une composante Γ est dite **standard** si la catégorie additive engendrée par les objets de Γ est équivalente à la catégorie donnée par le carquois Γ et les relations de mailles. De même, si Q est de type Dynkin infini, les composantes régulières devraient toutes être standard. Cela fait d'ailleurs partie d'un projet en cours.

Ensuite, on a montré dans cette thèse que si le carquois Q satisfait à une certaine condition sur ses marches acycliques infinies, alors toutes les composantes régulières sont de type $\mathbb{N}^- \mathbb{A}_\infty$. En regardant la preuve de cette affirmation, on constate que l'on aurait pu élargir la classe des carquois qui admettent cette propriété sur les composantes régulières. Il serait intéressant d'obtenir une classe de carquois \mathcal{Q} telle que toutes les composantes régulières de $\Gamma_{\text{rep}^+(Q)}$ sont de type $\mathbb{N}^- \mathbb{A}_\infty$ si et seulement si $Q \in \mathcal{Q}$. On lance la conjecture suivante.

Conjecture 6.7.11. *Supposons que Q satisfait à l'une des conditions du théorème 6.4.4. Le carquois d'Auslander-Reiten de $\text{rep}^+(Q)$ admet uniquement des composantes régulières de type $\mathbb{N}^- \mathbb{A}_\infty$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

- (a) *Q contient au moins un chemin infini à droite,*
- (b) *Il n'existe pas de sous-carquois pleins Q' et Q'' de Q tels que $Q = Q' \cup Q''$, $Q' \cap Q''$ contient un seul sommet de Q et Q'' est de type \mathbb{A}_∞ sans chemins infinis à droite.*

Si le carquois Q n'admet pas de cycles, il semble que la catégorie $\text{rep}(Q)$ soit plus facile à étudier. Dans ce cas, la conjecture 6.7.11 semble plus facile à montrer. De plus, il semble possible de montrer que si $X \in \text{rep}^-(Q)$ admet un chemin infini à gauche dans son support, alors il n'existe pas de suite presque scindée se terminant en X dans $\text{rep}(Q)$. Cela pourra faire l'objet d'un futur projet.

Bibliographie

- [1] I. Agoston, V. Dlab et E. Lukács, *Strictly stratified algebras*, Algebra Proc. Intern. Alg. Conf. on the Occasion of the 90th birthday of A.G. Kurosh, Moscow, 1998, (2000), 17–26.
- [2] I. Agoston, D. Happel, E. Lukács et L. Unger, *Finitistic dimension of standardly stratified algebras*, Comm. Algebra **28**, (2000), 2745–2752.
- [3] I. Assem, *Algèbres et modules : Cours et exercices*, Enseignement des Mathématiques, Les Presses de l'Université d'Ottawa - MASSON, Ottawa-Paris, 1997.
- [4] I. Assem, D. Simson et A. Skowroński, *Elements of representation theory of associative algebras. Vol. 1.*, Techniques of representation theory. London Mathematical Society Student Texts, **65**, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [5] M. Auslander, *Coherent functors*, Proc. Conf. Categorical Algebra (La Jolla, Calif. 1965), 189–231, Springer, New York, 1966.
- [6] M. Auslander, *A survey of existence theorems for almost split sequences*, Representations of algebras, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **116**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 81–89, 1986.
- [7] M. Auslander, M. I. Platzeck et G. Todorov, *Homological theory of idempotent ideals*, Trans. Amer. Math. Soc. **332**, (1992), 667–692.

- [8] M. Auslander et I. Reiten, *Representation theory of Artin algebras IV. Invariants given by almost split sequences*, Comm. Algebra **5**, (1977), no. 5, 443–518.
- [9] M. Auslander, I. Reiten et S. O. Smalø, *Representation theory of Artin algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **36**, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [10] H. Bass, *Finitistic dimension and a homological generalization of semiprimary rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **95**, (1960), 466–488.
- [11] R. Bautista et S. Liu, *The bounded derived category of an algebra with radical squared zero*, preprint.
- [12] A. Beligiannis, N. Marmaridis, *Left triangulated categories arising from contravariantly finite subcategories*, Comm. Algebra **22**, (1994), no. 12, 5021–5036.
- [13] I.N. Bernstein, I.M. Gelfand et V.A. Ponomarev, *V.A. Coxeter functors and Gabriel's theorem* Russian Uspehi Mat. Nauk **28**, (1973), no. 2(170), 19–33.
- [14] K. Bongartz et P. Gabriel, *Covering spaces in representation-theory*, Invent. Math. **65**, (1981), no. 3, 331–378.
- [15] M.C.R. Butler et C.M. Ringel, *Auslander-Reiten sequences with few middle terms and applications to string algebras*, Comm. Algebra **15**, (1987), no. 1-2, 145–179.
- [16] E. Cline, B.J. Parshall et L.L. Scott, *Stratifying endomorphism algebras*, Memoirs of the AMS **591**, 1996.
- [17] V. Dlab et C.M. Ringel, *Quasi-hereditary algebras*, Illinois J. Math. **33**, (1989), 280–291.
- [18] E. Enochs et S. Estrada, *Projective representations of quivers*, Comm. Algebra **33**, (2005), no. 10, 3467–3478.

- [19] E. Enochs, S. Estrada et J.R. García Rozas, *Injective representations of infinite quivers. Applications*, *Canad. J. Math.* **61**, (2009), no. 2, 315–335.
- [20] K.R. Fuller, *The Cartan determinant and global dimension of artinian rings*, *Contemp. Math.* **124**, (1992), 51–72.
- [21] P. Gabriel et A.V. Roiter, *Representations of finite dimensional algebras*, Algebra VIII, *Encyclopedia Math. Sci.*, **73**, Springer, Berlin, 1992.
- [22] D. Happel, *Triangulated categories in the representation theory of finite dimensional algebras*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **119**, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [23] E.L. Green, E. Kirkman et J. Kuzmanovich, *Finitistic dimensions of finite-dimensional monomial algebras*, *J. Algebra* **136**, (1991), no. 1, 37–50.
- [24] E.L. Green, B. Zimmermann-Huisgen, *Finitistic dimension of Artinian rings with vanishing radical cube*, *Math. Z.* **206**, (1991), no. 4, 505–526.
- [25] K.R. Fuller, *The Cartan determinant and global dimension of artinian rings*, *Contemp. Math.* **124**, (1992), 51–72.
- [26] K. Igusa, *Notes on the no loops conjecture*, *J. Pure Appl. Algebra* **69**, (1990), no. 2, 161–176.
- [27] H. Lenzing et R. Zuazua, *Auslander-Reiten duality for abelian categories*, *Bol. Soc. Mat. Mexicana* **3**, (2004), vol. 10, 169–177.
- [28] S. Liu, *Auslander-Reiten theory in a Krull-Schmidt category*, *Proceedings of ICRA XIII (São Paulo)*, à paraître.
- [29] S. Liu, *The connected components of the Auslander-Reiten quiver of a tilted algebra*, *J. Algebra* **161**, (1993), no. 2, 505–523.

- [30] S. Liu, *Semi-stable components of an Auslander-Reiten quiver*, J. London Math. Soc. **47**, (1993), no. 2, 405–416.
- [31] S. Liu et J.P. Morin, *The strong no loop conjecture for special biserial algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **132**, (2004), no. 12, 3513–3523.
- [32] S. Liu et C. Paquette, *Some homological conjectures for quasi-stratified algebras*, J. Algebra **301**, (2006), 240–255.
- [33] B. Mitchell, *Theory of categories*, Pure and Applied Mathematics, Vol. XVII, Academic Press, New York-London, 1965.
- [34] I. Reiten, *Stable equivalence of self-injective algebras*, J. Algebra **40**, (1976), 63–74.
- [35] I. Reiten et M. Van Den Bergh, *Noetherian hereditary abelian categories satisfying Serre duality*, J. Amer. Math. Soc. **15**, (2002), no. 2, 295–366.
- [36] C.M. Ringel, *The regular components of the Auslander-Reiten quiver of a tilted algebra*, Chin. Ann. of Math. **9B**, (1988), no. 1, 1–18.
- [37] C. M. Ringel, *A ray quiver construction of hereditary Abelian categories with Serre duality*, Representations of algebra, Vol. I, II, 398–416, Beijing Norm. Univ. Press, Beijing, 2002.
- [38] D.D. Wick, *A generalization of quasi-hereditary rings*, Comm. Algebra **24**, (1996), no. 4, 1217–1227.
- [39] G. Wilson, *The Cartan map on categories of graded modules*, J. Algebra **85**, (1983), 390–398.
- [40] D. Zacharia, *On the Cartan matrix of an artin algebra of global dimension two*, J. Algebra **82**, (1983), 353–357.
- [41] D. Zacharia, *Special monomial algebras of finite global dimension*, NATO Adv. Sci. Inst. **233**, (Kluwer, Dordrecht, 1988), 375–378.