MAT 731: Groupes et représentations des groupes

3. Algèbres de groupes

Partout dans ce cours, on se fixe k un corps algébriquement clos et G un groupe fini avec identité 1. Soit $kG = \{\sum_{g\in G} \lambda_g g \mid \lambda_g \in k\}$ le k-espace vectoriel ayant pour base G. Alors kG est une k-algèbre de dimension $|G|$ pour la multiplication suivante:

$$(\sum_{g\in G} \lambda_g g)(\sum_{h\in G} \mu_h h) = \sum_{g,h\in G} \lambda_g \mu_g (gh).$$

Évidemment kG est commutative si et seulement si G est commutative.

Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie. Remarquons que $\mathrm{Aut}_k(V)$ est un groupe. Or V est un kG-module à gauche si, et seulement si, il existe un homomorphisme de groupes $\phi : G \to \mathrm{Aut}(V)$. Dans ce cas, pour tout $g \in G, x \in V$, on a que $g \cdot x = \phi(g)(x)$ et

$$(\sum_{g\in G} \lambda_g g) \cdot x = \sum_{g\in G} \lambda_g (g \cdot x).$$

En particulier k est un kG-module pour la multiplication $g\lambda = \lambda$, pour tous $g \in G,\ \lambda \in k$ (c'est-à-dire, induite de l'homomorphisme trivial $G \to \mathrm{Aut}_k(k) : g \mapsto \mathbb{1}_k$). On appelle k le *kG-module trivial*. Ceci est évidemment simple car il est de dimension 1.

Remarque. Un homomorphisme de groupes finis $\phi : G \to H$ induit un homomorphisme d'algèbres

$$\Phi : kG \to kH : \sum_{g\in G} \lambda_g g \mapsto \sum_{g\in G} \lambda_g \phi(g).$$

En outre, kH a une kG-module structure induite de Φ de sorte que Φ soit kG-linéaire.

3.0. Lemme. Posons $\Delta(G) = \{\sum_{g\in G} \lambda_g g \mid \sum_{g\in G} \lambda_g = 0\}$. Alors $\Delta(G)$ est un idéal bilatère de kG tel que $kG/\Delta(G) \cong k$ en tant que k-algèbre ainsi que kG-module.

Démonstration. L'homomorphisme trivial de groupes $G \to \{1\} : g \mapsto 1$ induit un épimorphisme d'algèbres

$$\Phi : kG \to k : \sum_{g\in G} \lambda_g g \mapsto \sum_{g\in G} \lambda_g.$$

On a $\ker\Phi = \Delta(G)$. Donc $\Delta(G)$ un idéal bilatère de kG et $kG/\Delta(G) \cong k$ en tant que k-algèbre. En outre, $kG/\Delta(G) = (kG)\bar{1}$, où $\bar{1} = 1 + \Delta(G)$, en tant que kG-module. Et pour tout $g \in G$, on a $g\bar{1} = \overline{g \cdot 1} = \overline{1 + (g-1)} = \bar{1}$ car $g - 1 \in \Delta(G)$. Ainsi $kG/\Delta(G) \cong k$.

3.1. Théorème de Mackey. L'algèbre kG est semisimple si et seulement si la caractéristique de k ne divise pas l'ordre de G.

Démonstration. D'abord supposons que $\mathrm{car}(k) = p > 0$ et $p||G|$. Supposons que kG serait semisimple. Soit $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ un ensemble orthogonal complet d'idempotents primitifs de kG. Alors $(kG)e_1, (kG)e_2, \ldots, (kG)e_n$ sont les kG-modules simples à isomorphisme près et

$$_{kG}kG = (kG)e_1 \oplus (kG)e_2 \oplus \cdots \oplus (kG)e_n.$$

On peut supposer que $(kG)e_1 \cong k$. On prétend que $(kG)e_i \ncong k$, pour tout $1 < i \leq n$. Supposons que $(kG)e_2$ serait aussi trivial. Posons $e_1 = \sum_{g\in G} \lambda_g g$ et $e_2 = \sum_{g\in G} \mu_g g$. Or $e_1 = e_1e_1 = \sum_{g\in G} \lambda_g(ge_1) = \sum_{g\in G} \lambda_g e_1 = (\sum_{g\in G} \lambda_g)e_1$. De même $e_2 = (\sum_{g\in G} \mu_g)e_2$. En outre $0 = e_2e_1 = (\sum_{g\in G} \mu_g)e_1$ entraîne que $\sum_{g\in G} \mu_g = 0$, et donc $e_2 = 0$, une contradiction. Donc k apparaît une seule fois dans $\{(kG)e_1, (kG)e_2, \ldots, (kG)e_n\}$, les facteurs de composition de la suite de composition

$$0 \subseteq (kG)e_1 \subset (kG)e_1 \oplus (kG)e_2 \subset \cdots \subset (kG)e_1 \oplus (kG)e_2 \oplus \cdots \oplus (kG)e_n = kG.$$

Ainsi k apparaît une seule fois dans les facteurs de composition de toute suite de composition de kG. D'après le lemme 3.0, $\Delta(G)$ est un sous-module de kG tel que $kG/\Delta(G) \cong k$. Posons $\sigma = \sum_{g\in G} g$. Remarquons $\sigma \in \Delta(G)$ car $p \,|\, |G|$. Évidemment $g \cdot \sigma = \sigma$. Donc $k\sigma$ est un sous-module de kG et $k\sigma \cong k$. Comme $kG/\Delta(G) \cong k$, la suite

$$0 \subset k\sigma \subseteq \Delta(G) \subset kG$$

peut être raffinée en une suite de composition de kG dont les facteurs de composition comptent au moins deux fois le module trivial k. Cette contradiction implique que kG n'est pas semisimple.

Supposons maintenant que la caractéristique de k ne divise pas $|G|$. Alors $|G|$ est inversible dans k. Soit U un kG-module à gauche de dimension finie. On montrera que tout sous-module V de U est un facteur direct de U. D'abord V est un facteur direct de U en tant que k-espace vectoriel. Donc il existe un idempotent $\pi \in \mathrm{End}_k(U)$ tel que $\pi(U) = V$. Posons

$$\varepsilon = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\pi g^{-1} \in \mathrm{End}_k(U).$$

Ici on considère $g \in \mathrm{Aut}_k(U)$. En particulier, $g^{-1}(U) = U$ et $g(V) = V$ car V est un sous kG-module de U. Or

$$\varepsilon(U) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\pi g^{-1}(U) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\pi(U) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g(V) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} V = V.$$

En plus, pour tout $x \in V$, on a $g^{-1}(x) \in V$, et donc

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\pi g^{-1}(x) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} gg^{-1}(x) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} x = x.$$

Par conséquent $\varepsilon^2 = \varepsilon$. Enfin, pour tout $h \in G, y \in U$, on a

$$\varepsilon(hy) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\pi g^{-1}(hy) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} h(h^{-1}g)g\pi(h^{-1}g)^{-1}(y) = h\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\pi g^{-1}(y) = h(\varepsilon(y)).$$

Ainsi $\varepsilon \in \mathrm{End}_{kG}(U)$. Par conséquent, V est un facteur direct de U en tant que kG-module. Donc U est semisimple. Par conséquent, kG est une algèbre semisimple. La preuve s'achève.

On étudiera le nombre de kG-modules simples. On sait que kG et $kG/\mathrm{rad}(kG)$ ont même nombre de modules simples. Comme k est algébriquement clos,

$$kG/\mathrm{rad}(kG) \cong M_{n_1}(k) \oplus \cdots \oplus M_{n_r}(k),$$

où $M_n(k)$ est l'algèbre des matrices de type $n \times n$ sur k. Dans ce cas, on voit que r est le nombre de kG-modules simples.

3.2. Proposition. Si kG est semisimple, alors le nombre de kG-modules simples est égal au nombre de classes de conjugué de G.

Démonstration. Supposons que kG est semisimple. Posons $kG = A_1 \oplus \cdots \oplus A_r$, où $A_i \trianglelefteq kG$ et $A_i \cong M_{n_i}(k)$. Alors r est le nombre de kG-modules simples. Or le centre de kG est

$$Z(kG) = Z(A_1) \oplus \cdots \oplus Z(A_r).$$

Remarquons que $Z(A_i)$ se compose des matrices scalaires, et donc $\dim_k Z(A_i) = 1$. Par conséquent, $\dim_k Z(kG) = r$, le nombre de kG-modules simples. Il suffit de montrer que r est le nombre de classes de conjugué de G.

Soient $C_1, C_2, \ldots, C_s$ les classes de conjugué de G. Posons $\gamma_i = \sum_{g\in C_i} g, i = 1, \ldots, s$. On voit aisément que $\gamma_1, \ldots, \gamma_s \in kG$ sont linéairement indépendants sur k. Pour tout $g \in G$, comme $gC_ig^{-1} = C_i$, on a $g\gamma_i g^{-1} = \gamma_i$, c'est-à-dire, $\gamma_i \in Z(kG)$, $i = 1, \ldots, s$. D'autre part, supposons que $a = \sum_{g\in G} \lambda_g g \in Z(kG)$. On se fixe $h \in G$. Alors

$$\sum_{g\in G} \lambda_g g = a = hah^{-1} = \sum_{g\in G} \lambda_g (hgh^{-1}) = \sum_{g\in G} \lambda_{hgh^{-1}} g.$$

D'où, $\lambda_g = \lambda_{hgh^{-1}}$, pour tous $g \in G$. Donc λ_g est constant sur chaque classe C_i, disons, $\lambda_g = \lambda_i$, pour tout $g \in C_i$. Ceci donne

$$a = \sum_{g\in G} \lambda_g g = \sum_{i=1}^{s} \sum_{g\in C_i} \lambda_g g = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \sum_{g\in C_i} g = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \gamma_i.$$

Ainsi $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ est une base de $Z(G)$. Donc $s = \dim_k Z(kG) = r$. Ceci achève la démonstration.

Exemple. Si G est commutatif dont l'ordre n'est pas divisible par la caractéristique de k, alors kG admet exactement $|G|$ modules simples à isomorphisme près.

On étudiera le cas général. Soit A une k-algèbre de dimension finie. Pour tous $a, b \in A$, posons $[a, b] = ab - ba$. Alors $[a, b] = 0$ si et seulement si $ab = ba$. On voit aisément que $[-, -]$ est bilinéaire. Posons $[A, A]$ le sous k-espace de A engendré par les éléments $[a, b]$, $a, b \in A$. Alors A est commutatif si et seulement si $[A, A] = 0$. Si $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_r$, où A_i est un idéal bilatère de A, alors $[A, A] = [A_1, A_1] \oplus \cdots \oplus [A_r, A_r]$, car $[A_i, A_j] = 0$ lorsque $i \neq j$.

Soit $X = (a_{ij}) \in M_n(k)$. Alors la *trace* de X est $\mathrm{tr}(X) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Rappelons que $\mathrm{tr}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathrm{tr}(X) + \mu \mathrm{tr}(Y)$ et $\mathrm{tr}(XY) = \mathrm{tr}(YX)$. En particulier, $\mathrm{tr}(YXY^{-1}) = \mathrm{tr}(X)$ si Y est inversible. Comme k est algébriquement clos, X est semblable à une matrice de Jordan. Ainsi $\mathrm{tr}(X) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de X en comptant les multiplicités algébriques.

3.3. Lemme. Soit $M_n(k)$ l'algèbre des matrices de type $n \times n$ sur k.

(1) $[M_n(k), M_n(k)] = \{X \in M_n(k) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}$.

(2) $\dim_k M_n(k)/[M_n(k), M_n(k)] = 1$.

(3) Si $\mathrm{car}(k) = p > 0$, alors $X \in [M_n(k), M_n(k)]$ si et seulement si $X^{p^i} \in [M_n(k), M_n(k)]$ pour un $i \geq 0$.

Démonstration. On peut supposer que $n > 1$. Posons $V = \{X \in M_n(k) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}$, qui est évidemment un sous-espace de $M_n(k)$. Soit $E_{ij} \in M_n(k)$ la matrice dont le terme en position (i, j) est 1 et les autres sont tous nuls. On sait que $\{E_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ est une k-base de $M_n(k)$. Remarquons que $\{E_{ij}, E_{ss} - E_{11} \mid i \neq j, s > 1\}$ est une famille libre contenue dans V. D'autre part, si $X = (a_{ij}) \in V$, alors $\sum_{i=1}^n a_{ii} = 0$. Or

$$X = \sum_{i,j} a_{ij}E_{ij} = \sum_{i \neq j} a_{ij}E_{ij} + \sum_{i=1}^{n} a_{ii}E_{ii} - (\sum_{i=1}^{n} a_{ii})E_{11} = \sum_{i \neq j} a_{ij}E_{ij} + \sum_{i=2}^{n} a_{ii}(E_{ii} - E_{11}).$$

Ainsi $\{E_{ij}, E_{ss} - E_{11} \mid i \neq j, s > 1\}$ est une k-base de V. Ainsi $\dim_k V = n^2 - 1$.

On montrera que $[M_n(k), M_n(k)] = V$. D'abord, pour toutes $X, Y \in M_n(k)$, $\mathrm{tr}[X, Y] = \mathrm{tr}(XY - YX) = \mathrm{tr}(XY) - \mathrm{tr}(YX) = 0$. Donc $[M_n(k), M_n(k)] \subseteq V$. D'autre part, $E_{ss} - E_{11} = E_{s1}E_{1s} - E_{1s}E_{s1} = [E_{s1}, E_{1s}]$, et pour $i \neq j$, on a $E_{ij} = E_{i1}E_{1j} - E_{1j}E_{i1} = [E_{i1}, E_{1j}]$. Ainsi $V \subseteq [M_n(k), M_n(k)]$, et donc $[M_n(k), M_n(k)] = V$. En particulier, $\dim_k[M_n(k), M_n(k)] = n^2 - 1 = \dim_k M_n(k) - 1$, et donc (2) est valide.

Enfin supposons que $\mathrm{car}(k) = p > 0$. On prétend que $(\mathrm{tr}(X))^p = \mathrm{tr}(X^p)$, pour tout $X \in M_n(k)$. En effet, soit J une forme de Jordan de X, qui est triangulaire supérieure dont les termes diagonaux sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Donc X^p est semblable à J^p dont les termes diagonaux sont $\lambda_1^p, \ldots, \lambda_n^p$. Ainsi

$$\mathrm{tr}(X^p) = \lambda_1^p + \cdots + \lambda_n^p = (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)^p = (\mathrm{tr}(X))^p,$$

d'où $\mathrm{tr}(X^{p^i}) = \mathrm{tr}(X)^{p^i}$, pour tout $i \geq 0$. Maintenant $X \in [M_n(k), M_n(k)]$ si et seulement si $\mathrm{tr}(X) = 0$ si et seulement si $(\mathrm{tr}(X))^{p^i} = 0$ pour un $i \geq 0$ si et seulement si $\mathrm{tr}(X^{p^i}) = 0$, pour un $i \geq 0$ si et seulement si $X^{p^i} \in [M_n(k), M_n(k)]$ pour un $i \geq 0$. Ceci achève la démonstration.

3.4. Lemme. Soit $\mathrm{car}(k) = p > 0$. Posons $T = [kG, kG]$.

(1) Pour tout $a, b \in kG$, $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{T}$.

(2) Si $a \in T$, alors $a^p \in T$.

Démonstration. (1) Soient $a, b \in kG$. On a

$$(a+b)^p = a^p + b^p + \sum_{i=1}^{2^p-2} (a_{i1}a_{i2}\cdots a_{ip} + a_{i2}\cdots a_{ip}a_{i1} + \cdots + a_{ip}a_{i1}\cdots a_{i,p-1}),$$

où $a_{ij} \in \{a, b\}$. Or pour tout $1 < j \le p$,

$$a_{ij}\cdots a_{ip}a_{i1}\cdots a_{i,j-1} = a_{i1}a_{i2}\cdots a_{ip} + [a_{ij}\cdots a_{ip},\ a_{i1}\cdots a_{i,j-1}] \equiv a_{i1}a_{i2}\cdots a_{ip} \pmod{T}.$$

Ainsi

$$a_{i1}a_{i2}\cdots a_{ip} + a_{i2}\cdots a_{ip}a_{i1} + \cdots + a_{ip}a_{i1}\cdots a_{i,p-1} \equiv p(a_{i1}a_{i2}\cdots a_{ip}) \equiv 0 \pmod{T}.$$

D'où $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{T}$.

(2) Soient $a, b \in kG$.

$$[a,b]^p = (ab-ba)^p \equiv (ab)^p - (ba)^p = a(ba\cdots ab) - (ba\cdots ab)a = [a, ba\cdots ab] \equiv 0 \pmod{T}.$$

D'où $[a,b]^p \in T$. En outre, pour tout $a = \sum_{i=1}^s \lambda_i[a_i, b_i] \in T$, on a

$$a^p = (\sum_{i=1}^s \lambda_i[a_i,b_i])^p \equiv \sum_{i=1}^s \lambda_i^p [a_i,b_i]^p \equiv 0 \pmod{T},$$

c'est-à-dire, $a^p \in T$. Ceci achève la démonstration.

3.5. Lemme. Soit $\mathrm{car}(k) = p > 0$. Alors

$$[kG, kG] + \mathrm{rad}(kG) = \{a \in kG \mid a^{p^i} \in [kG, kG] \text{ pour certain } i \ge 0\}.$$

Démonstration. Posons $T = [kG, kG]$, $S_0 = \{a \in kG \mid a^{p^i} \in T \text{ pour certain } i \ge 0\}$, et $S = T + \mathrm{rad}(kG)$. Si $a, b \in S_0$, d'après le lemme 3.4(2), il existe $i \ge 0$ tel que $a^{p^i}, b^{p^i} \in T$. Il s'en suit du lemme 3.4(1) que $(a+b)^{p^i} = a^{p^i} + b^{p^i} + t,\ t \in T$, c'est-à-dire $a+b \in S_0$. Donc S_0 est fermé pour l'addition. Or $T \subseteq S_0$ et $\mathrm{rad}(kG) \subseteq T$ car $\mathrm{rad}kG$ est nilpotent. Ceci donne $S = T + \mathrm{rad}(kG) \subseteq S_0$. D'autre part, posons $A = kG$ et $\bar{A} = A/\mathrm{rad}(A)$. Alors

$$\bar{A} = A_1 \oplus \cdots \oplus A_r,$$

où $A_i \trianglelefteq \bar{A}$ est une algèbre de matrices carrées sur k. Posons $\bar{T} = \{\bar{t} \mid t \in T\}$, où $\bar{t} = t + \mathrm{rad}(kG)$. Alors $\bar{T} = [\bar{A}, \bar{A}]$. Soit $a \in S_0$. Alors il existe un $i \ge 0$ tel que $\bar{a}^{p^i} = \overline{a^{p^i}} \in$

$\bar{T} = [\bar{A}, \bar{A}]$. Posons $\bar{a} = x_1 + \cdots + x_r$, $x_i \in A_i$. Comme $x_s x_t = 0$ pour $s \neq t$, on a $\bar{a}^{p^i} = {x_1}^{p^i} + \cdots + {x_r}^{p^i} \in \bar{T} = [A_1, A_1] \oplus \cdots \oplus [A_r, A_r]$. Donc ${x_j}^{p^i} \in [A_j, A_j]$, $j = 1, \ldots, r$. D'après le lemme 3.3(3), $x_j \in [A_j, A_j]$, pour tout $1 \leq j \leq r$. Ainsi $\bar{a} \in [\bar{A}, \bar{A}] = \overline{[A, A]}$, c'est-à-dire $a \in [A, A] + \mathrm{rad}(A) = S$. Donc $S_0 \subseteq S$. Ceci achève la démonstration.

3.6. Lemme. Soit $T = [kG, kG]$. Si $x_1, \ldots, x_t \in G$ sont deux à deux non conjugués, alors $x_1 + T, \ldots, x_r + T$ sont k-linéairement indépendants dans kG/T.

Démonstration. Pour tout $1 \leq i \leq t$, posons $\phi_i : kG \to k$ la forme linéaire sur kG satisfaisante $\phi(g) = 1$ si g est conjugué à x_i et $\phi_i(g) = 0$ sinon. En particulier ϕ_i est constante sur chaque classe de conjugué de G. Or pour tous $g, h \in G$,

$$\phi_i([g, h]) = \phi_i(gh - hg) = \phi_i(g(hg)g^{-1} - hg) = \phi_i(g(hg)g^{-1}) - \phi_i(hg) = 0.$$

Par conséquent $\phi_i(T) = 0$. Si $\sum_{j=1}^{t} \lambda_j(x_j + T) = 0$, c'est-à-dire, $\sum_{j=1}^{t} \lambda_j x_j \in T$, alors pour tout $1 \leq i \leq t$, on a $0 = \phi_i(\sum_{j=1}^{t} \lambda_j x_j) = \sum_{j=1}^{t} \lambda_j \phi_i(x_j) = \lambda_i$. Ceci achève la démonstration.

3.7. Théorème. Le nombre de kG-modules simples (à isomorphisme près) est égal au nombre de classes de conjugué de G des éléments dont l'ordre est non divisible par la caractéristique de k.

Démonstration. D'après la proposition 3.2 et le théorème 3.1, on peut supposer que $\mathrm{car}(k) = p > 0$ et $p \mid |G|$. Soit

$$kG/\mathrm{rad}(kG) = A_1 \oplus \cdots \oplus A_r, \ A_i \trianglelefteq (kG/\mathrm{rad}(kG)), \ A_i \cong M_{n_i}(k).$$

Posons $T = [kG, kG]$ et $S = T + \mathrm{rad}(kG)$. Alors

$$S/\mathrm{rad}(kG) = [kG/\mathrm{rad}(kG), kG/\mathrm{rad}(kG)] = [A_1, A_1] \oplus \cdots \oplus [A_r, A_r].$$

En tant que k-espace vectoriel

$$\frac{kG}{S} \cong \frac{kG/\mathrm{rad}(kG)}{S/\mathrm{rad}(kG)} = \frac{A_1 \oplus \cdots \oplus A_r}{[A_1, A_1] \oplus \cdots \oplus [A_r, A_r]} \cong \frac{A_1}{[A_1, A_1]} \oplus \cdots \oplus \frac{A_r}{[A_r, A_r]}.$$

D'après le lemme 3.3.(2), $\dim_k A_i/[A_i, A_i] = 1$. Donc $\dim_k kG/S = r$, le nombre de kG-modules simples.

Soient $C_1, \ldots, C_t$ les classes de conjugué de G. Pour chaque $1 \le i \le t$, choisissons un $x_i \in C_i$. Supposons que s avec $1 \le s \le t$ est tel que $p \nmid o(x_i)$ si et seulement si $1 \le i \le s$. Il suffit de montrer que $x_1 + S, \ldots, x_s + S$ forment une k-base de kG/S.

Soit $g \in G$. Posons $o(g) = p^i q$ avec $i \ge 0$ et $p \nmid q$. Donc $p^i m + qn = 1$ avec $m, n \in \mathbb{Z}$. Ainsi $g = g^{p^i m} g^{qn}$. Posons $u = g^{qn}$ et $x = g^{p^i m}$. Alors $g = ux = xu$, et $p \nmid o(x)$ car $x^q = 1$. De plus, comme $u^{p^i} = 1$, on a $g^{p^i} = x^{p^i}$. D'après le lemme 3.4(1), $(g - x)^{p^i} \in T$. D'après le lemme 3.5, $g - x \in S$, c'est-à-dire, $g + S = x + S$. Or $x \sim x_j$ avec $1 \le j \le s$ car $p \nmid o(x)$, disons $x_j = hxh^{-1}$. Alors $x_j - x = hxh^{-1} - x = [h, xh^{-1}] \in T \subseteq S$. Donc $g + S = x + S = x_j + S$. D'où, $x_1 + S, \ldots, x_s + S$ engendrent kG/S. Ensuite, supposons que $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_s x_s \in S$, $\lambda_i \in k$. D'après le lemme 3.5, $(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_s x_s)^{p^i} \in T$ pour un $i \ge 0$. D'après le lemme 3.4(1),

$$\lambda_1^{p^i} x_1^{p^i} + \cdots + \lambda_s^{p^i} x_s^{p^i} \equiv (\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_s x_s)^{p^i} \equiv 0 (\mathrm{mod} T).$$

On prétend que $x_1^{p^i}, \ldots, x_s^{p^i}$ sont deux à deux non conjugués. En effet, posons $|G| = p^d c$ avec $d \ge 1$ et $p \nmid c$. Alors $ap^i + bc = 1$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$. Or pour tout $1 \le j \le s$, comme $p \nmid o(x_j)$, on a $o(x_j) \mid c$, et donc $x_j^c = 1$. Donc $x_j = x_j^{ap^i + bc} = (x_j^{p^i})^a$. D'où l'énoncé. D'après le lemme 3.6, $\lambda_1^{p^i} = \cdots = \lambda_s^{p^i} = 0$. Donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_s = 0$. Ceci montrer que $x_1 + S, \ldots, x_s + S$ sont linéairement indépendants dans kG/S. La preuve s'achève.

3.8. Corollaire. Soit $\mathrm{car}(k) = p > 0$. Si G est un p-groupe, alors le kG-module trivial est le seul kG-module simple.

Démonstration. Supposons que $|G| = p^n$ avec $n \ge 0$. Alors 1 est le seul élément de G dont l'ordre n'est pas divisible par p. La preuve s'achève.

Exemple. Supposons que G est cyclique d'ordre n. Prenons r le plus grand diviseur de n tel que $\mathrm{car}(k) \nmid r$. Alors G admet exactement r éléments dont l'ordre n'est pas divisible par p. En effet, c'est trivial si $\mathrm{car}(k) = 0$. Supposons maintenant que $\mathrm{car}(k) = p > 0$. Alors $n = p^s r$ avec $s \ge 0$. Soit $G =< g >$. Pour tout $1 \le m \le n$, on a

$$o(g^m) = \frac{o(g)}{(o(g), m)} = \frac{p^s r}{(p^s r, m)}.$$

Donc $p \nmid o(g^m)$ si et seulement si $p^s | m$ si seulement si $m = p^s j,\ j = 1, 2, \ldots, r$. Donc kG admet exactement r modules simples à isomorphisme près. On trouvera ces modules simples.

Le polynôme $x^r - 1$ n'a pas de racines multiples car $x^r - 1$ et rx^{r-1} sont co-premiers entre eux sur k. Par conséquent, k admet exactement r racines distinctes de l'unité, disons $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$. Pour $1 \leq i \leq r$, posons $V_i = k$ et définissons $g^m \cdot \mu = \lambda_i^m \mu$, pour tout $\mu \in k$ et $1 \leq m \leq n$. Comme $\lambda_i^n = 1$, on voit que V_i devient un kG-module, qui est évidemmment simple. Supposons que $V_i \cong V_j$. Alors il existe un kG-isomorphisme $\phi : V_i \to V_j$. Or

$$\lambda_i \phi(1) = \phi(\lambda_i) = \phi(g \cdot 1) = g \cdot \phi(1) = \lambda_j \phi(1).$$

D'où $\lambda_i = \lambda_j$, et donc $i = j$. Par conséquent, $V_1, \ldots, V_r$ sont les kG-modules simples à isomorphisme près.

Soit H un sous-groupe de G. Alors kH est une sous-algèbre de kG. Soit U un kG-module. En réstreignant la multiplication scalaire à kH, le k-espace vectoriel U devient un kH-module, noté U_H. On voit aisément que si $U = V \oplus W$, alors $U_H = V_H \oplus W_H$.

3.9. Théorème de Clifford. Soit N un sous-groupe normal de G. Si U est un kG-module semisimple, alors U_N est également semisimple.

Démonstration. D'abord, on considère le cas où U est kG-simple. Soit W un sous-module de S_N. Pour tout $g \in G$, on prédent que gW est un sousmodule de U_N, qui est simple lorsque W l'est. En effet, pour tout $h \in N$, on a $h(gW) = g(g^{-1}hg)W \subseteq gW$ car $g^{-1}hg \in N$. Donc gW est un sousmodule de U_N. En outre supposons que W est kN-simple. Si V est un kN-sousmodule non nul de gW, alors $g^{-1}V$ est un kN-sousmodule non nul de $g^{-1}(gW) = W$. Donc $g^{-1}V = W$, d'où $V = gW$. Ainsi gW est aussi kN-simple. Ceci montre l'énoncé. Or S_N, étant de dimension finie, admet un sousmodule simple T. Il est évident que $\sum_{g \in G} gT$ est un kG-sousmodule non nul de U. Donc $U = \sum_{g \in G} gT$. D'où $U_N = \sum_{g \in G} gT$ avec gT étant kN-simple. Donc U_N est semisimple.

En générale, soit $U = S_1 \oplus \cdots S_n$ avec S_i simples. Alors $U_N = (S_1)_N \oplus \cdots \oplus (S_n)_N$ est une somme directe de modules semisimples, et donc semisimples. Ceci achève la démonstration.

4. Modules indécomposables

Soit A une k-algèbre de dimension finie. On ne considère que les A-module de dimension finie. On dit que A est *locale* si $A/\text{rad}A \cong k$.

4.1. Proposition. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(1) A est locale.

(2) Les seuls idempotent de A sont 0 et 1.

(3) Tout élément de A soit inversible soit nilpotent.

(4) rad$A$ est formé par les éléments non inversibles de A.

(5) Les éléments non inversibles de A forment un idéal bilatère de A.

(6) rad$A$ est le plus grand idéal à gauche propre de A.

(7) rad$A$ est le plus grand idéal à droite propre de A.

Un A-module non nul est dit *indécomposable* si $M = M_1 \oplus M_2$ entraîne que $M_1 = 0$ ou $M_2 = 0$.

4.2. Théorème. Un A-module non nul M est indécomposable si et seulement si $\mathrm{End}_A(U)$ est locale.

4.3. Théorème. Tout A-module M non nul se décompose

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_r$$

avec les M_i indécomposables. Cette décomposition est unique à isomorphisme et ordre des facteurs près.

Soit $\lambda \in k$. La matrice carrée d'ordre r

$$J_r(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

s'appelle un *bloc de Jordan.* On sait que $J_r(\lambda) \sim J_s(\mu)$ si et seulement si $r = s$ et $\lambda = \mu$.

Soient V un k-espace vectoriel non nul et $T \in \mathrm{End}_k(V)$. On dit qu'un sous-espace U de V est *stable* pour T si $T(U) \subseteq U$. On dit que V est *T-indécomposable* si $V = V_1 \oplus V_2$ avec V_i stable pour T entraîne que $V_1 = 0$ ou $V_2 = 0$. On sait que V est T-indécomposable si et seulement s'il existe une base de V dans laquelle la matrice de T est un bloc de Jordan d'ordre $\dim_k V$.

4.4. Lemme. Soit $\mathrm{car}(k) = p > 0$ et soit $n = p^a q$ avec $a > 0$. Alors

(1) Pour tout $1 \leq m < p^a$, $p \mid \binom{n}{m}$.

(2) Pour tout $1 \leq r \leq p^a$, $(J_r(\lambda))^n = \lambda^n I_r$.

Démonstration. (1) Pour tout $x \in I\!R$, dénotons par $[x]$ la partie entière de x. Alors $[x+y] \geq [x] + [y]$. L'exposant de p dans $n!$ est $e = \sum_{i=1}^{\infty} [\frac{n}{p^i}]$ et celui-ci dans $m!(n-m)!$ est $e_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \left([\frac{m}{p^i}] + [\frac{n-m}{p^i}]\right)$. Or $[\frac{m}{p^i}] + [\frac{n-m}{p^i}] \leq [\frac{n}{p^i}]$, pour tout $i \geq 1$. Ainsi $e \geq e_1$. En outre si $1 \leq m < p^a$, alors $[\frac{m}{p^a}] = 0$ et $[\frac{n-m}{p^a}] < q$ car $m > 0$. Mais $[\frac{n}{p^i}] = q$. Donc $e > e_1$. D'où $p \mid \binom{n}{m}$.

(2) On a que $J_r(\lambda) = \lambda I_r + M$ avec $M^r = 0$. Or

$$(J_r(\lambda))^n = (\lambda I_r + M)^n = \lambda^n I_r + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \lambda^{n-i} M^i = \lambda^n I_r + \sum_{i=1}^{r-1} \binom{n}{i} \lambda^{n-i} M^i = \lambda^n I_r.$$

On dit qu'un module M est *unisériel* si sa suite de radicaux

$$M \supset \mathrm{rad}(M) \supset \mathrm{rad}^2(M) \supset \cdots \supset \mathrm{rad}^{r-1}(M) \supset \mathrm{rad}^r(M) = 0$$

est une suite de composition. Dans ce cas, la suite ci-dessus est la seule suite de composition de M et la longuer de composition de M est égal à longuer du radical de M.

4.5. Théorème. Supposons que G est cyclique d'ordre n. Alors tous kG-modules simples sont de dimension 1. En outre kG admet exactement n modules indécomposables (à isomorphisme près) qui sont tous unisériels ayant un seul facteur de composition à isomorphisme près.

Démonstration. On a déjà vu que tous kG-modules simples sont de dimension 1. Si $\mathrm{car}(k) \not| \, n$, alors kG est semisimple. Donc les kG-modules indécomposables sont tous simples, et kG admet exactement n modules simples à isomorphismes près.

Supposons maintenant que $\mathrm{car}(k) = p > 0$ et $p \mid n$. Supposons que $G =< g >$. Soit V un kG-module. Posons $T : V \to V : x \mapsto gx \in \mathrm{Aut}_k(V)$. Alors un k-sousespace U de V est un kG-sousmodule si et seulement si U est stable pour T. Par conséquent, V est indécomposable si et seulement si V est T-indécomposable si et seulement s'il existe une base de V dans laquelle la matrice de T est un bloc de Jordan d'ordre $\dim_k V$.

Écrivons $n = p^a q$ avec $a > 0$ et $p \not| q$. Comme $p \not| q$, on a $x^q - 1 = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_q)$, où les $\lambda_i \in k$ sont deux à deux distincts tels que $\lambda_i^n = 1$. Pour $1 \le i \le q$ et $1 \le r \le p^a$, posons $V_{ir} = k^r$ et $T : k^r \to k^r : X \mapsto J_r(\lambda_i)X$. Alors la matrice de T dans la base canonique est $J_r(\lambda_i)$. Ainsi V_{ir} est T-indécomposable. D'après le lemme 4.4, on a $(J_r(\lambda_i))^n = \lambda_i^n I_r = I_r$. D'où, $T^n = 1\!\!1_V$. Par conséquent, $G \to \mathrm{Aut}_k(V_{ir}) : g^i \mapsto T^i$ est un homomorphisme de groupes. Donc V_{ir} est un kG-module. Comme V_{ir} est T-indécomposable, V_{ir} est kG-indécomposable. Supposons que $V_{ir} \cong_{kG} V_{js}$. Alors $s = r$. Soit $\phi : V_{ir} \to V_{jr}$ est un isomorphisme de kG-modules. Alors il existe une matrice inversible P telle que $\phi(X) = PX$, pour tout $X \in V_{ir}$. Donc $J_r(\lambda_j)PX = g\phi(X) = \phi(gX) = PJ_r(\lambda_i)X$, pour tout $X \in k^r$. Ceci implique $J_r(\lambda_j)P = PJ_r(\lambda_i)$, c'est-à-dire, $J_r(\lambda_j) \sim J_r(\lambda_i)$. Donc $\lambda_i = \lambda_j$, et ainsi $i = j$. Par conséquent, les V_{ir} avec $1 \le i \le q$ et $1 \le r \le p^a$ sont n kG-modules indécomposables deux à deux non isomorphes.

De plus, on a vu que les kG-modules simples sont $V_{i1}, i = 1, \ldots, q$. On se fixe i, r avec $1 \le i \le q$ et $2 \le r \le p^a$. Alors V_{ir} admet une base $\{v_1, v_2, \ldots, v_{r-1}, v_r\}$ telle que $gv_1 = \lambda_i v_1$ et $gv_j = v_{j-1} + \lambda_i v_j$, pour tout $2 \le j \le r$. Donc $(g - \lambda_i 1)V = k < v_1, \ldots, v_{r-1} >$ et $(g - \lambda_j 1)V = V$, pour tout $j \ne i$. Comme $g^q - 1 = (g - \lambda_1 1) \cdots (g - \lambda_i 1) \cdots (g - \lambda_q 1)$, on voit que $(g^q - 1)V = k < v_1, \ldots, v_{r-1} >$ est un sous-module de V_{ir} de codimension 1. Ainsi $\mathrm{rad}(V_{ir}) \subseteq (g^q - 1)V$. Comme $(g^q - 1)^{p^a} = g^n - 1 = 0$, on a $g^q - 1 \in \mathrm{rad}(kG)$, puisque kG est commutative. Donc $(g^q - 1)V \subseteq \mathrm{rad}(V_{ir})$, et donc $\mathrm{rad}(V_{ir}) = (g^q - 1)V \cong V_{i,r-1}$. De même, on peut montrer que $\mathrm{rad}^s(V_{i,r}) = k < v_1, \ldots, v_{r-s} > \cong V_{i,r-s}$, pour tout $1 \le s < r$ et $\mathrm{rad}^r(V_{ir}) = 0$. Ainsi

$$V_{ir} \supset \mathrm{rad}(V_{ir}) \supset \cdots \supset \mathrm{rad}^{r-1}(V_{ir}) \supset 0$$

est une suite de composition de V_{ir}. Remarquons $k < v_1, \ldots, v_j > /k < v_1, \ldots, v_{j-1} > \cong V_{i,1}$, pour tout $2 \le j \le r$. Ceci montre que $V_{i,1}$ est le seule fateur de composition de V_{ir} à isomorphisme près.

Enfin, soit V un kG-module indécomposable de dimension r. Soit $T : V \to V : x \mapsto gx$. Alors V est T-indécomposable. Donc il existe une base $\{v_1, \ldots, v_r\}$ de V dans laquelle la matrice de T est $J_r(\lambda)$, où λ est la valeur propre de T. Remarquons $T^n = 1\!\!1$ car $g^n = 1$. Ainsi $(\lambda^q)^{p^a} = \lambda^n = 1$. D'où $(\lambda^q - 1)^{p^a} = 0$, et donc $\lambda = \lambda_i$ pour un $1 \le i \le q$. Supposons que $\lambda = \lambda_1$. On montrera que $r \leq p^a$. En effet

$$T^q - \mathbb{1} = (T - \lambda_1 \mathbb{1})(T - \lambda_2 \mathbb{1}) \cdots (T - \lambda_q \mathbb{1}) = (T - \lambda \mathbb{1})S,$$

où $S = (T - \lambda_2 \mathbb{1}) \cdots (T - \lambda_q \mathbb{1})$ est inversible. Comme $ST = TS$, on a

$$0 = T^n - \mathbb{1} = (T^q - \mathbb{1})^{p^a} = (T - \lambda \mathbb{1})^{p^a} S^{p^a}.$$

D'où $(T - \lambda \mathbb{1})^{p^a} = 0$ car S est inversible. Remarquons que $T(v_i) = v_{i-1} + \lambda v_i$, pour tout $2 \leq i \leq r$. Donc $(T - \lambda \mathbb{1})v_i = v_{i-1}$, pour tout $2 \leq i \leq r$. D'où $(T - \lambda \mathbb{1})^{r-1}(v_r) = v_1 \neq 0$. Donc $(T - \lambda \mathbb{1})^{r-1} \neq 0$. Comme $(T - \lambda \mathbb{1})^{p^a} = 0$, on a $r - 1 < p^a$, c'est-à-dire, $r \leq p^a$. Donc $V \cong V_{1r}$. Ceci montre que les V_{ir} avec $1 \leq i \leq q$ et $1 \leq r \leq p^a$ sont les kG-modules indécomposables à isomorphisme près. Ceci achève la démonstration.

4.6. Théorème. Soit $\mathrm{car}(k) = p > 0$. Supposons que $G = G_1 \times G_2$ avec G_1, G_2 cyclques d'ordre p. Alors il existe une infinité de classes d'isomorphisme de kG-modules indécomposables.

Démonstration. On se fixe un $n \geq 1$. Soit V_n un k-espace vectoriel ayant pour base $\{u_1, \ldots, u_n; v_1, \ldots, v_n\}$. Soient $T \in \mathrm{End}_k(V_n)$ tel que $T(u_i) = v_i$ et $T(v_i) = 0$, pour tout $1 \leq i \leq n$; et $S \in \mathrm{End}_k(V_n)$ tel que $S(u_i) = v_{i+1}$, pour tout $1 \leq i < n$ et $S(u_n) = S(v_j) = 0$, pour tout $1 \leq j \leq n$. Alors $S^2 = T^2 = ST = TS = 0$. D'où $(\mathbb{1} + T)^p = (\mathbb{1} + S)^p = \mathbb{1}$.

Posons $G_i =< g_i >$, $i = 1, 2$. Alors V_n devient un kG-module si l'on définit $g_1 \cdot v = (\mathbb{1} + T)(v)$, et $g_2 \cdot v = (\mathbb{1} + S)(v)$, pour tout $v \in V_n$. On montrera que V_n est indécomposable. En effet, dans la base donnée, les matrices de $\mathbb{1} + T$ et de $\mathbb{1} + S$ sont respectivement

$$X = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ J_n(0) & I_n \end{pmatrix}.$$

Remarquons que $\mathrm{End}_{kG}(V_n)$ est isomorphe à l'algèbre $\mathcal{E}$ des matrices carrées d'ordre $2n$ qui commutent avec X et Y. On montrera que $\mathcal{E}$ est locale. Soit

$$Z = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_{2n}(k)$$

avec $A, B, C, D \in M_n(k)$. Alors $Z \in \mathcal{E}$ si et seulement si $A = D, B = 0$ et $AJ_n(0) = J_n(0)A$. Or $AJ_n(0) = J_n(0)A$ si et seulement si A est de la forme

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_3 & \lambda_2 & \lambda_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{n-1} & \lambda_{n-2} & \lambda_{n-3} & \cdots & \lambda_1 & 0 \\ \lambda_n & \lambda_{n-1} & \lambda_{n-2} & \cdots & \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Posons

$$\mathcal{N} = \{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & A \end{pmatrix} \mid A \quad \text{est de la forme } (*) \text{ dont la diagonale est nulle} \}.$$

Alors $\mathcal{N}$ est un idéal bilatère nilpotent de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}/\mathcal{N} \cong k$. Ainsi $\mathcal{N} = \mathrm{rad}(\mathcal{E})$, et donc $\mathcal{E}$ est locale. Ceci achève la démonstration.

5. Modules projectifs

Soit A une k-algèbre de dimension finie. Un A-module L est *libre* si $L \cong A \oplus \cdots \oplus A$; et *projectif* si L est isomorphe à un facteur direct d'un module libre. Pososn ${}_AA = P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$ avec P_i indécomposable. On peut supposer que $P_1, \ldots, P_r$ sont deux à deux non-isomorphes tels que $A \cong \oplus_{i=1}^r P_i^{n_i}$. Alors $P_1, \ldots, P_r$ sont les A-modules projectifs indécomposables (à isomorphisme près) et $P_1/\mathrm{rad}P_1, \ldots, P_r/\mathrm{rad}P_r$ avec $1 \leq r \leq n$ sont les A-modules simples non-isomorphes (à isomorphisme près). En outre $\dim_k(P_i/\mathrm{rad}P_i) = n_i,\ i = 1, \ldots, r$. Remarquons que le nombre de kG-modules projectifs indécomposables à isomorphisme près est ègal au nombre de classes de conjugué des éléments d'ordre non divisible par p.

5.1. Lemme. Soient $\mathrm{car}(k) = p > 0$ et G un p-groupe. Alors ${}_{kG}kG$ est indécomposable. En conséquence, kG est le seul kG-module indécomposable projectif, et donc tout kG-module projectif est libre.

Démonstration. D'après le corollaire 3.8, le module trivial k est le seul kG-module simple, et donc le seul $kG/\mathrm{rad}kG$-module simple. Ainsi $kG/\mathrm{rad}kG \cong M_d(k)$ avec $d \geq 1$.

Comme le $M_d(k)$-module simple est de dimension d, on a $d = 1$. Donc $kG/\mathrm{rad}kG \cong k$. Donc $\mathrm{rad}kG$ est le plus grand sous-module propre de ${}_{kG}kG$. Ainsi ${}_{kG}k$ est indécomposable. Ceci achève la démonstartion.

5.2. Théorème. Soit H un sous-groupe de G. Si P est un kG-module projectif, alors P_H est un kH-module projectif.

Démonstration. D'abord on montrera que $(kG)_H$ est libre. Soient $Hg_1, \ldots, Hg_r$ les classes à gauche de G modulo H. Remarquons que $M_i = \{\sum_{h\in H} \lambda_h hg_i \,|\, \lambda_h \in k\}$ est un sous-module de $(kG)_H$ ayant Hg_i pour k-base. Comme $Hg_1 \cup \ldots \cup Hg_r = G$ est une k-base de kG, on a $(kG)_H = M_1 \oplus \cdots \oplus M_r$. Or $\phi_i : kH \to M_i : x \mapsto xg_i$ est un kH-isomorphisme. Donc $(kG)_H$ est libre. Si L est un kG-module libre, alors $L \cong (kG) \oplus \cdots \oplus (kG)$. Donc $L_H \cong (kG)_H \oplus \cdots \oplus (kG)_H$ est kH-libre. Enfin supposons que P est un kG-module projectif, alors il existe un kG-module Q tel que $P \oplus Q \cong L$, un kG-module libre. Ainsi $P_H \oplus Q_H = (P \oplus Q)_H \cong L_H$ est kH-libre. Donc P_H est kH-projectif. Ceci achève la démonstartion.

5.3. Lemme. Soit N un sous-groupe normal de G. Soit V un kG-module tel que $hv = v$ pour tout $h \in N$. Alors V est un $k(G/N)$-module pour la multiplication $\bar{g}v = gv,\ g \in G, v \in V$. En outre V est kG-semisimple (respectivement, kG-indécomposable) si et seulement si V est $k(G/N)$-semisimple (respectivement, $k(G/N)$-indécomposable).

Démonstration. Soit $\phi : G \to \mathrm{Aut}_k(V)$ la représentation de G qui induit la kG-module structure sur V. Par hypothèse, $N \subseteq \ker(\phi)$. Ainsi ϕ induit un homomorphisme de groupes $\overline{\phi} : G/N \to \mathrm{Aut}_k(V) : \bar{g} \mapsto g$. Ceci implique que V est un $k(G/N)$-module pour la multiplication $\bar{g}v = gv$ pour tout $g \in G, v \in V$. De plus, soit U un k-sousespace de V. Alors U est un kG-sousmodule de V si et seulement si U est un $k(G/N)$-sousmodule de V. D'où, V est kG-semisimple (respectivement, kG-indécomposable) si et seulement si V est $k(G/N)$-semisimple (respectivement, $k(G/N)$-indécomposable). Ceci achève la démonstration.

Soient U et V des kG-modules. Alors le k-espace vectoriel $U \otimes_k V$, le produit tensoriel de U et V sur k, est un kG-module pour la multiplication $g(u \otimes v) = gu \otimes gv$.

5.4. Lemme. Soient U, V et W des kG-modules. Alors

(1) $k \otimes_k U \cong U$, où k est le module trivial.

(2) $(U \otimes_k V) \otimes_k W \cong U \otimes_k (V \otimes_k W)$.

(3) Si V_1 est un sous-module propre de V, alors $U \otimes_k V_1$ est un sous-module propre de $U \otimes_k V$ tel que $(U \otimes_k V)/(U \otimes_k V_1) \cong U \otimes_k (V/V_1)$.

(4) Si U et W sont des kG-modules simples avec $\dim_k W = 1$, alors $U \otimes_k W$ est simple.

Démonstration. (3) On a une suite excate de k-espaces vectoriels

$$0 \to V_1 \xrightarrow{i} V \xrightarrow{p} V/V_1 \to 0.$$

Comme U est un k-module projective, la suite

$$(*) \qquad 0 \to U \otimes_k V_1 \xrightarrow{\mathbb{1}\otimes i} U \otimes_k V \xrightarrow{\mathbb{1}\otimes p} U \otimes_k V/V_1 \to 0$$

est k-eaxcte. Il est facile de vérifier que $\mathbb{1}\otimes i$ et $\mathbb{1}\otimes p$ sont kG-linéaire. Donc $(*)$ est kG-exacte. D'où (3).

(4) Supposons que U et W sont simples avec $\dim_k W = 1$. On peut supposer que $W = k$ en tan que k-espace vectoriel. On construira un nouveau module $W_1 = k$. Pour $g \in G$, il existe $\mu_g \in k^*$ tel que $g \cdot x = \mu_g x$, pour tout $x \in W$. Posons $g \cdot x = \mu_g^{-1} x$, pour tout $x \in W_1$. Alors W_1 est un kG-module tel que $W \otimes_k W_1 \cong k$, le kG-module trivial puisque $g \cdot (1 \otimes 1) = (g \cdot 1) \otimes (g \cdot 1) = \mu_g \otimes \mu_g^{-1} = 1 \otimes 1$. D'où

$$(U \otimes_k W) \otimes_k W_1 \cong U \otimes_k (W \otimes_k W_1) \cong U \otimes_k k \cong U.$$

D'après (3), $U \otimes_k W$ est simple car U est simple.

5.5. Proposition. Soient $\mathrm{car}(k) = p > 0$ et $|G| = p^a q$ avec $a \geq 0$ et $p \not| q$. Alors tout kG-module projectif est de dimension divisible par p^a.

Démonstration. Prenons H un p-sousgroupe de Sylow de G. Alors $|H| = p^a$. D'après le lemme 5.1, tout kH-module projective est libre, et donc de dimenison divisible par p^a. Si P est un kG-module projectif, alors P_H est projective d'après le théorème 5.2. Ainsi $\dim_k P = \dim_k P_N$ est divisible par p^a. Ceci achève la démonstration.

Exemple. Soient $\mathrm{car}(k) = p > 0$ et $G =< g >$ d'ordre $p^a q$ avec $a \geq 0$ et $p \not| q$. On a vu que les kG-modules indécomposables sont V_{ir}, $i = 1, \ldots, q$; $r = 1, \ldots, p^a$. Admettant q modules simples à isomorphisme près, kG admet q modules projectifs indécomposables à isomorphisme près, qui sont de dimension divisible par p^a d'après la proposition 5.5. Ainsi $V_{1,p^a}, \ldots, p_{1,p^a}$ sont les kG-modules projectifs indécomposables à isomorphisme près. Comme les kG-modules simples sont de dimension 1, on a ${}_{kG}kG \cong V_{1,p^a} \oplus \cdots \oplus V_{q,p^a}$.

5.6. Lemme. Soit $\mathrm{car}(k) = p > 0$ et $p \mid |G|$. Supposons que G admet un p-sousgroupe de Sylow normal N. Alors pour tout kG-module U, $\mathrm{rad}(U) = \mathrm{rad}(U_N)$. En outre, si $N =< g >$, alors $\mathrm{rad}(U) = (1-g)U$.

Démonstration. Remarquons que $U_N/\left(\mathrm{rad}(U)\right)_N = \left(U/\mathrm{rad}(U)\right)_N$, qui est kN-semisimple d'après le théorème de Clifford. Ainsi $\mathrm{rad}(U_N) \subseteq \left(\mathrm{rad}(U)\right)_N$. En particulier, $\mathrm{rad}(U_N) \subseteq \mathrm{rad}(U)$. Comme N est normal dans G, tout $h \in G$ induit un automorphimse de l'algèbre kN par conjugaison, et donc $h \cdot \mathrm{rad}(kN) \cdot h^{-1} = \mathrm{rad}(kN)$. En conséquence,

$$h\,\mathrm{rad}(U_N) = h\,\mathrm{rad}(kN)U_N = h\mathrm{rad}\,(kN)h^{-1} \cdot hU_N = \mathrm{rad}(kN)U_N = \mathrm{rad}(U_N).$$

D'où $\mathrm{rad}(U_N)$ est un kG-sousmodule de U. En particulier, $U/\mathrm{rad}(U_N)$ est un kG-module. Comme N est un p-groupe, kN admet un seul module simple, le module trivial k. Donc $U_N/\mathrm{rad}(U_N) \cong k \oplus \cdots \oplus k$. Ceci implique que tout $h \in N$ agit trivialement sur $U/\mathrm{rad}(U_N)$. D'après le lemme 5.3, $U/\mathrm{rad}(U_N)$ est un $k(G/N)$-module. Comme $p \not| \, |G/N|$, on voit que $U/\mathrm{rad}(U_N)$ est $k(G/N)$-semisimple, et donc kG-semisimple. Donc $\mathrm{rad}(U) \subseteq \mathrm{rad}(U_N)$. D'où $\mathrm{rad}(U) = \mathrm{rad}(U_N)$.

Supposons enfin que $N =< g >$. Comme N est abélien, $(1-g)U$ est un sous-module de U_N. Donc $U_N/(1-g)U$ est un kN-module. Pour tout $\bar{u} \in U_N/(1-g)U$, on a $g\bar{u} = \overline{u-(1-g)u} = \bar{u}$. Donc $U_N/(1-g)U$ est kN-semisimple. D'où $\mathrm{rad}(U_N) \subseteq (1-g)U$. D'autre part, $kN/\mathrm{rad}kN$-est une somme directe de module trivial, et donc annulé par $1-g$. Ainsi $1-g \in \mathrm{rad}(kN)$. Par conséquent, $(1-g)U \subseteq \mathrm{rad}(U_N) = \mathrm{rad}(U)$. Ceci achève la démonstration.

Dès maintenant jusqu'à la fin de cette section, $\mathrm{car}(k) = p > 0$, $|G| = p^a q$ avec $a > 0$, $p \not| q$. Et $N =< g >$ est un p-sousgroupe de Sylow de G qui est normal.

5.7. Lemme. Si P est un kG-module projectif indécomposable, alors la suite de radicaux de P est de longueur p^a telle que chaque quotient consécutif est de dimension $d = \dim_k(P/\mathrm{rad}P)$.

Démonstration. Soit P un kG-module projectif indécomposable. Il s'en suit du théorème 5.2 et le lemme 5.1 que

$$P_N = \overbrace{kN \oplus \cdots \oplus kN}^{e},\ e > 0.$$

D'après le lemme 5.6, $\text{rad}(P) = \text{rad}(P_N)$. Donc $\dim_k P_N/\text{rad}(P_N) = \dim_k(P/\text{rad}P) = d$. Ainsi $d = e \cdot \dim_k(kN/\text{rad}kN) = e$, comme $kN/\text{rad}kN$ est le kN-module trivial. D'après le lemme 5.6, la suite de radicaux de P coïncide avec celle de P_N. Comme N est cyclique d'ordre p^a, la suite de radicaux de kN est comme suit:

$$kN \supset \text{rad}(kN) \supset \text{rad}^2(kN) \supset \cdots \supset \text{rad}^{p^a-1}(kN) \supset \text{rad}^{p^a}(kN) = 0$$

avec $\dim_k \text{rad}^i(kN)/\text{rad}^{i+1}(kN) = 1$, pour tout $1 \leq i < p^a$. Ainsi

$$(kN)^d \supset (\text{rad}(kN))^d \supset (\text{rad}^2(kN))^d \supset \cdots \supset (\text{rad}^{p^a-1}(P))^d \supset (\text{rad}^{p^a}(P))^d = 0$$

est la suite de radicaux de $(kN)^d$ avec $\dim_k(\text{rad}^i(kN))^d/(\text{rad}^{i+1}(kN))^d = d$, pour tout $1 \leq i < p^a$. C'est-à-dire,

$$P \supset \text{rad}(P) \supset \text{rad}^2(P) \supset \cdots \supset \text{rad}^{p^a-1}(P) \supset \text{rad}^{p^a}(P) = 0$$

est la suite de radicaux de $P_N = P$ avec $\dim_k(\text{rad}^i P/\text{rad}^{i+1} P) = d$, pour tout $1 \leq i < p^a$. La preuve s'achève.

On se fixe P_0 le kG-module projectif indécomposable avec $P_0/\text{rad}(P_0) \cong k$, le module trivial. D'après le lemme 5.7, P_0 est unisériel de longueur p^a et les facteurs de composition de P_0 est de dimension 1. Notons $W = \text{rad}(P_0)/\text{rad}^2(P_0)$, un module simple de dimension 1; et $M = P_0/\text{rad}^2(P_0)$. Alors M est unisériel de longueur 2 avec $\text{rad}(M) = W$.

5.8. Lemme. Soit S un kG-module simple. Alors $S \otimes_k M$ est unisériel de longueur 2 avec $\text{rad}(S \otimes_k M) = S \otimes_k W$ et $(S \otimes_k M)/(S \otimes_k W) \cong S$.

Démonstration. D'après le lemme 5.4(4), $S \otimes_k W$ est simple car W est de dimension 1. En appliquant le foncteur exact $S \otimes_k -$ à la suite exacte $0 \to W \to M \to k \to 0$, on a $(S \otimes_k M)/(S \otimes_k W) \cong S \otimes_k k \cong S$. Donc $\text{rad}(S \otimes_k M) \subseteq S \otimes_k W$. D'après le lemme 5.6, $(1 - g)M = \text{rad}(M) \neq 0$. Prenons $m \in M$ tel que $(1 - g)m \neq 0$, et $s \in S$ non nul. D'après le théorème de Clifford, S_N est est une somme directe de certaines copies du kN-module trivial, car N est un p-groupe. Ainsi $hs = s$, pour tout $h \in N$. Donc

$$(1-g)(s \otimes m) = s \otimes m - g(s \otimes m) = s \otimes m - s \otimes gm = s \otimes (1-g)m \neq 0.$$

D'après le lemme 5.6, $\mathrm{rad}(S \otimes_k M) = (1-g)(S \otimes_k M) \neq 0$. Par conséquent, $\mathrm{rad}(S \otimes_k M) = S \otimes_k W$ car $S \otimes W$ est simple. D'où $S \otimes_k M$ est unisériel de longueur 2. La preuve s'achève.

5.9. Lemme. Soit U un kG-module avec $U/\mathrm{rad}(U) = S$, un module simple. Alors $U \cong S$, ou bien $\mathrm{rad}(U)/\mathrm{rad}^2(U) \cong S \otimes W$.

Démonstration. Soit P la couverture projective de S, et posons $\dim_k S = d$. On prétend que $\mathrm{rad}(P)/\mathrm{rad}^2(P) \cong S \otimes_k W$. En effet, $(S \otimes_k M)/\mathrm{rad}(S \otimes_k M) \cong S$ d'après le lemme 5.8. Donc P est la couverture projective de $S \otimes_k M$. En particulier, $S \otimes_k M$ est un quotient de P. Ainsi $S \otimes_k W = \mathrm{rad}(S \otimes_k M) = \mathrm{rad}(S \otimes_k M)/\mathrm{rad}^2(S \otimes_k M)$ (car $\mathrm{rad}^2(S \otimes_k M) = 0$) est un quotient de $\mathrm{rad}(P)/\mathrm{rad}^2(P)$. Mais $\dim_k \mathrm{rad}(P)/\mathrm{rad}^2(P) = d$ d'après le lemme 5.7 et $\dim_k(S \otimes_k W) = d \cdot 1 = d$. D'où $\mathrm{rad}(P)/\mathrm{rad}^2(P) \cong S \otimes_k W$.

Maintenant, comme $U/\mathrm{rad}(U) \cong S$, U est un quotient de P. Ainsi $\mathrm{rad}(U)/\mathrm{rad}^2(U)$ est un quotient de $\mathrm{rad}(P)/\mathrm{rad}^2(P) \cong S \otimes_k W$. Comme $S \otimes_k W$ est simple, soit $\mathrm{rad}(U)/\mathrm{rad}^2(U) \cong S \otimes_k W$ soit $\mathrm{rad}(U)/\mathrm{rad}^2(U) = 0$. Cette dernière condition implique que $\mathrm{rad}(U) = \mathrm{rad}^2(U)$, et donc $\mathrm{rad} U = 0$. Ainsi $U \cong S$. Ceci achève la démonstration.

5.10. Théorème. Supposons que $\mathrm{car}(k) = p > 0$ et que $|G| = p^a q$ avec $a > 0$, et $p \nmid q$. Soit N un p-sousgroupe de Sylow de G qui est cyclique et normal dans G. Si P est un kG-module projectif indécomposable, alors P est unisériel de longueur p^a et

$$\mathrm{rad}^i(P)/\mathrm{rad}^{i+1}(P) \cong (P/\mathrm{rad}P) \otimes_k \overbrace{W \otimes_k \cdots \otimes_k W}^{i \text{ fois}}, \text{ pour tout } 1 \leq i < p^a.$$

Démonstration. Soit P un kG-module projectif indécomposable avec $S = P/\mathrm{rad}P$. D'après le lemme 5.7, la longuer du radicaux de P est p^a. En outre, $\mathrm{rad}(P)/\mathrm{rad}^2(P) \cong S \otimes W$, d'après le lemme 5.9. Si $p^a \leq 2$, alors le résultat est prouvé. Supposons maintenant que $p^a \geq 3$. En appliquant le lemme 5.9 au module $\mathrm{rad}(P)$ de coiffe $S \otimes_k W$, on trouve que $\mathrm{rad}^2(P)/\mathrm{rad}^3(P) \cong (S \otimes_k W) \otimes_k W$. En général,

$$\mathrm{rad}^i(P)/\mathrm{rad}^{i+1}(P) \cong S \otimes_k \overbrace{W \otimes_k \cdots \otimes_k W}^{i \text{ fois}}, \text{ pour tout } 1 \leq i < p^a.$$

En particulier, P est unisériel. Ceci achève la démonstration.

6. Dualité

La catégorie des kG-modules à gauche de dimension finie est notée kG-mod. Pour $V \in kG$-mod, $V^* = \mathrm{Hom}_k(V, k)$ est un kG-module, appelé *dual* de V, de sorte que

$$(g \cdot \phi)(v) = \phi(g^{-1}v),$$

pour tous $g \in G,\ \phi \in V^*$. En outre, si $\rho : U \to V$ est kG-linéaire, alors la transposée

$$\rho^* : V^* \to U^* : \phi \mapsto \phi\rho$$

est également kG-linéaire. En effet, pour tous $g \in G, \phi \in V^*$ et $x \in U$, on a

$$\begin{aligned}(\rho^*(g\phi))(x) &= (g\phi \circ \rho)(x) = (g\phi)(\rho(x)) = \phi(g^{-1}\rho(x)) \\ &= \phi(\rho(g^{-1}x)) = (\rho^*(\phi))(g^{-1}x) = (g\rho^*(\phi))(x).\end{aligned}$$

D'où $\rho^*(g\phi) = g\rho^*(\phi)$. Par conséquent, $\mathrm{Hom}_k(-, k) = (-)^*$ est un foncteur contravariant de kG-mod dans lui-même.

6.1. Lemme. On a $(-)^*(-)^* \cong \mathbb{1}_{kG-\mathrm{mod}}$. Par conséquent, $\mathrm{Hom}_k(-, k) = (-)^*$ est une anti-équivalence de kG-mod.

Démonstration. Pour $U \in kG$-mod, on sait que

$$\eta_U : U \to U^{**} : x \mapsto (\eta_U(x) : V^* \to k : \phi \mapsto \phi(x))$$

est un k-isomorphisme. Pour tous $g \in G$, $x \in U$, et $\phi \in U^*$, on a $\eta_U(gx)(\phi) = \phi(gx)$, et $(g\eta_U(x))(\phi) = \eta_U(x)(g^{-1}\phi) = (g^{-1}\phi)(x) = \phi(gx)$. D'où, η_U est kG-linéaire. En outre, on peut vérifier que η_U est évidemment fonctoriel en U. Ainsi $\eta = \{\eta_U \,|\, U \in kG{-}\mathrm{mod}\}$ est un isomorphisme fonctoriel de $\mathbb{1}_{kG-\mathrm{mod}}$ vers $(-)^*(-)^*$.

6.2. Lemme. Soient U, V des kG-modules. Alors

(1) $(U \oplus V)^* \cong U^* \oplus V^*$.

(2) $(U \otimes_k V)^* \cong U^* \otimes_k V^*$.

(3) Si U est un sous-module de V, alors $(V/U)^*$ est isomorphe à un sous-module W de V^* tel que $V^*/W \cong U^*$. En outre, tout sous-module de U^* est isomorphe au dual d'un quotient de U.

Démonstration. (1) Il est claire que $\Phi : (U \oplus V)^* \to U^* \oplus V^* : \phi \mapsto (\phi|_U, \phi|_V)$ est un kG-isomorphisme.

(2) Soient $\{u_1, \ldots, u_n\}$ une k-base de U et $\{v_1, \ldots, v_m\}$ une k-base de V. Considérons les bases duales $\{u_1^*, \ldots, u_n^*\}$ et $\{v_1^*, \ldots, v_m^*\}$. Il est bien connu que $\{u_i^* \otimes v_j^* \mid 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ et $\{(u_i \otimes v_j)^* \mid 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ sont k-bases de $U^* \otimes V^*$ et de $(U \otimes V)^*$, respectivement. Ainsi il existe un k-isomorphisme $\Psi : U^* \otimes V^* \to (U \otimes V)^*$ qui envoie $u_i^* \otimes v_j^*$ à $(u_i \otimes v_j)^*$, pour tous $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$. De plus, pour tous $\phi \in U^*, \psi \in V^*$, on a $\Psi(\phi \otimes \psi)(u \otimes v) = \phi(u)\psi(v)$. D'où Ψ est kG-linéaire.

(3) Soit U un sous-module de V. Il existe une suite exacte

$$0 \to U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{p} V/U \to 0$$

dans kG-mod. En appliquant le foncteur exact $\mathrm{Hom}_k(-, k)$, on obtient une suite exacte

$$0 \to (V/U)^* \xrightarrow{p^*} V^* \xrightarrow{i^*} U^* \to 0$$

dans kG-mod. D'où la première partie de l'énoncé. En outre si $W \leq V^*$, alors $(V^*/W)^* \cong X \leq V^{**}$ tel que $V^{**}/X \cong W^*$. Or $V \cong V^{**}$ entraîne qu'il existe $M \leq V$ tel que $V/M \cong V^{**}/X \cong W^*$. Ainsi $W \cong W^{**} \cong (V/M)^*$. Ceci achève la démonstration.

6.3. Proposition. Soit U un kG-module. Alors

(1) U est semisimple si et seulement si U^* est semisimple.

(2) $\mathrm{soc}(U^*) \cong (U/\mathrm{rad}(U))^*$.

(3) U est projectif si seulement si P^* est injectif.

Démonstration. (1) Comme $(-)^*$ est une anti-équivalence, U est simple si et seulement si U^* l'est. It suit maintenant du lemme 6.2(1) que U est semi-simple si et seulment si U^* l'est.

(2) D'après la partie (1) et le lemme 6.2(3), $(U/\mathrm{rad}(U))^* \cong W$ avec W un sous-module semisimple de U^*. Ainsi $W \subseteq \mathrm{soc}(U^*)$. Et d'après le lemme 6.2(3), il existe un sous-module

M de U tel que $\mathrm{soc}(U^*) \cong (U/M)^*$. D'après la partie (1), U/M est semisimple, et donc $\mathrm{rad}(U) \le M$. Or

$$\dim_k W = \dim_k(U/\mathrm{rad}U)^* = \dim_k(U/\mathrm{rad}(U)) \ge \dim_k(U/M) = \dim_k(U/M)^* = \dim_k \mathrm{soc}(U^*).$$

D'où $(U/\mathrm{rad}(U))^* \cong W = \mathrm{soc}(U^*)$.

(3) Il suit du fait que $(-)^*$ est une équivalence contravariante de kG-mod.

6.4. Théorème. On a $kG \cong (kG)^*$ en tant que kG-module. Par conséquent kG est auto-injective, et donc tout module projectif est injectif.

Démonstration. Pour $g \in G$, soit $g^* \in (kG)^*$ tel que $g^*(h) = \delta_{gh}$. Alors

$$\phi : kG \to (kG)^* : \sum_{g\in G} \lambda_g g \mapsto \sum_{g\in G} \lambda_g g^*$$

est un k-isomorphime. Pour tous $g, h, x \in G$, on a

$$(g \cdot h^*)(x) = h^*(g^{-1}x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad g^{-1}x = h \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = gh \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = (gh)^*(x).$$

Ainsi $(gh)^* = g \cdot h^*$, c'est-à-dire, $\phi(gh) = g\phi(h)$. D'où, ϕ est kG-linéaire. Ceci achève la démonstration.

Remarque. Une k-algèbre A est dite *symétrique* si $A \cong \mathrm{Hom}_k(A, k)$ etant que A-A-bimodule. Or on voit que ϕ ci-dessus est un kG-kG-isomorphisme. Donc kG est symétrique.

On dEnd'finit une forme k-bilinéaire $(-,-) : kG \times kG \mapsto k$ de sorte que

$$< g, h >= \begin{cases} 1 & \text{si } gh = 1; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Alors $< a, b >=< b, a >$, $< ab, c >=< a, bc >$, pour tous $a, b, c \in kG$. De plus, si $< a, kG >= 0$, alors $a = 0$. En effet, posons $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$, alors la matrice $(< g_i, g_j >)_{n\times n}$ se réduit à la matrice $(< g_i, g_j^{-1} >)_{n\times n} = I_n$.

6.5. Théorème. Si P est un kG-module projectif indécomposbale, alors $\mathrm{soc}(P) \cong P/\mathrm{rad}(P)$.

Démonstration. Soit $kG = P_1^{n_1} \oplus P_2^{n_2} \oplus \cdots \oplus P_r^{n_r}$, où les P_i sont indécomposables, deux à deux non isomorphes, et $P_1 \cong P$. Alors $P_1, \ldots, P_r$ sont les kG-modules indécomposable injectifs à isomorphisme près. Ainsi P_i est une enveloppe injective de $\mathrm{soc}(P_i)$. Comme P_i est indécomposable, $\mathrm{soc}(P_i)$ est indécomposable, et donc simple pour tout $1 \le i \le r$. Supposons que $S = P/\mathrm{rad}(P) \ncong \mathrm{soc}(P)$. Alors $S \cong \mathrm{soc}(P_i)$ pour un $2 \le i \le r$. Posons $Q = P^{n_1}$ et $R = P_2^{n_2} \oplus \cdots \oplus P_r^{n_r}$. Alors $kG = Q \oplus R$ et $\mathrm{soc}(Q) = \mathrm{soc}(P) \oplus \cdots \oplus \mathrm{soc}(P)$. Ainsi Q n'a pas de sous-module isomorphe à S. Posons $\{S_\lambda \mid S_\lambda \le_{kG} kG, S \cong S_\lambda, \lambda \in \Omega\}$. Alors $0 \neq I = \sum_{\lambda \in \Omega} S_\lambda$ est un sous-module semi-simple de R. Pour tout $a \in kG$, $S_\lambda a$ est un sous-module de ${}_{kG}kG$ qui est nul ou isomorphe à S. D'où $S_\lambda a \subseteq I$, pour tout $a \in kG$. Ainsi I est un idéal bilatère non nul de kG.

Posons $J = \{\phi \in \mathrm{End}_{kG}(kG) \mid \phi(kG) \subseteq I\}$. Étant semi-simple, I est stable pour tout kG-endomorphisme de kG. Ainsi J est un idéal bilatère de $\mathrm{End}_{kG}(kG)$, qui est non nul car S est un quotient ainsi qu'un sous-module de kG.

Soit $\phi : kG \to Q$ la projection canonique. On prétend que si $\phi \in J$, alors $\phi = \phi\pi - \pi\phi$. En effet, $\pi\phi = 0$ car $\phi(kG) \subseteq I$. On veut montrer que $\phi = \phi\pi$. Pour tout $x \in Q$, on a $\phi\pi(x) = \phi(x)$. D'autre part, $\phi\pi(R) = 0$. Si $\phi(R) \neq 0$, alors $\mathrm{Hom}_{kG}(R, I) \neq 0$. D'où $\mathrm{Hom}_{kG}(R, S) \neq 0$. Ceci implique $\mathrm{Hom}_{kG}(P_j, S) \neq 0$ pour certain $j > 1$. Donc P_j est une couverture projective de S. D'où $P_j \cong P_1$ avec $j > 1$, une contradiction. Donc $\phi(R) = 0$. Ceci montre notre énoncé.

Prenons $0 \neq \phi \in J$. Soit $\alpha \in \mathrm{End}_{kG}(kG)$. Alors $\phi\alpha \in J$, et donc $\phi\alpha = \phi\alpha\pi - \pi\phi\alpha$. Remarquons qu'un kG-endormorphisme de kG est une multiplication à droite par un élément de kG. Supposons que $\alpha = m_a$, $\phi = m_b$ et $\pi = m_c$. On a alors $ab = cab - abc$ et

$$< a, b >=< ab, 1 >=< cab, 1 > - < abc, 1 >=< c, ab > - < ab, c >= 0,$$

où a parcourt dans kG. Ainsi $b = 0$, c'est-à-dire, $\phi = 0$, une contradiction. Ceci achève la démonstration.

6.6. Théorème. Soient $\mathrm{car}(k) = p > 0$ et $|G| = p^a q$ avec $a > 0$ et $p \not| \, q$. Supposons que G admet un p-sousgroupe de Sylow normal cyclique et G admet e modules simples à isomorphisme près. Alors kG admet exactement $p^a e$ modules indécomposables à isomorphisme près, dont chacun est unisériel de longeur $\le p^a$.

Démonstration. Soit P un kG-module indécomposable projectif. D'après le théorème 5.10, P est de longueur p^a. Pour tout $1 \le d \le p^a$, étant unisériel, P admet un unique quotient de longueur d qui est unisériel. Donc P admet exactement p^a quotients à isomorphisme près. Comme kG admet e modules projectifs indécomposables à isomorphisme près, ceci nous donne $p^a e$ modules unisériel qui sont deux à deux non-isomorphes.

Soit M un kG-module indécomposable. Prenons U un sous-module de M tel que U admet un quotient unisériel U/V dont la longueur est maximale parmi les longueurs de quotients unisériels de sous-modules de M. Posons $\mathrm{rad}(U/V) = W/V$, où W est le sous-module de U avec $V \subseteq W \subset U$. Donc $U/W \cong U/V/\mathrm{rad}(U/V)$ est simple comme U/V est unisériel. Soit $\psi : P \to U/W$ une couverture projective de U/W. Alors P est indécomposable. En outre, il existe $\phi : P \to U$ tel que $\psi = \pi \circ \phi$, où $\pi : U \to U/W$ est la projection canonique. Posons $U_0 = \phi(P)$. Alors U_0 est unisériel comme P l'est et $U = U_0 + W$. Ceci implique $(U_0 + V)/V + W/V = U/V$, et donc $(U_0 + V)/V = U/V$ car W/V est le plus grand sous-module propre de U/V. Donc $U = U_0 + V$. Si $U_0 \cap V \ne 0$, alors $U_0/(U_0 \cap V) \cong (U_0 + V)/V$ implique que $l(U_0) > l(U/V)$, une contradiction car U_0 est unisériel. Ainsi $U_0 \cap V = 0$. D'où $U = U_0 \oplus V$.

Considérons maitenant $T = \mathrm{soc}(U_0)$, qui est simple car U_0 est unisériel et non nul. Soit $i : T \to Q$ une enveloppe injective de T. Alors Q est indécomposable et donc unisériel car il est projectif. Comme $T \subseteq M$, il existe un kG-homomorphisme $\eta : M \to Q$ qui prolonge i. Soit V_0 le noyau de η. Alors M/V_0 est unisériel car il est isomorphe à un sous-module de Q. Si $U_0 \cap V_0 \ne 0$, alors $\mathrm{soc}(U_0) \subseteq U_0 \cap V_0$ car U_0 est unisériel. Ceci donne que $\eta(\mathrm{soc}(U_0)) = 0$, une contradiction. Donc $U_0 \cap V_0 = 0$. D'où $(U_0 + V_0)/V_0 \cong U_0 \cong U/V$. Or $(U_0 + V_0)/V_0 \subseteq M/V_0$ entraîne que $(U_0 + V_0)/V_0 = M/V_0$ par la maximalité de $l(U/V)$ et le fait que M/V_0 est unisériel. Ainsi $M = U_0 \oplus V_0$, et donc $M = U_0$ est unisériel car M est indécomposable. En particulier, M est un quotient d'un kG-module projectif indécomposable. Ceci achève la démonstration.

7. Produits tensoriels

7.1. Théorème de base normale. Soit $F \subseteq K$ une extension galoisienne de corps avec $G = G(K/F)$. Alors il existe $\alpha \in K$ tel que $\{g(\alpha) \mid g \in G\}$ est une F-base de K, appelée *base normale* de K sur F.

Démonstration. Comme l'extension est séprable, $K = F(\alpha)$, pour un $\alpha \in K$. D'après le lemme de Dedekind, la famille $\{g(\alpha) \mid g \in G(K/F)\}$ est linéairement indépendant sur F. Comme $[K : F] = |G(K/F)|$, on voit que $\{g(\alpha) \mid g \in G(K/F)\}$ est une F-base de K. Ceci achève la démonstration.

Un kG-module V est dit *fidèle* si pour tout $1 \neq g \in G$, il existe $x \in V$ tel que $gx \neq x$, c'est-à-dire, l'homomorphisme associé $G \to \mathrm{Aut}_k(V)$ est un monomorphisme.

7.2. Théorème. Si V est un kG-module fidèle, alors tout kG-module projectif P est un facteur direct de

$$\overbrace{V \otimes_k V \otimes_k \cdots \otimes_k V}^{n \quad \text{fois}}, \qquad \text{pour un} \quad n > 0.$$

Démonstration. Prenons une k-base $\{x_1, \ldots, x_r\}$ de V. Posons $R = k[x_1, \ldots, x_r]$ la k-algèbre commutative des polynômes en $x_1, \ldots, x_r$. Pour tout $g \in G$,

$$g : R \to R : \phi(x_1, \ldots, x_r) \mapsto \phi(gx_1, \ldots, gx_r)$$

est un automorphisme de la k-algèbre R. Ainsi R est un kG-module (de dimension infinie). Pour $i \geq 0$, posons M_i le k-sous-espace de R engendré par les polynômes homogènes de degré i. Alors M_i est un kG-sousmodule de R. On voit aisément que $R = \oplus_{i=0}^{\infty} M_i$.

On montrera que kG est un sous-module de R. Soit $K = k(x_1, \ldots, x_r)$ le corps des fractions de $k[x_1, \ldots, x_r]$. Pour $g \in G$, on voit que

$$g : K \to K : \frac{\phi}{\psi} \mapsto \frac{g\phi}{g\psi}$$

est un k-automorphisme de K. Ceci n'est pas égal à l'identité lorsque $g \neq 1$. En effet, comme V est kG-fidèle, $gx_i \neq x_i$ pour un certain $1 \leq i \leq r$. Donc on peut considérer G comme un groupe de k-automorphismes de K. Soit $F = \{\alpha \in K \mid g\alpha = \alpha$, pour tout $g \in G\}$, le corps fixe de G. Alors K est une extension galoisienne de F avec $G(K/F) = G$. D'après le théorème 7.1, il existe $\alpha = \phi_1/\phi_2 \in K$ avec $\phi_1, \phi_2 \in R$ tel que $\{g\alpha \mid g \in G\}$ est une F-base de K. Or $a = \Pi_{g\in G}\, g\phi_2 \in F$ car $ha = a$, pour tout $h \in G$. Posons $\phi = a\alpha \in R$. Alors $\{g\phi \mid g \in G\}$ est également une F-base de K. Comme $k \subseteq F$, $\{g\phi \mid g \in G\}$ est k-libre.

Posons U le k-sousespace de R engendré par $\{g\phi \mid g \in G\}$. Alors U est un kG-sousmodule de R, et $kG \to U : g \mapsto g\phi$ est un isomorphisme de kG-modules.

Soit P un kG-module projectif indécomposable. Alors P est un facteur direct de U. Étant de dimension finie, $U \subset \oplus_{i=0}^{m} M_i$ pour un $m > 0$. Étant injectif, P est un facteur direct de $\oplus_{i=0}^{m} M_i$. Étant indécomposable, P est un facteur direct de M_n pour certain $n \geq 0$ d'après le théorème de Krull-Schmidt. Or on a un kG-épimorphisme

$$f : \overbrace{V \otimes_k V \otimes_k \cdots \otimes_k V}^{n\,\text{fois}} \to M_n : x_{i_1} \otimes x_{i_2} \otimes \cdots \otimes x_{i_n} \mapsto x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n},$$

qui induit un kG-épimorphisme de $\overbrace{V \otimes_k V \otimes_k \cdots \otimes_k V}^{n\text{ fois}}$ sur P. Étant projectif, P est un facteur direct de $\overbrace{V \otimes_k V \otimes_k \cdots \otimes_k V}^{n\text{ fois}}$. Ceci achève la démonstration.

7.3. Proposition. Supposons que $\mathrm{car}(k) = p > 0$ et G ne possède aucun p-sousgroupe qui est normal et non identité. Si $S_1, \ldots, S_n$ sont les kG-modules simples, alors $S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$ est fidèle.

Démonstration. Posons

$$\begin{aligned} N &= \{g \in G \mid gx = x, x \in S_1 \oplus \cdots \oplus S_n\} \\ &= \{g \in G \mid gx_i = x_i, x_i \in S_i,\, i = 1, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

Alors N est normal dans G. Si $g \in N$, alors $1-g$ annule les kG-modules simples, et donc $1-g \in \mathrm{rad}(kG)$. Ainsi $(1-g)^r = 0$ pour un $r > 0$. D'où $(1-g)^{p^r} = 0$. Ceci donne $g^{p^r} = 1$. Par conséquent, N est un p-groupe. D'après l'hypothèse, $N = \{1\}$. Ainsi $S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$ est fidèle. Ceci achève la démonstration.

Remarque. Dans la plupart de cas, pour obtenir les modules projectifs, il suffit d'étudier les produits tensoriels des modules simples.

Si U et V sont des kG-modules, alors $\mathrm{Hom}_k(U, V)$ est un kG-module de sorte que

$$(g \cdot \phi)(x) = g \cdot \phi(g^{-1} \cdot x),$$

pour tous $g \in G$, $\phi \in \mathrm{Hom}_k(U, V)$, et $x \in U$. Si $V = k$ est le kG-module trivial, alors $\mathrm{Hom}_k(U, k) = U^*$ car $(g\phi)(x) = g \cdot \phi(g^{-1}x) = \phi(g^{-1}x)$ dans ce cas. Remarquons que

$\phi \in \mathrm{Hom}_k(U, V)$ est kG-linéaire si et seulement si $\phi(gx) = g \cdot \phi(x)$, pour tous $g \in G, x \in U$ si, et seulement si, $\phi(x) = g^{-1} \cdot \phi(gx)$, pour tous $g \in G, x \in U$ si et seulement si $g\phi = \phi$, pour tout $g \in G$. Ainsi

$$\mathrm{Hom}_{kG}(U, V) = \{\phi \in \mathrm{Hom}_k(U, V) \mid g\phi = \phi, \text{ pour tout } g \in G\},$$

qui est un kG-sousmodule sémisimple de $\mathrm{Hom}_k(U, V)$.

7.4. Lemme. Si U, V sont des kG-modules, alors

$$U^* \otimes_k V \cong_{kG} \mathrm{Hom}_k(U, V) \text{ et } U \otimes_k V \cong_{kG} \mathrm{Hom}_k(U^*, V).$$

Démonstration. Posons

$$\Phi : U^* \otimes_k V \to \mathrm{Hom}_k(U, V) : \phi \otimes y \mapsto (U \to V : x \mapsto \phi(x)y).$$

Alors Φ est kG-linéaire. Soient $\{u_1, \ldots, u_n\}$ une k-base de U et $\{u_1^*, \ldots, u_n^*\}$ la base duale de U^*, et $\{v_1, \ldots, v_m\}$ une k-base de V. Si $\Phi(\sum \lambda_{ij}(u_i^* \otimes v_j)) = 0$, alors pour tout $1 \le r \le n$,

$$0 = \Phi(\sum \lambda_{ij}(u_i^* \otimes v_j))(u_r) = \sum \lambda_{ij} u_i^*(u_r) v_j = \sum_{j=1}^{m} \lambda_{rj} v_j.$$

Ceci donne $\lambda_{rj} = 0$, pour tous $1 \le r \le n$ et $1 \le j \le m$. Donc Φ est un monomorphisme. Comme $U^* \otimes_k V$ et $\mathrm{Hom}_k(U, V)$ sont de même dimension, Φ est un isomorphisme. Pour la deuxième isomorphisme, on a $U \otimes_k V \cong (U^*)^* \otimes_k V \cong \mathrm{Hom}_{kG}(U^*, V)$. Ceci achève la démonstration.

7.5. Proposition. Si U, V et W sont des kG-modules, alors

(1) $\mathrm{Hom}_k(U \otimes_k V,\ W) \cong_{kG} \mathrm{Hom}_k(U,\ V^* \otimes_k W)$, et

(2) $\mathrm{Hom}_{kG}(U \otimes_k V,\ W) \cong_{kG} \mathrm{Hom}_{kG}(U,\ V^* \otimes_k W)$.

Démonstration. D'après le lemme 7.4 et le lemme 6.2(2), on a

$$\mathrm{Hom}_k(U \otimes_k V,\ W) \cong (U \otimes_k V)^* \otimes_k W \cong U^* \otimes_k (V^* \otimes_k W) \cong \mathrm{Hom}_k(U,\ V^* \otimes_k W).$$

Ceci montre (1). En outre, comme les isomorphismes ci-dessus sont kG-linéaire, les éléments de $\mathrm{Hom}_k(U \otimes_k V, W)$ invariants pour G sont envoyés sur ceux de $\mathrm{Hom}_k(U, V^* \otimes W)$. Il s'en suit l'énoncé (2). Ceci achève la démonstration.

7.6. Lemme. Soient U et V des kG-modules. Si $u_1, \ldots, u_n \in U$ sont linéairement indépendants sur k et $v_1, \ldots, v_n \in V$ sont tous non nuls, alors $u_1 \otimes v_1, \ldots, u_n \otimes v_n \in U \otimes_k V$ sont linéairement indépendants sur k.

Démonstration. On procède par récurrence. Si les v_i sont linéairement indépendants sur k, alors le lemme est évidemment vrai. Supposons maintenant que $v_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i$, et

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i (u_i \otimes v_i) = 0, \ \mu_i \in k.$$

Si un des μ_i est nul, alors les μ_i sont tous nuls par hypothèse de récurrence. Supposons que les μ_i sont tous non nuls. Or

$$0 = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i (u_i \otimes v_i) + \mu_n u_n \otimes \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^{n-1} (\mu_i u_i + \mu_n \lambda_i u_n) \otimes v_i.$$

Remarquons que la famille $\{\mu_1 u_1 + \mu_n \lambda_1 u_n, \ldots, \mu_1 u_{n-1} + \mu_n \lambda_1 u_n, u_n\}$ est libre, car elle est obtenue de la famille libre $\{u_1, \ldots, u_n\}$ par des opérations élémentaires. Cela contredit l'hypothèse de récurrence. Ceci achève la démonstration.

7.7. Théorème. Si P est un kG-module projectif, alors $V \otimes_k P$ est projectif pour tout kG-module V.

Démonstration. Il suffit de montrer que $V \otimes_k (kG)$ est libre. D'abord, pour tout $0 \neq v \in V$, d'après le lemme 7.6, $\{g(v \otimes 1) = gv \otimes g \mid g \in G\}$ est k-libre. Ainsi

$$kG \to (kG)(v \otimes 1) : g \mapsto gv \otimes g$$

est un kG-isomorphisme. Soit $\{v_1, \ldots, v_n\}$ une k-base de V. Pour tout $1 \leq i \leq n$, $F_i = (kG)(v_i \otimes 1)$ est un kG-sousmodule de $V \otimes_k (kG)$ isomorphe à kG. Pour tous $v \in V$ et $g \in G$, on a $g^{-1} v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n, \ \alpha_i \in k$. Donc

$$v \otimes g = g(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) \otimes g = \alpha_1 \cdot g(v_1 \otimes 1) + \cdots + \alpha_n \cdot g(v_n \otimes 1).$$

D'où $V \otimes_k (kG) = F_1 + \cdots + F_n$. Comme $\dim_k (V \otimes_k (kG)) = n \cdot |G| = \dim_k F_1 + \cdots + \dim_k F_n$, on a $V \otimes_k (kG) = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$. Ceci achève la démonstration.

8. Modules induits

Rappelons qu'un kG-module U est libre s'il existe un k-sousespace X de U tel que tout k-homomorphisme de X dans un kG-module quelconque V s'étend uniquement à un kG-homomorphisme de U dans V. On remarque qu'un k-sousespace de U n'est rien qu'un sousmodule de $U_{\{1\}}$.

Partout dans cette section, on se fixe un sous-groupe H de G.

8.1. Définition. Soient U un kG-module et X un sous-module de U_H. On dit que U est *relativement H-libre* par rapport à X si pour tout kG-module V et tout kH-homomorphisme $\phi : X \to V$, il existe un unique kG-homomorphisme $\Phi : U \to V$ tel que $\Phi i = \phi$, où $i : X \to U$ est l'inclusion.

Remarques. (1) U est libre si et seulemt si U est relativement $\{1\}$-libre.

(2) Tout kG-module U est relativement G-libre par rapport à U.

8.2. Lemme. Soient U et V des kG-modules relativement H-libres par rapport à X et à Y, respectivement. Si $X \cong_{kH} Y$, alors $U \cong_{kG} V$.

Démonstration. Soient $\phi : X \to Y$ et $\psi = \phi^{-1} : Y \to X$ des kH-isomorphismes. Soient $i : X \to U$ et $j : Y \to V$ les inclusions. Alors il existe des kG-homorphismes $\Phi : U \to V$ et $\Psi : V \to U$ tels que $j\phi = \Phi i$ et $i\psi = \Psi j$. Ainsi $i = (\Psi\Phi)i = \mathbb{1}_U i$. Ceci donne $\Psi\Phi = \mathbb{1}_U$ par l'unicité. De même, $\Phi\Psi = \mathbb{1}_V$. Ceci achève la démonstration.

8.3. Lemme. Soit $G/H = \{g_1H, \ldots g_rH\}$. Si U est un kG-module relativement H-libre par rapport à X, alors $U = \sum_{i=1}^r g_iX$.

Démonstration. Posons $U_1 = \sum_{i=1}^r g_iX = \sum_{i=1}^r (g_iH)X$, puisque $X = HX$. Pour $g \in G$, $\{(gg_1)H, \ldots, (gg_r)H\} = \{g_1H, \ldots, g_rH\}$. Ainsi U_1 est un kG-sousmodule de U. Considérons l'homomorphisme nul $0 : X \to U/U_1$. Comme $X \subseteq U_1$, la projection canonique $p : U \to U/U_1$ est tel que $pi = 0 = 0i$, où $i : X \to U$ est l'inclusion. Ainsi $p = 0$ par l'unicité. Par conséquent, $U = U_1 = \sum_{i=1}^r g_iX$. Ceci achève la démonstration.

Remarque. (1) Pour tous $g \in G$ et $1 \le i \le n$, on a $gg_i = g_jh$ pour certains $1 \le j \le r$ et $h \in H$. Dans ce cas, $g(g_ix) = g_j(hx) \in g_jX$, pour tout $x \in X$.

(2) On écrit par commodité que $\sum_{i=1}^r g_iX = \sum_{g \in G/H} gX$.

8.4. Théorème. Pour tout kH-module X, il existe un kG-module relativement H-libre par rapport à X, qui est unique à isomorphisme près.

Démonstration. Soit $\{g_1, \ldots, g_r\}$ avec $g_1 = 1$ un ensemble de représentants des classes à droite de G modulo H. Pour tout $1 \leq i \leq r$, l'ensemble $(g_i,\ X) = \{(g_i, x) \mid x \in X\}$ est un k-espace vectoriel pour la multiplication scalaire $\lambda(g_i, x) = (g_i, \lambda x)$. Considérons le k-espace vectoriel $L(X) = \oplus_{i=1}^r (g_i, X) = \{\sum_{i=1}^r (g_i, x_i) \mid x_i \in X\}$. Pour tous $g \in G$ et $1 \leq i \leq r$, il existe un unique $\sigma(i)$ avec $1 \leq \sigma(i) \leq r$ et un unique $h_i \in H$ tel que $gg_i = g_{\sigma(i)} h_i$. Définissons

$$g(\sum_{i=1}^r (g_i, x_i)) = \sum_{i=1}^r (g_{\sigma(i)}, h_i x_i).$$

Alors $L(X)$ est un kG-module et $(1, X)$ est un sous-module de $L(X)|_H$. Remarquons que $(g_i, x) = g_i(1, x)$, pour tout $1 \leq i \leq r$. En identifiant $x \in X$ avec $(1, x) \in (1, X)$, on peut considérer X comme étant un kH-sousmodule de $L(X)$. Soient V un kG-module et $\phi : (1, X) \to V$ une application kH-linéaire. Définissons $\Phi : L(x) \to V$ par $\Phi(g_i, x) = g_i \phi(x)$, $i = 1, \ldots, r$. Si $g \in G$ est tel que $gg_i = g_{\sigma(i)} h_i$, alors

$$\Phi(g(g_i, x)) = \Phi(g_{\sigma(i)}, h_i x) = g_{\sigma(i)} \phi(h_i x) = g_{\sigma(i)} h_i \phi(x) = gg_i \phi(x) = g\Phi(g_i, x),$$

d'où Φ est kG-linéaire. L'unicité de Φ est évidnet. Enfin, l'unicité de $L(X)$ se découle du lemme 8.2. Ceci achève la démonstration.

8.5. Corollaire. Soit U un kG-module dont X est un kH-sousmodule. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(1) U est relativement H-libre par rapport à X

(2) $\dim_k U = [G : H] \dim_k X$ et $U = \sum_{g \in G/H} gX$.

(3) $U = \oplus_{g \in G/H} gX$ en tant que k-espaces vectoriels.

Démonstration. Si U est relativement H-libre par rapport à X, alors $U \cong L(X)$. Ainsi $\dim_k U = [G : H] \dim_k X$, et d'après le lemme 8.3, $U = \sum_{g \in G/H} gX$. Ceci montre que (1) implique (2). Si (2) est vrai, alors $\dim U = \sum_{g \in G/H} \dim(gX)$ puisque $\dim gX = \dim X$. Ainsi $U = \oplus_{g \in G/H} gX$ en tant que k-espaces vectoriels.

Enfin posons $G/H = \{g_1 H, \ldots, g_r H\}$ avec $g_1 = 1$ et supposons que $U = \oplus_{i=1}^r g_i X$ en tant que k-espaces vectoriels. Soient V un kG-module et $\phi : X \to V$ une application kH-linéaire. Définissons $\Phi : U \to V$ par $\Phi(g_i x) = g_i \phi(x)$, $i = 1, \ldots, r$. Si $g \in G$ est tel que $gg_i = g_{\sigma(i)} h_i$, alors $\Phi(g(g_ix)) = \Phi(g_{\sigma(i)}h_ix) = g_{\sigma(i)}\phi(h_ix) = g_{\sigma(i)}h_i\phi(x) = gg_i\phi(x) = g\Phi(g_ix)$, pour tout $x \in X$. D'où Φ est kG-linéaire. Ceci achève la démonstration.

Remarquons que kG est un kG-kH-bimodule pour la multiplication $a \cdot b \cdot c = abc$, pour tous $a, b \in kG,\ c \in kH$.

8.6. Définition. Soit V un kH-module. Le produit tensoriel $kG \otimes_{kH} V$ de ${}_{kG}kG_{kH}$ et V sur l'algèbre kH s'appelle le *kG-module induit* par V, noté V^G.

Rappelons que pour tous $a, b \in kG, v \in V$, on a $a(b \otimes_H v) = (ab) \otimes_H v$.

Remarque. Comme $kG \times V \to V^G : (a, v) \mapsto a \otimes_H v$ est k-bilinéaire, il existe un k-épimorphisme $\Phi : kG \otimes_k V \to V^G = kG \otimes_{kH} V$ tel que $\Phi(a \otimes_k v) = a \otimes_H v$. En particulier, pour tout $a \in kG$, le k-espace $a \otimes_H V$ est un quotient du k-espace $a \otimes_k V$, et donc $\dim_k(a \otimes_H V) \leq \dim_k(a \otimes_k V)$.

8.7. Lemme. Soit V un kH-module. Alors V^G est le kG-module relativement H-libre par rapport à V. En outre, en tant que k-espace vectoriel,

$$V^G = \oplus_{g \in G/H}\, g \otimes_H V,$$

et $\dim_k(g \otimes_H V) = \dim_k V$, pour tout $g \in G$.

Démonstration. Comme $g_ih \otimes_H v = g_i \otimes_H (hv)$, pour tout $h \in H$, on a

$$V^G = kG \otimes_H V = \sum_{i=1}^{r} g_iH \otimes_H V = \sum_{i=1}^{r} g_i \otimes_H V.$$

Ainsi $\dim_k(V^G) \leq \sum_{i=1}^{r} \dim_k(g_i \otimes_H V) \leq \sum_{i=1}^{r} \dim_k(g_i \otimes_k V) = r \dim_k V$. Prenons U un kG-module relativement H-libre par rapport à V. Alors

$$kG \times V \to U : (a, v) \mapsto av$$

est kH-bilinéaire. Ainsi il existe un kG-homomorphisme $\phi : kG \otimes_{kH} V \to U$ de sorte que $\phi(a \otimes_H v) = av$. D'après le lemme 8.3, $U = \sum_{i=1}^{r} g_iV$. Donc ϕ est surjectif. De l'autre côté, $\dim_k U = r \dim_k V \geq \dim_k(V^G)$ implique que ϕ est un kG-isomorphisme. En particulier, V^G est relativement H-libre par rapport à V. Enfin, $\dim_k(V^G) = r\,(\dim_k V)$ et

$\dim_k(g_i \otimes_H V) \leq \dim_k V$ implique $\dim_k(g_i \otimes_H V) = \dim_k V$ et $\dim_k V^G = \dim_k(\sum_{i=1}^r g_i \otimes_H V)$. Par conséquent, $V^G = \oplus_{i=1}^r g_i \otimes_H V$. Ceci achève la démonstration.

Remarque. Si V est un KH-module et $g \in G$, d'après le lemme 8.7, l'application $\phi : V \to g \otimes_H V : v \mapsto g \otimes_H v$ est un k-isomorphisme. En particulier, tout $x \in g \otimes_H V$ s'écrit uniquement comme $x = g \otimes_H v$ avec $v \in V$.

On étudiera les proprietés des modules induits.

8.8. Lemme. Soient V et U des kH-modules.

(1) $(V \oplus U)^G \cong V^G \oplus U^G$.

(2) Si W est un kN-module avec N un sous-groupe de H, alors $(W^H)^G \cong W^G$.

(3) Si V est kH-libre (projectif), alors V^G est kG-libre (projectif).

(4) $(V^*)^G \cong (V^G)^*$.

Démonstration. L'énoncé (1) est évident. Pour l'énoncé (2), on a

$$(W^H)^G = kG \otimes_{kH} (kH \otimes_{kN} W) \cong (kG \otimes_{kH} kH) \otimes_{kN} W \cong kG \otimes_{kN} W = W^G.$$

(3) D'abord, $(kH)^G = kG \otimes_{kH} kH \cong kG$ est kG-libre. Donc si V est kH-libre, alors V^G est kG-libre. Si V est kH-projectivf, alors $V \oplus V_1$ est kH-libre pour certain kH-module V_1. Or $V^G \oplus V_1^G \cong (V \oplus V_1)^G$ est kG-libre. Ainsi V^G est kG-projectif.

(4) Comme on a vu dans le théorème 5.2, $(kG)_H \cong (kH)^r$ avec $r = [G : H]$. Or

$$\begin{aligned} (V^*)^G &= kG \otimes_{kH} V^* \cong (kH)^r \otimes_{kH} V^* \cong (kH \otimes_{kH} V^*)^r \cong (V^*)^r \cong (V^r)^* \\ &\cong ((kH \otimes_{kH} V)^r)^* \cong ((kH)^r \otimes_{kH} V)^* \cong (kG \otimes_{kH} V)^* = (V^G)^*. \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration.

8.9. Lemme. Soient V un kH-module et U un kG-module. Alors

$$U \otimes_k V^G \cong (U_H \otimes_k V)^G.$$

Démonstration. On a un kH-homomorphisme

$$\phi : U_H \otimes_k V \to U \otimes_k V^G : u \otimes v \to u \otimes (1 \otimes_H v)$$

avec $\mathrm{Im}\phi = U \otimes_k (1 \otimes_H V) = X$. Comme $\dim X = \dim(U \otimes_k V)$, ϕ est un monomorphisme. Ainsi X est un kH-sousmodule de $U \otimes_k V^G$ et $X \cong_{kH} U_H \otimes_k V$. On montrera que $U \otimes_k V^G$ est H-libre relativement par rapport à X. D'abord

$$\begin{aligned} \dim_k(U \otimes_k V^G) &= \dim_k U \cdot \dim_k(V^G) = \dim_k U \cdot [G:H] \cdot \dim_k V \\ &= [G:H] \cdot \dim_k U \cdot \dim_k(1 \otimes_H V) = [G:H] \dim_k X. \end{aligned}$$

En plus, on a $V^G = \sum_{g \in G/H} g \otimes_H V = \sum_{g \in G/H} g(1 \otimes_H V)$. Donc

$$\begin{aligned} U \otimes_k V^G &= \textstyle\sum_{g \in G/H} U \otimes_k g(1 \otimes_H V) = \sum_{g \in G/H} g(g^{-1}U \otimes_k (1 \otimes_H V)) \\ &= \textstyle\sum_{g \in G/H} g(U \otimes_k (1 \otimes_H V)) = \sum_{g \in G/H} gX. \end{aligned}$$

D'après le corollaire 8.5, $U \otimes_k V^G$ est relativement H-libre par rapport à X. D'après les lemme 8.7 et 8.2, $(U_H \otimes_k V)^G \cong U \otimes_k V^G$. Ceci achève la démonstration.

8.10. Lemme. (1) Si $\phi : V_1 \to V_2$ est un kH-homomorphisme, alors il existe un unique kG-homomorphisme $\phi^G : V_1^G \to V_2^G$ tel que $\phi^G j_1 = j_2 \phi$, où $j_i : V_i \to V_i^G : x_i \mapsto 1 \otimes_H x_i$.

(2) $(-)^G : kH\text{-mod} \to kG\text{-mod}$ est un foncteur exact.

Démonstration. (1) On voit que $j_2\phi : V_1 \to V_2^G$ est kH-linéaire. D 8'après le lemme 8.7, V_1^G est relativement H-libre par rapport à V_1. Ainsi il existe un unique kG-homomorphisme $\phi^G : V_1^G \to V_2^G$ tel que $\phi^G j_1 = j_2 \phi^G$.

(2) D'après le théorème 5.2, $(kG)_N$ est kN-libre, et donc plat. Par conséquent, le foncteur $(-)^G = kG \otimes_{kH} -$ est exact. Ceci achève la démonstration.

8.11. Lemme. Soient $V \in kH$-mod et $U \in kG$-mod. Alors

(1) $\mathrm{Hom}_{kG}(V^G, U) \cong_k \mathrm{Hom}_{kH}(V, U_H)$.

(2) $\mathrm{Hom}_{kG}(U, V^G) \cong_k \mathrm{Hom}_{kH}(U_H, V)$.

Démonstration. (1) Considérons l'application $j : V \to V^G : v \mapsto 1 \otimes_H v$. L'application

$$\Phi : \mathrm{Hom}_{kG}(V^G, U) \to \mathrm{Hom}_{kH}(V, U_H) : \phi \mapsto \phi j$$

est évidemment k-linéaire. D'après le lemme 8.7, V^G est relativement H-libre par rapport à V. Par conséquent, pour tout $\psi \in \mathrm{Hom}_{kH}(V, U_H)$, il existe un unique $\phi \in \mathrm{Hom}_{kG}(V^G, U)$ tel que $\psi = \phi j$. Ceci montre que Φ est bijectif.

(2) D'après le lemme 6.1, on a une dualité $(-)^* : kG\text{-mod} \to kG\text{-mod}$. Ceci nous donne les isomorphismes suivants:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{kG}(U, V^G) &\cong \mathrm{Hom}_{kG}((V^G)^*, U^*) \cong \mathrm{Hom}_{kG}((V^*)^G, U^*) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{kH}(V^*, (U^*)_H) \cong_k \mathrm{Hom}_{kH}(V^*, (U_H)^*) \cong_k \mathrm{Hom}_{kH}(U_H, V). \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration.

En conséquence, on obtient le résultat suivant.

8.12. Proposition. Considérons les foncteurs suivants:

$$(-)^G : kH\text{-mod} \to kG\text{-mod} \quad \text{et} \quad (-)_H : kG\text{-mod} \to kH\text{-mod}.$$

Alors $((-)^G, (-)_H)$ et $((-)_H, (-)^G)$ sont des paires adjointes.

Soient L et H deux sous-groupes de G. La relation $x \sim y$ si $x = lyh$ avec $l \in L,\ h \in H$ est une équivalence sur G. Les classes d'équivalences s'appelle *classes bilatères* de G pour L et H. Aisément si $s \in G$, alors la classe bilatère contenant s est $LsH = \{lsh \mid h \in H, l \in L\}$. On écrit $G = \bigvee_{s \in L\backslash G/H} LsH$.

8.13. Lemme. Soit S un ensemble complet de représentants des classes bilatères de G pour deux sous-groupes L et H. Si T_s est un ensemble complet de représentants des classes à droite de L modulo $L \cap (sHs^{-1})$ pour tout $s \in S$, alors $\{ts \mid t \in T_s, s \in S\}$ est un ensemble complet de représentants des classes à droite de G modulo H.

Démonstration. Supposons que $t_1s_1 = t_2s_2h$ avec $s_i \in S$, $t_i \in T_{s_i}$, et $h \in H$. Alors $s_1 = (t_1^{-1}t_2)s_2h$ avec $t_1^{-1}t_2 \in L$. Ainsi $s_1 = s_2$. Or $t_1t_2^{-1} = (s_2hs_2^{-1}) \in L \cap (s_2Hs_2^{-1})$. D'où $t_1 = t_2$, et donc $t_1s_1 = t_2s_2$. En outre, pour tout $x \in G$, on a $x = lsh$ avec $l \in L$, $s \in S$, et $h \in H$. Or $l = tsh_1s^{-1}$ avec $t \in T_s$ et $h_1 \in H$. Ainsi $x = (tsh_1s^{-1})sh = tsh_1h$. Ceci achève la démonstration.

Soit V un kH-module. Pour tout $s \in G$, $s \otimes_H V$ est un $k(sHs^{-1})$-sousmodule de V^G. En effet, pour tout $h \in H$, on a $(shs^{-1})(s \otimes_H V) = sh \otimes_H V = s \otimes_H (hV) = s \otimes_H V$.

8.14. Lemme de Mackey. Soient H et L des sous-groupes de G. Pour tout kH-module V, en tant que kL-modules, on a

$$(V^G)_L \cong \oplus_{s \in L\backslash G/H} \left((s \otimes_H V)_{L \cap sHs^{-1}})\right)^L.$$

Démonstration. Soit S un ensemble complet de représentants des classes bilatères de G pour L et H. Pour $s \in S$, prenons T_s un ensemble complet de représentants des classes à droite de L modulo $L \cap (sHs^{-1})$. D'après le lemme 8.13, $\{ts \mid s \in S, t \in T_s\}$ est un ensemble complet de représentants de G/H. D'après le lemme 8.7,

$$V^G = \oplus_{s \in S,\, t \in T_s} ts \otimes_H V = \oplus_{s \in S} \left(\oplus_{t \in T_s} ts \otimes_H V\right)$$

en tant que k-espaces vectoriels. Pour tout $s \in S$, on pose $V_s = \oplus_{t \in T_s} ts \otimes_H V$, qui est un sous-module de $(V^G)_L$. En effet, pour tous $l \in L, t \in T_s$, on a $lt = t_1(shs^{-1})$ avec $t_1 \in T_s$ et $h \in H$. Ainsi $(lts) \otimes_H V = t_1sh \otimes_H V = (t_1s) \otimes_H V \subseteq V_s$. Ainsi $(V^G)_L = \oplus_{s \in S} V_s$ en tant que kL-modules.

On montrera que V_s est relativement $(L \cap sHs^{-1})$-libre par rapport à $(s \otimes_H V)_{L \cap sHs^{-1}}$. Comme $s \otimes_H V \subseteq V_s$, on a $(s \otimes_H V)_{L \cap sHs^{-1}} \leq (V_s)_{L \cap sHs^{-1}}$. D'après le lemme 8.7, $\dim(V_s) = [L : L \cap sHs^{-1}] \dim(V)$. En outre,

$$V_s = \oplus_{t \in T_s} t(s \otimes_H V) = \sum\nolimits_{t \in L/(L \cap sHs^{-1})} t((s \otimes_H V)_{L \cap sHs^{-1}}).$$

D'après le lemme 8.5(2), V_s est relativement $(L \cap sHs^{-1})$-libre par rapport à $(s \otimes_H V)_{L \cap sHs^{-1}}$. Il suit maintenant de lemmes 8.7 et 8.2 que $V_s \cong ((s \otimes_H V)_{L \cap sHs^{-1}})^L$. Donc

$$(V^G)_L \cong \oplus_{s \in L \backslash G/H} ((s \otimes_H V)_{L \cap sHs^{-1}})^L.$$

Ceci achève la démonstration.

8.15. Lemme. Soient N un sous-groupe normal de G et V un kN-module. Si $g \in G$, alors $g \otimes_N V$ est un kN-sousmodule de V^G. En outre,

(1) $g_1 \otimes_N (g_2 \otimes_N V) \cong_{kN} (g_1g_2) \otimes_N V$, pour tous $g_1, g_2 \in G$.

(2) $1 \otimes_N V \cong_{kN} V$.

(3) Pour $g \in G$, $g \otimes_N V$ est indécomposable si et seulement si V l'est.

(4) Si W est un kG-module, alors $W_N \cong g \otimes_N W_N$, pour tout $g \in G$.

Démonstration. Pour tout $g \in G$, on a

$$N(g \otimes_N V) = (Ng) \otimes_N V = (gN) \otimes_N V = g \otimes_N NV = g \otimes_N V.$$

Ainsi $g \otimes_N V \leq (V^G)_N$.

(1) D'après le lemme 8.7, il existe un k-isomorphisme $\phi : (g_1g_2) \otimes_N V \to g_1 \otimes_N (g_2 \otimes_N V)$ tel que $\phi(g_1g_2 \otimes_N v) = g_1 \otimes_N (g_2 \otimes_N v)$, pour tout $v \in V$. Or pour tout $h \in N$,

$$\begin{aligned}\phi(h \cdot (g_1g_2 \otimes_N v)) &= \phi(g_1g_2 \otimes_N (g_1g_2)^{-1}h(g_1g_2)v)) = g_1 \otimes_N (g_2 \otimes_N g_2^{-1}(g_1^{-1}hg_1)g_2v)) \\ &= g_1 \otimes_N g_1^{-1}hg_1 \cdot (g_2 \otimes_N v) = h \cdot (g_1 \otimes_N (g_2 \otimes_N v)) = h \cdot \phi(g_1g_2 \otimes_N v)).\end{aligned}$$

Ainsi ϕ est un kN-isomorphisme.

(2) On a que $V \to 1 \otimes_N V : v \mapsto 1 \otimes_N v$ est un kN-isomorphisme.

(3) Si $V = V_1 \oplus V_2$ avec V_1, V_2 non nuls, alors $g \otimes_N V = g \otimes_N V_1 \oplus g \otimes_N V_2$, où $g \otimes_N V_1$ et $g \otimes_N V_2$ sont non nuls d'après le lemme 8.7. Si $g \otimes_N V = W_1 \oplus W_2$ avec W_1, W_2 non nuls, alors $V \cong 1 \otimes_N V \cong g^{-1} \otimes_N (g \otimes_N V) = g^{-1} \otimes_N W_1 \oplus g^{-1} \otimes_N W_2$, où $g^{-1} \otimes_N W_1$ et $g^{-1} \otimes_N W_2$ sont non nuls d'après le lemme 8.7.

(4) D'après le lemme 8.7, $\psi : W_N \to g \otimes_N W_N : w \to g \otimes_N g^{-1}w$ est un k-isomorphisme. Pour tout $h \in N, w \in V$, on a

$$\psi(hw) = g \otimes_N g^{-1}hw = g \otimes_N (g^{-1}hg \cdot g^{-1}w) = hg \otimes_N g^{-1}w = h(g \otimes_N g^{-1}w) = h\psi(w).$$

Ainsi ψ est un kN-isomorphisme. Ceci achève la démonstration.

8.16. Lemme. Soit $\mathrm{car}(k) = p > 0$. Soit A une k-algèbre locale de dimension finie. Soit $J_i \in M_p(A)$ dont le terme en position (i, i) est 1_A et les autres sont tous nuls. Soit α un automorphisme de $M_p(A)$ tel que $\alpha(J_i) = J_{i+1}$, $i = 1, \ldots, p-1$, et $\alpha(J_p) = J_1$. Alors

$$\mathcal{E} = \{M \in M_p(A) \mid \alpha(M) = M\}$$

est une k-algèbre locale.

Démonstration. Posons $R = \mathrm{rad}(A)$. Alors $M_p(R)$ est un idéal nilpotent de $M_p(A)$ tel que $M_p(A)/M_p(R) \cong M_p(A/R) \cong M_p(k)$, une k-algèbre simple. Donc $\mathrm{rad}(M_p(A)) = M_p(R)$, et ainsi $\alpha(M_p(R)) = M_p(R)$. Par conséquent

$$\bar{\alpha} : M_p(A)/M_p(R) \to M_p(A)/M_p(R) : \bar{M} \mapsto \overline{\alpha(M)}$$

est un automorphisme de $M_p(A)/M_p(R)$. Posons $\overline{\mathcal{E}} = \{\overline{M} \in M_p(A)/M_p(R) \mid \bar{\alpha}(\overline{M}) = \overline{M}\}$, qui est un quotient de $\mathcal{E}$ modulo un idéal nilpotent $\mathcal{E} \cap M_p(R)$. Ainsi $\mathcal{E}$ est locale si et seulement si $\overline{\mathcal{E}}$ l'est. Comme $M_p(A)/M_p(R) \cong M_p(k)$, $\bar{\alpha}$ induit un automorphisme β de $M_p(k)$ de sorte que $\overline{\mathcal{E}}$ est locale si et seulement si $\mathcal{E}_1 = \{X \in M_p(k) \mid \beta(X) = X\}$ l'est.

On sait que β est donné par conjugaison, c'est-à-dire, il existe une matrice inversible $Q \in M_p(k)$ telle que $\beta(X) = Q^{-1}XQ$, pour tout $X \in M_p(k)$. En particulier, $\mathcal{E}_1 = \{X \in M_p(k) \mid QX = XQ\}$. Soit $E_i \in M_p(k)$ dont le terme en position (i,i) est 1_k et les autres sont tous nuls. Alors $\beta(E_i) = E_{i+1}$, $i = 1, \ldots, p-1$, et $\beta(E_p) = E_1$. Ceci donne $E_iQ = QE_{i+1}$, $i = 1, \ldots, p-1$, et $E_pQ = QE_1$. Ainsi

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & & & \\ & 0 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & \lambda_{p-1} \\ \lambda_p & & & & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_1 \cdots \lambda_p \neq 0$. Remarquons que la forme canonique de Jordan de Q est $J_p(\lambda_0)$, où $\lambda_0 \in k$ tel que $\lambda_0^p = \lambda_1 \cdots \lambda_p$. Donc

$$\mathcal{E}_1 = \{X \in M_p(k) \mid QX = XQ\} = \{X \in M_p(k) \mid J_p(\lambda_0)X = XJ_p(\lambda_0)\},$$

qui se compose des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{p-1} & a_p \\ & a_1 & a_2 & \cdots & a_{p-1} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & a_1 & a_2 \\ & & & & a_1 \end{pmatrix}.$$

Donc $\mathcal{E}_1$ est locale. Ceci achève la démonstration.

8.17. Théorème de Green. Soit N un sous-groupe normal de G tel que G/N est un p-groupe avec $p = \mathrm{car}(k) > 0$. Si V est un kN-module indécomposable, alors V^G est un kG-module indécomposable.

Démonstration. On peut supposer $[G : N] = p^e$ avec $e > 0$. Supposons premièrement $[G : N] = p$. Alors $G/N = < \bar{g} >$ pour un $g \in G$. Ceci implique que $\{1, g, \ldots, g^{p-1}\}$ est un ensemble complet de représentants de G/H. Soit V un kN-module indécomposable. D'après le lemme 8.7, $V^G = \oplus_{i=0}^{p-1} g^i \otimes_N V$ en tant que k-espace vectoriel. D'après le lemme 8.15, en tant que kN-modules,

$$(*) \qquad (V^G)_N = (1 \otimes_N V) \oplus (g \otimes_N V) \oplus \cdots \oplus (g^{p-1} \otimes_N V),$$

où les $g^i \otimes_N V$ sont des kN-indécomposables. Supposons que $g^i \otimes_N V \cong g^j \otimes_N V$ pour certains i, j avec $0 \leq i < j \leq p-1$. Alors

$$V \cong g^{-i} g \otimes_N V \cong g^{-i} \otimes_N (g^i \otimes_N V) \cong g^{-i} \otimes_N (g^j \otimes_N V) \cong g^{j-i} \otimes_N V$$

avec $0 < j - i \leq p-1$. Posons $s = j - i$. Alors $g^{2s} \otimes_N V \cong g^s \otimes_N (g^s \otimes_N V) \cong g^s \otimes_N V \cong V$. Ainsi $g^{js} \otimes_N V$, pour tout $0 \leq j \leq p-1$. Remarquons que chauqe i est congruent à un js modulo p, et donc $g^i = g^{js} h$ avec $h \in N$ D'où, $g^i \otimes_N V = g^{js} h \otimes_N V = g^{js} \otimes_N V \cong V$. Ceci montre que les $g^i \otimes_N V$ sont 2 à 2 non isomorphes, ou bien, ils sont tous isomorphes à V.

Supposons d'abord que les $g^i \otimes_N V$ sont 2 à 2 non isomorphes. Prenons W un facteur direct non nul de V^G. Selon l'isomorphisme (*), il existe un $0 \leq r \leq p-1$ tel que $g^r \otimes_N V$ est un facteur direct de W_N. Alors $g^{r+1} \otimes_N V \cong g \otimes_N (g^r \otimes_N V)$ est un facteur direct de $g \otimes_N W_N$, ce dernier, d'après le lemme 8.15(3), est isomorphe à W_N. Ainsi $g^{r+i} \otimes_N V$ est un facteur direct de W_N, pour tout $0 \leq i \leq p-1$. Remarquons que $g^i \otimes_N V = g^{i+p} \otimes_N V$ car $g^p \in N$. Donc $g^i \otimes_N V$ est un facteur direct de W_N pour tout $0 \leq i \leq p-1$. Comme les $g^i \otimes_N V$ sont deux à deux non isomorphes, $(V^G)_N = \oplus_{i=0}^{p-1} (g^i \otimes_N V)$ est un facteur direct de W_N. Par conséquent, $W_N = (V^G)_N$, c'est-à-dire, $W = V^G$. Ceci montre que V^G est indécomposable dans ce cas.

Ensuite supposons que $g^i \otimes_N V \cong V$, pour tout $0 \leq i \leq p-1$. On montrera que $\mathrm{End}_{kG}(V^G)$ est locale. Soit $T \in \mathrm{Aut}_k(V^G)$ tel que $T(x) = gx$, pour tout $x \in V^G$. Si $\phi \in \mathrm{End}_{kN}((V^G)_N)$, on prétend que $T\phi T^{-1} \in \mathrm{End}_{kN}((V^G)_N)$. En effet, pour tous $h \in N,\ x \in V^G$,

$$(T\phi T^{-1})(hx) = g\phi(g^{-1}hx) = g(\phi(g^{-1}hg \cdot g^{-1}x) = gg^{-1}hg\phi(g^{-1}x) = h \cdot (T\phi T^{-1})(x).$$

Ainsi $\Psi : \phi \mapsto T\phi T^{-1}$ est un kN-automorphisme de $(V^G)_N$. Comme $G = \{g^i h \mid h \in N, i = 0, 1, \ldots, p-1\}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{End}_{kG}(V^G) &= \{\phi \in \mathrm{End}_k(V^G) \mid \phi(gx) = g\phi(x),\ \phi(hx) = h\phi(x),\ x \in V^G, h \in N\} \\
&= \{\phi \in \mathrm{End}_k(V^G) \mid \phi T = T\phi,\ \phi(hx) = h\phi(x),\ x \in V^G, h \in N\} \\
&= \{\phi \in \mathrm{End}_{kN}((V^G)_N) \mid \phi = T\phi T^{-1} = \Psi(\phi)\}.
\end{aligned}$$

Comme $(V^G)_N \cong V^p$, on a un isomorphisme $\Phi : \mathrm{End}_{kN}((V^G)_N) \to M_p(\mathrm{End}_{kN}(V))$ de k-algèbres. Donc $\alpha = \Phi\Psi\Phi^{-1}$ est un automorphisme de $M_p(\mathrm{End}_{kN}(V))$ tel que

$$\{\phi \in \mathrm{End}_{kN}((V^G)_N) \mid \phi = \Psi(\phi)\} \cong \{M \in M_p(\mathrm{End}_{kN}(V)) \mid \alpha(M) = M\}.$$

Pour $1 \leq i \leq p$, posons $E_i \in \mathrm{End}_{kN}((V^G)_N)$ qui est indentité sur $g_i \otimes_N V$ et s'annule sur $g_j \otimes_N V$, pour tout $j \neq i$. Alors $J_i = \Phi(E_i) \in M_p(\mathrm{End}_{kN}(V))$ dont le terme en position (i,i) est $\mathbb{1}_V$ et les autres sont tous nuls. Comme $T(g^i \otimes_N v) = g(g^i \otimes_N v) = g^{i+1} \otimes_N v$, pour tout $v \in V$, on a $TE_iT^{-1} = E_{i+1}, i = 1, \ldots, p-1$, et $TE_pT^{-1} = E_1$. Ainsi $\alpha(J_i) = J_{i+1}, i = 1, \ldots, p-1$, et $\alpha(J_p) = J_1$. Or $\mathrm{End}_{KN}(V)$ est locale comme V est indécomposable, il suit du lemme 8.17 que $\{M \in M_p(\mathrm{End}_{kN}(V)) \mid \alpha(M) = M\}$ est locale. En conséquence, $\mathrm{End}_{kG}(V^G)$ est locale. Ceci implique que V^G est indécomposable.

Enfin supposons que $[G : N] = p^e$ avec $e > 1$. Alors il existe une suite

$$N = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_e = G$$

de sous-groupes de G telle que $[G_{i+1} : G_i] = p$, pour tout $0 \leq i \leq e-1$. On a V^{G_1} est kG_1-indécomposable, et donc $(V^{G_1})^{G_2}$ est kG_2-indécomposable. D'après le lemme 8.8(2), $V^{G_2} \cong (V^{G_1})^{G_2}$ est kG_2-indécomposable. Enfin, $V^G = V^{G_r}$ est indécomposable. Ceci achève la démonstration.

9. Sommets et sources

Partout dans cette section, on se fixe H un sous-groupe de G.

9.1. Définition. Soit U un kG-module. On dit que U est *relativement H-projectif* s'il satisfait à la condition suivante: étant donné un kG-épimorphisme $\phi : V \to W$, pour tout kG-morphisme $\psi : U \to W$, il existe un kG-morphisme $\rho : U \to V \in kG$-mod tel que $\psi = \phi\rho$ lorsqu'il existe un kH-morphisme $\sigma : U \to V$ tel que $\psi = \phi\sigma$.

Remarque. Tout kG-module est relativement G-projective.

9.2. Proposition. Les conditions suivantes sont équivalentes pour un kG-module U:

(1) U est relativement H-projectif.

(2) Tout kG-épimorphisme $X \to U$ est scindé dans kG-mod lorsqu'il est scindé dans kH-mod.

(3) U est un facteur direct de $(U_H)^G$.

(4) U est un facteur direct d'un kG-module relativement H-libre.

Démonstration. Supposons que (1) est valide. Soit $\phi : X \to U$ un épimorphisme dans kG-mod. Si ϕ est scindé dans kH-mod, alors $\mathbb{1}_U = \pi\sigma$ avec $\sigma \in kG$-mod. D'après (1), il existe $\psi : U \to X$ tel que $\mathbb{1}_U = \phi\psi$, c'est-à-dire, ϕ est scindé dans kG-mod.

Supposons maintenant que (2) est valide. Comme $kG \times U_H \to U : (a, u) \mapsto au$ est kH-bilinéaire et surjective, il existe un kG-épimorphisme $\phi : kG \otimes_H U_H \to U$ tel que $\phi(a \otimes_H u) = au$. Or $\psi : U \to kG \otimes_H U_H : u \mapsto 1 \otimes_H u$ est kH-linéaire tel que $\phi\psi = \mathbb{1}_U$. Donc ϕ est scindé dans kH-mod, et donc scindé dans kG-mod. C'est-à-dire, U est un facteur direct de $(U_H)^G$.

D'après le lemme 8.7, $(U_H)^G$ est relativement H-libre. Donc (3) implique (4).

Supposons enfin que L est un kG-module relativement H-libre par rapport à un kH-monomorphisme $j : X \to L$. Étant donné un kG-épimorphisme $\alpha : M \to N$. Soit $\beta : L \to N$ un kG-morphisme. Supposons que $\gamma : L \to M$ un kH-morphisme tel que $\beta = \alpha\gamma$. Considérons le kH-morphisme $\gamma j : X \to M$. Il existe un kG-morphisme $\phi : L \to M$ tel que $\phi j = \gamma j$. D'où $\beta j = \alpha\phi j$, c'est-à-dire, $(\beta - \alpha\phi)j = 0 = 0j$. Ainsi $\beta = \alpha\phi$. Ceci montre que L est relativement H-projectif. Il est facile de vérifier que tout facteur direct de L est également relativement H-projectif. Ceci achève la démonstration.

Remarques. (1) Comme tout kG-épimorphisme est k-scindé, on voit que U est relativement $\{1\}$-projectif si et seulement si U est kG-projectif.

(2) Les kG-modules relativement H-projectifs sont fermés pour les facteurs directs et pour les sommes directes.

9.3. Théorème. Soit $\mathrm{car}(k) = p > 0$. Si H contient un p-sousgroupe de Sylow de G, alors tout kG-module U est relativement H-projectif.

Démonstration. Supposons que H contient un p-sousgroupe de Sylow de G. Alors $[G : H]$ est inversible dans k. Soit $\phi : V \to U$ un kG-épimophisme qui est scindé dans

kH-mod. Alors il existe un idempotent $\pi \in \mathrm{End}_{kH}(V)$ tel que $\pi(V) = U$. Posons

$$\varepsilon = \frac{1}{[G:H]} \sum_{g \in G/H} g\pi g^{-1} \in \mathrm{End}_k(V).$$

Alors

$$\begin{aligned} \varepsilon(V) &= \tfrac{1}{[G:H]} \textstyle\sum_{g \in G/H} g\pi g^{-1}(V) = \tfrac{1}{[G:H]} \sum_{g \in G/H} g\pi(V) \\ &= \tfrac{1}{[G:H]} \textstyle\sum_{g \in G/H} g(U) = \tfrac{1}{[G:H]} \sum_{g \in G} U = U. \end{aligned}$$

En plus, pour tout $x \in U$,

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{[G:H]} \sum_{g \in G/H} g\pi g^{-1}(x) = \frac{1}{[G:H]} \sum_{g \in G/H} gg^{-1}(x) = \frac{1}{[G:H]} \sum_{g \in G/H} x = x.$$

Par conséquent, $\varepsilon^2 = \varepsilon$. Enfin, pour tous $h \in G, y \in V$, on a

$$\begin{aligned} \varepsilon(hy) &= \tfrac{1}{[G:H]} \textstyle\sum_{g \in G} g\pi g^{-1}(hy) = \tfrac{1}{[G:H]} \sum_{g \in G} h(h^{-1}g)g\pi(h^{-1}g)^{-1}(y) \\ &= \tfrac{h}{[G:H]} \textstyle\sum_{g \in G} g\pi g^{-1}(y) = h(\varepsilon(y)). \end{aligned}$$

Ainsi ε est un idempotent de $\mathrm{End}_{kG}(V)$ tel que $\varepsilon(V) = U$. Par conséquent, U est un kG-facteur direct de V. Ceci achève la démonstration.

Remarques. Tout kG-module est relativement projectif pour un p-sousgroupe de Sylow de G.

(2) Si $p \not| \, |G|$, alors $\{1\}$ est un p-sousgroupe de Sylow de G. Ainsi tout kG-module est relativement $\{1\}$-projective, c'est-à-dire kG-projectif. Par conséquent, kG est semisimple.

9.4. Corollaire. Soit $\mathrm{car}(k) = p > 0$. Si H contient un p-sousgroupe de Sylow de G, alors un kG-module U est kG-projectif si et seulement si U_H est kH-projectif.

Démonstration. La nécessité se découle du théorème 5.2. Supposons maintenant que H contient un p-sousgroupe de Sylow de G et U est un kG-module tel que U_H est projectif. D'après le lemme 8.8(3), $(U_H)^G$ est kG-projectif. En outre U est relativement H-projectif d'après le théorème 9.3. Donc U est un facteur direct de $(U_H)^G$ d'après la proposition 9.2(3). Par conséquent, U est kG-projectif. Ceci achève la démonstration.

9.5. Lemme. Soit U un kG-module relativement H-projectif.

(1) Pour tout $g \in G$, U est relativement gHg^{-1}-projectif.

(2) Si N est un sous-groupe de G contenant H, alors U est relativement N-projectif et U_N est relativement H-projectif.

Démonstration. (1) Soient V, W des kG-modules et $\psi : V \to W$ un k-morphisme. Pour $g \in G$, considérons le k-morphisme $g \circ \psi \circ g^{-1} : V \to W : x \mapsto g\psi(g^{-1}x)$. Il est facile de vérifier que si ψ est kH-linéaire, alors $g \circ \psi \circ g^{-1}$ est $k(gHg^{-1})$-linéaire. En particulier, si ψ est kG-linéaire, alors $g \circ \psi \circ g^{-1}$ l'est aussi.

Supposons que U est relativement H-projectif. Soit $\psi : V \to W$ un kG-épimorphisme et $\phi : U \to W$ un kG-homomorphisme. Supposons qu'il existe $\alpha : U \to V \in k(gHg^{-1})$-mod tel que $\phi = \psi \circ \alpha$. Alors $g^{-1} \circ \phi \circ g = (g^{-1} \circ \psi \circ g) \circ (g^{-1} \circ \alpha \circ g)$ avec $g^{-1} \circ \phi \circ g,\ g^{-1} \circ \psi \circ g \in kG$-mod et $g^{-1} \circ \alpha \circ g \in k(g^{-1}gHg^{-1}g)$-mod$=kH$-mod. Donc il existe $\beta \in kG$-mod tel que $g^{-1} \circ \phi \circ g = (g^{-1} \circ \psi \circ g) \circ \beta$. Par conséquent, $\phi = \psi \circ (g \circ \beta \circ g^{-1})$ avec $g \circ \beta \circ g^{-1} \in kG$-mod.

(2) D'après la proposition 9.2(3), U est un facteur direct de $(U_H)^G$, ce dernier est isomorphe à $((U_H)^N)^G$ d'après le lemme 8.8(3). Comme $((U_H)^N)^G$ est relativement N-libre, U est relativement N-projectif. Posons $S = U_H$. Alors U_N est un facteur direct de $(S^G)_N$. D'après le lemme de Mackey, en tant que kN-modules,

$$(S^G)_N = \oplus_{g \in N \backslash G / H} ((g \otimes_H S)_{N \cap gHg^{-1}})^N.$$

Soit V un facteur direct indécomposable de U_N. Alors il existe $g \in G$ tel que V est un facteur direct de $((g \otimes_H S)_{N \cap gHg^{-1}})^N$, un kN-module relativement $(N \cap gHg^{-1})$-libre. Donc V est relativement $(N \cap gHg^{-1})$-projectif. D'après la première partie de cet énoncé, V est relativement (gHg^{-1})-projectif. D'après l'énoncé (1), V est relativement H-projectif. Par conséquent, U_N est relativement H-projectif. Ceci achève la démonstration.

9.6. Lemme. Soit U un kG-module indécomposable relativement H-projectif. Alors il existe un facteur direct indécomposable S de U_H tel que U est un facteur direct de S^G.

Démonstration. Soit $U_H = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$, où V_i est kH-indécomposable. D'après la proposition 9.2(3), U est un facteur direct de $(U_H)^G = V_1^G \oplus \cdots \oplus V_r^G$. Étant indécomposable, U est un facteur direct de V_i^G pour certain $1 \leq i \leq r$. Ceci achève la démonstration.

9.7. Définition. Soit U un kG-module indécomposable. Soit Q un sous-groupe de G d'ordre minimal tel que U est relativement Q-projectif. Soit S un facteur direct indécomposable de U_H tel que U est un facteur direct de S^G. On appelle Q un *sommet* et S une *source* de U.

Remarques. (1) Un kG-module U est projectif si et seulement si U est relativement $\{1\}$-projectif si et seulement si $Q = \{1\}$. On voit donc que le plus petit Q est, le plus près U est d'être projectif.

(2) Si $\mathrm{car}(k) = p > 0$, il suit du théorème 9.3 que tout sommet d'un kG-module est un p-groupe.

9.8. Lemme. Soit U un kG-module indécomposable dont Q est un sommet et S est une source. Si U est relativement H-projectif et T est un facteur direct indécomposable de U_H tel que U est un facteur direct de T^G, alors il existe $g \in G$ tel que $gQg^{-1} \subseteq H$ et T est un facteur direct de $((g \otimes_Q S)_{gQg^{-1}})^H$.

Démonstration. On a que U est un facteur direct de S^G, et ainsi U_H est un facteur direct de $(S^G)_H$. Supposons que T est un facteur direct indécomposable de U_H tel que U est un facteur direct de T^G. Alors T est un facteur direct de $(S^G)_H$. D'après le lemme de Mackey, en tant que kH-modules,

$$(S^G)_H = \oplus_{g \in H\backslash G/Q}((g \otimes_Q S)_{H \cap gGg^{-1}})^H.$$

Étant kH-indécomposable, T est un facteur direct de $((g \otimes_Q S)_{H\cap gGg^{-1}})^H$ pour un $g \in G$. Ainsi T^G est un facteur direct de $(((g \otimes_Q S)_{H\cap gGg^{-1}})^H)^G$ qui, d'après le lemme 8.8(3), est isomorphe à $((g \otimes_Q S)_{H\cap gGg^{-1}})^G$. Donc U est un facteur direct de $((g \otimes_Q S)_{H\cap gGg^{-1}})^G$. D'après le les lemmes 8.7 et 9.2(4), U est relativement $(H \cap gQg^{-1})$-projectif. D'après la minimalité de l'ordre de Q, on a $gQg^{-1} = H \cap gQg^{-1}$. D'où on tire que $gQg^{-1} \subseteq H$ et $((g \otimes_Q S)_{H\cap gQg^{-1}})^H = ((g \otimes_Q S)_{gQg^{-1}})^H$. Ceci achève la démonstration.

9.9. Théorème. Soit U un kG-module indécomposable dont Q est un sommet et S est une source.

(1) U est relativement H-projectif si et seulement si H contient un conjugué de Q.

(2) Les sommets de U forment une classe de conjugué de sous-groupes de G.

(3) Si T est une autre source de U, alors $T \cong g \otimes_Q S$ pour certain $g \in N_G(Q)$.

(4) Si $\mathrm{car}(k) = p > 0$, alors Q est un p-groupe.

Démonstration. (1) Si U est relativement H-projectif, d'après le lemme 9.8, on a $gQg^{-1} \subseteq H$ pour certain $g \in G$. Réciproquement, si $gQg^{-1} \subseteq H$ avec $g \in G$, d'après le lemme 9.5(1), U est relativement gQg^{-1}-projectif et donc relativement H-projectif. L'énoncé (2) suit immédiatement de l'énoncé (1) et le lemme 9.5(1).

(3) Soit T un facteur direct indécomposable de U_Q tel que U est un facteur direct de T^G. D'après le lemme 9.8, il existe $g \in G$ tel que $gQg^{-1} \subseteq Q$ et T est un facteur direct de $((g \otimes_Q S)_{gQg^{-1}})^Q$. On a donc $gQg^{-1} = Q$ c'est-à-dire $g \in N_G(Q)$, et $((g \otimes_Q S)_{gQg^{-1}})^Q = g \otimes_Q S$. D'après le lemme 8.15(3), $(g \otimes_Q S)$ est kQ-indécomposable. Ainsi $T \cong g \otimes_Q S$.

(4) Supposons que $\mathrm{car}(k) = p > 0$. Prenons P un p-sousgroupe de Sylow de G. D'après le théorème 9.3, U est relativement P-projectif. Ainsi P contient un conjugué de Q. Par conséquent, Q est un p-groupe. Ceci achève la démonstration.

Remarque. Il suit du théorème 9.9(1) et le lemme 9.5(1) qu'un kG-module U est relativement H-projectif si et seulement si H contient un sommet de U.

Dès maintenant jusqu'à la fin de cette section, on suppose que $\mathrm{car}(k) = p > 0$.

9.10. Exemple. Les sommets du module trivial k sont les p-sousgroupes de Sylow de G. Par conséquent, les p-sousgroupes de Sylow de G sont deux à deux conjugués.

Démonstration. Soit P un p-sousgroupe de Sylow de G. On sait que P contient un sommet Q de k. D'après le lemme 9.5(2), k_P est relativement Q-projectif. D'après la proposition 9.2(3), k_P est un facteur direct de $(k_Q)^P$. On montrera que $(k_Q)^P$ est indécomposable. Il suffit de montrer que son socle est de dimension un. Étant un p-groupe, kP admet un seule module simple k_P. Ainsi la dimension de $\mathrm{soc}(k_Q)^P$ est la multiplicité de k_P en tant que facteur de composition de $\mathrm{soc}(k_Q)^P$. Ainsi, d'après la dualité du numéro 3(1) du devoir 5, on a $\dim\mathrm{soc}(k_Q)^P = \dim\mathrm{Hom}_{kP}(k_P, (k_Q)^P)$. Mais d'après le lemme 8.11,

$$\mathrm{Hom}_{kP}(k_P, (k_Q)^P) \;\cong\; \mathrm{Hom}_{kQ}((k_P)_Q, k_Q) = \mathrm{Hom}_{kQ}(k_Q, k_Q),$$

qui est de dimension un. Donc $(k_Q)^P$ est indécomposable. Ceci implique que $k_P \cong (k_Q)^P$. D'après les lemmes 8.7 et 8.5(2), on a $\dim(k_Q)^P = [P : Q]\dim(k_Q)$. D'où, $[P : Q] = 1$, c'est-à-dire, $P = Q$. Ceci achève la démonstration.

Remarque. Si G est un p-groupe, alors G est le seul sommet de k. Ceci veut dire que k est très loin d'être projecif.

9.11. Proposition. Soit U un kG-module indécomposable dont Q est un sommet. Soit H un sous-groupe de G contenant Q. Alors toutes les deux conditions des conditions suivantes sont satisfaites simultanément pour certain kH-module indécomposable V:

(1) V est un facteur direct de U_H;

(2) U est un facteur direct de V^G;

(3) Q est un sommet de V.

Démonstration. (a) Comme $Q \subseteq H$, d'après le théorème 9.9(1), U est relativement H-projectif. D'après le lemme 9.6, il existe un facteur direct indécomposable V de U_H tel que U est un facteur direct de V^G.

(b) Soit S une source de U. Alors U est un facteur direct de $S^G \cong (S^H)^G$. Ainsi il exsite un facteur direct indécomposable V de S^H tel que U est un facteur direct de V^G. D'après le lemme 9.2(3), V est relativement Q-projectif. Donc Q contient un sommet R de V. Alors V est facteur direct de $(V_R)^H$. Par conséquent, U est un facteur direct de $((V_R)^H)^G = (V_R)^G$. En particulier, U est relativement R-projectif. Ainsi $Q = R$ d'après la minimalité de $|Q|$. Ceci implique que Q est un sommet de V.

(c) Soit S une source de U. Alors S est un facteur direct indécomposable de U_Q tel que de U est un facteur direct de S^G. Comme $U_Q = (U_H)_Q$, il exsite un facteur direct indécomposable V de U_H tel que S est un facteur direct de V_Q. D'après le lemme 9.5(2), V est relativement Q-projectif. Ainsi Q contient un sommet R de V. D'après le lemme 9.5(2), V_Q est relativement R-projectif. Donc V_Q est un facteur direct de $((V_Q)_R)^Q = (V_R)^Q$. Ceci implique que S^G est un facteur direct de $((V_R)^Q)^G = (V_R)^G$. Par conséquent, U est un facteur direct de $(V_R)^G$, et donc relativement R-projectif. Ainsi $Q = R$ d'après la minimalité de $|Q|$, c'est-à-dire, Q est un sommet de V. Ceci achève la démonstration.

9.12. Lemme. Soit U un kG-module indécomposable dont Q est un sommet et k_Q est une source. Si H est un sous-groupe de G, alors U_H admet un facteur direct indécomposable ayant un sommet contenant $Q \cap H$.

Démonstration. Par hypothèse, k_Q est un facteur direct de U_Q. Ainsi $k_{Q\cap H}$ est un facteur direct de $U_{Q\cap H} = (U_H)_{Q\cap H}$. Comme $k_{Q\cap H}$ est indécomposable, il existe un facteur direct indécomposable V de U_H tel que $k_{Q\cap H}$ est un facteur direct de $V_{Q\cap H}$.

Soit R un sommet de V. En particulier, V est relativement R-projectif. Donc V est un facteur direct de $(V_R)^H$. Ceci imlique que $V_{Q\cap H}$ est un facteur direct de

$$((V_R)^H)_{Q\cap H} = \oplus_{h\in(Q\cap H)\backslash H/R}((h \otimes_R V_R)_{(Q\cap H)\cap hRh^{-1}})^{Q\cap H}.$$

Par conséquent, $k_{Q\cap H}$ est un facteur direct de $((h\otimes_R V_R)_{(Q\cap H)\cap hRh^{-1}})^{Q\cap H}$ pour certain $h \in H$. Ainsi $k_{Q\cap H}$ est relativement $(Q \cap H \cap hRh^{-1})$-projectif pour un $h \in H$. Comme Q est un p-groupe, $Q \cap H$ l'est également. Ainsi $Q \cap H$ est le sommet de $k_{Q\cap H}$. Ceci entraîne que $(Q \cap H \cap hRh^{-1}) = Q \cap H$, c'est-à-dire, $Q \cap H \subseteq hRh^{-1}$. Ce dernier est un sommet de V. Ceci achève la démonstration.

9.13. Lemme. Soit N un sous-groupe normal de G, et soit U un kG-module tel que U_N indécomposable. Si Q est un sommet de U, alors QN/N est un p-sousgroupe de Sylow de G/N.

Démonstration. Soit Q un sommet de U. Remarquons que Q est un p-groupe. Prenons S un p-sousgroupe de Sylow de G qui contient Q. Alors SN/N est un p-sousgroupe de Sylow de G/N contenant QN/N. On veut montrer que $SN/N = QN/N$.

D'après la proposition 9.11, il existe un facteur direct indécomposable de U_{SN} dont Q est un sommet. Mais U_{SN} est indécomposable car U_N l'est. Donc U_{SN} est relativement QN-projectif car $Q \subseteq QN$, et ainsi U_{SN} est un facteur direct de $((U_{SN})_{QN})^{SN} = (U_{QN})^{SN}$. Comme QN/N est un sous-groupe du p-groupe SN/N, il existe une suite

$$QN/N = R_0/N \lhd R_1/N \lhd \cdots \lhd R_s/N = SN/N,\ N \subseteq R_i$$

de sous-groupes de SN/N telle que $[R_i/N : R_{i-1}/N] = p$, $i = 1, \ldots, s$. On a donc une suite

$$QN = R_0 \lhd R_1 \lhd \cdots \lhd R_s = SN$$

de sous-groupes de SN telle que R_i/R_{i-1} est d'ordre p, $i = 1, \ldots, s$. Or U_{QN} est indécomposable car U_N l'est. D'après le théorème de Green, $(U_{QN})^{SN}$ est indécomposable. Ainsi $U_{SN} \cong (U_{QN})^{SN}$. D'après le lemme 8.7, $\dim U_{SN} = [SN : QN]\dim U_{QN}$. Cela veut dire que $\dim U = [SN : QN]\dim U$. Ainsi $SN = QN$. Ceci achève la démonstration.

10. Intersections triviales

Partout dans cette section, on suppose que $\mathrm{car}(k) = p > 0$ et que P est un p-sousgroupe de Sylow de G d'intersection triviale, c'est-à-dire, pour tout $g \in G$, soit $P \cap (gPg^{-1}) = P$ soit $P \cap (gPg^{-1}) = \{1\}$. On note $L = N_G(P)$ le normaliseur de P dans G.

10.1. Lemme. Si $g \in G \backslash L$, alors l'ordre de $L \cap (gLg^{-1})$ n'est pas divisible par p. Par conséquent, $k(L \cap (gLg^{-1}))$ est semisimple.

Démonstration. On a $P \trianglelefteq L$, et donc $gPg^{-1} \trianglelefteq gLg^{-1}$, pour tout $g \in G$. Ainsi P est le seul p-sousgroupe de Sylow de L, et gPg^{-1} est le seul p-sousgroupe de Sylow de gLg^{-1}. Soit H un p-sousgroupe de Sylow de $L \cap (gLg^{-1})$ contenant $P \cap (gPg^{-1})$. Alors H est un p-sousgroupe de L. Ainsi $H \subseteq P$. De même, $H \subseteq gPg^{-1}$. Donc $P \cap (gPg^{-1}) = H$ est un p-sousgroupe de Sylow de $L \cap (gLg^{-1})$. Si $g \in G \backslash L$, alors $gPg^{-1} \neq P$, et donc $P \cap (gPg^{-1}) = \{1\}$ par hypothèse. Cele veut dire que $p \not| |L \cap (gLg^{-1})|$. Ceci achève la démonstration.

10.2. Théorème. Il existe une correspondance bijective entre les classes d'isomorphisme des kG-modules indécomposables non projectifs et les classes d'isomorphisme des kL-modules indécomposables non projectifs. Si $U \in kG$-mod et $V \in kL$-mod sont de tels modules qui se correspondent, alors

$$U_L \cong V \oplus Q \qquad \text{et} \qquad V^G = U \oplus R$$

avec R un kG-module projectif et Q un kL-module projectif.

Démonstration. Soit V un kL-module indécomposable non projectif. Soit $\{g_1, g_2, \ldots, g_r\}$ avec $g_1 = 1$ un ensemble complet de représentants des classes bilatères de G pour L et L. D'après le lemme de Mackey,

$$(*) \qquad (V^G)_L \cong \oplus_{i=1}^r ((g_i \otimes_L V)_{L \cap g_i L g_i^{-1}})^L \cong V \oplus Y, \quad \text{où} \quad Y = \oplus_{i=2}^r ((g_i \otimes_L V)_{L \cap (g_i L g_i^{-1})})^L.$$

Pour tout $i \geq 2$, on a $g_i \notin L$, et donc $k(L \cap (g_i L g_i^{-1}))$ est semisimple, d'après le lemme 10.1. En particulier, $(g_i \otimes_L V)_{L \cap (g_i L g_i^{-1})}$ est projectif. D'après le lemme 8.8(3), $((g_i \otimes_L V)_{L \cap (g_i L g_i^{-1})})^L$ est projectif. D'où, Y est kL-projectif. Posons $V^G = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_n$ avec les U_i kG-indécomposables. Alors $(V^G)_L = (U_1)_L \oplus (U_2)_L \oplus \cdots \oplus (U_n)_L$. D'après le corollaire 9.4, U_i est

kG-projectif si et seulement si $(U_i)_L$ est kL-projectif puisque L contient un p-sousgroupe de Sylow de G. D'après $(*)$, il existe un unique i avec $1 \le i \le n$ tel que $(U_i)_L$ est non projectif. Donc il existe un unique i avec $1 \le i \le n$ tel que U_i est non kG-projectif. Supposons que U_1 est non projectif et posons $U = U_1$ et $R = \oplus_{i=2}^n U_i$. Alors $V^G = U \oplus R$ avec U indécomposable non projectif et R projectif. On voit maintenant que $V \oplus Y \cong (V^G)_L = U_L \oplus R_L$. Comme R_L est projectif et V est indécomposable non projectif, V est un facteur direct de U_L. Donc $U_L = V \oplus Q$. Ainsi $V \oplus Y = V \oplus Q \oplus R_L$. D'où Q est un factuer direct de Y, et donc kL-projectif.

Supposons que U correspond à deux tels modules V_1 et V_2. Alors $U_L = V_1 \oplus Q_1 = V_2 \oplus Q_2$ avec Q_1 et Q_2 kL-projectifs. D'après le théorème de Krull-Schmidt, $V_1 \cong V_2$.

Soit enfin U un kG-module indécomposable non projectif. D'après le théorème 9.3, U est relativement L-projectif. D'après le lemme 9.6, il existe un facteur direct indécomposable V de U_L tel que U est un facteur direct de V^G. Comme U est non kG-projectif, d'après le lemme 8.8(3), V est non kL-projectif. D'après l'argument précédent, V^G contient un unique facteur direct non projectif indécomposable qui est nécessairement U. Ainsi U correspond à V. Ceci achève la démonstration.

10.3. Lemme. Soit H un sous-groupe de G. Alors une suite exacte

$$0 \to V_1 \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\beta} V_2 \to 0$$

dans kH-mod est scindée si et seulement si

$$0 \to V_1^G \xrightarrow{\alpha^G} V^G \xrightarrow{\beta^G} V_2^G \to 0$$

est scindée dans kG-mod.

10.4. Théorème. Soient U_1 et U_2 des kG-modules indécomposables non projectifs correspondants aux kL-modules indécomposables non projectifs V_1 et V_2, respectivement. Alors $\mathrm{Ext}^1_{kL}(V_2, V_1)$ est non nul si et seulement si $\mathrm{Ext}^1_{kG}(U_2, U_1)$ est non nul.

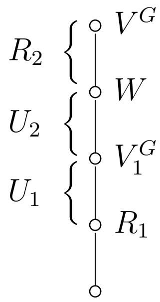
Démonstration. Supposons que $0 \to V_1 \xrightarrow{i} V \xrightarrow{\phi} V_2 \to 0$ est une suite exacte non scindée dans kL-mod, où i est l'inclusion. D'après le lemme 10.3,

$$(*) \quad 0 \to V_1^G \xrightarrow{i^G} V^G \xrightarrow{\phi^G} V_2^G \to 0$$

est une suite exacte non scindée dans kG-mod. Posons $V_i^G = U_i \oplus R_i$, où R_i est kG-projectif, $i = 1, 2$. Comme $U_2 \oplus R_2 = V_2^G \cong V^G/V_1^G$, il existe un sous-module W de V^G contenant V_1^G tel que $W/V_1^G \cong U_2$, et donc

$$V^G/W \cong (V^G/V_1^G)/(W/V_1^G) \cong V_2^G/U_2 \cong R_2.$$

Ceci donne un diagramme



Alors $(W/R_1)/U_1 \cong (W/R_1)/(V_1^G/R_1) \cong W/V_1^G \cong U_2$. Supposons que V_1^G/R_1 est un facteur direct de W/R_1. Alors il existe un sous-module X de W tel que $W = X + V_1^G$ et $X \cap V_1^G = R_1$. Étant kG-projectif, R_1 est kG-injectif. Ainsi $X = Y \oplus R_1$. Ceci donne

$$W = X + V_1^G = Y + R_1 + V_1^G = Y + V_1^G.$$

Or $Y \cap V_1^G = Y \cap (R_1 \cap V_1^G) = (Y \cap R_1) \cap V_1^G = 0$. Donc $W = Y \oplus V_1^G$. Comme $(V^G/Y)/(W/Y) \cong V^G/W \cong R_2$ est projectif, W/Y est un facteur direct de V^G/Y. Ainsi il existe un sous-module Z de V^G tel que $V^G = Z + W$ et $Z \cap W = Y$. Donc

$$V^G = Z + W = Z + Y + V_1^G = Z + V_1^G.$$

Comme $Z \cap V_1^G = Z \cap (W \cap V_1^G) = Y \cap V_1^G = 0$, on a $V^G = Z \oplus V_1^G$. Ainsi $(*)$ est une suite scindée, une contradiction. Ceci montre que V_1^G/R_1 n'est pas un facteur direct de W/R_1. Donc $0 \to U_1 \to W/R_1 \to U_2 \to 0$ est exacte non scindée dans kG-mod.

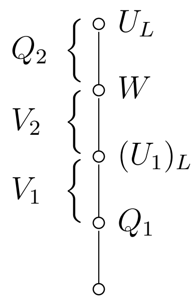
Réciproquement supposons que $0 \to U_1 \xrightarrow{i_L} U \xrightarrow{\psi} U_2 \to 0$ est une suite exacte non scindée dans kG-mod, où i est l'inclusion. D'après le théorème 9.3, U_2 est relativement L-projectif. Ainsi ψ n'est pas scindée dans kL-mod, c'est-à-dire, la suite exacte

$$(**) \qquad 0 \to (U_1)_L \xrightarrow{i} U_L \xrightarrow{\psi_L} (U_2)_L \to 0$$

dans kL-mod n'est pas scindée. Posons $(U_i)_L = V_i \oplus Q_i$, où Q_i est kL-projectif, $i = 1, 2$. Comme $V_2 \oplus Q_2 = (U_2)_L \cong U_L/(U_1)_L$, il existe un sous-module W de U_L contenant $(U_1)_L$ tel que $W/(U_1)_L \cong V_2$, et donc

$$U_L/W \cong (U_L/(U_1)_L)/(W/(U_1)_L) \cong (U_2)_L/V_2 \cong Q_2.$$

Ceci donne un diagramme



Alors $(W/Q_1)/((U_1)_L/Q_1) \cong W/(U_1)_L \cong V_2$. Supposons que $(U_1)_L/Q_1$ est un facteur direct de W/Q_1. Alors il existe un sous-module X de W tel que $W = X + (U_1)_L$ et $X \cap (U_1)_L = Q_1$. Étant kL-projectif, Q_1 est kL-injectif. Ainsi $X = Y \oplus Q_1$. Or

$$W = X + (U_1)_L = Y + Q_1 + (U_1)_L = Y + (U_1)_L.$$

Comme $Y \cap (U_1)_L = Y \cap (Q_1 \cap (U_1)_L) = 0$, on a $W = Y \oplus (U_1)_L$. En outre, comme $(U_L/Y)/(W/Y) \cong U_L/W \cong Q_2$ est projectif, W/Y est un facteur direct de U_L/Y. Ainsi il existe un sous-module Z de U_L tel que $U_L = Z + W$ et $Z \cap W = Y$. Ceci donne

$$U_L = Z + W = Z + Y + (U_1)_L = Z + (U_1)_L.$$

Comme $Z \cap (U_1)_L = Z \cap (W \cap (U_1)_L) = Y \cap (U_1)_L = 0$, on voit que $U_L = Z \oplus (U_1)_L$. Ainsi $(**)$ est scindée, une contradiction. Ceci montre que $(U_1)_L/Q_1$ n'est pas un facteur direct de W/Q_1. Donc $0 \to V_1 \to W/Q_1 \to V_2 \to 0$ est une suite exacte non scindée dans kL-mod. Ceci achève la démonstration.

Soient U et V des kG-modules. Désignons par $P(U, V)$ le k-sousespace de $\mathrm{Hom}_{kG}(U, V)$ des homomorphismes qui se factorisent par un kG-module projectif. Posons

$$\overline{\mathrm{Hom}}_{kG}(U, V) = \mathrm{Hom}_{kG}(U, V)/P(U, V).$$

10.5. Lemme. Pour tous kL-module V et kG-module U, on a

$$\overline{\mathrm{Hom}}_{kG}(V^G, U) \cong \overline{\mathrm{Hom}}_{kL}(V, U_L).$$

Démonstration. Soit $j : V \to V^G : x \mapsto 1 \otimes_L x$. On a vu dans le lemme 8.11 que

$$\Phi : \mathrm{Hom}_{kG}(V^G, U) \to \mathrm{Hom}_{kL}(V, U_L) : \phi \mapsto \phi j$$

est un k-isomorphisme. Donc il suffit de vérifier que $\phi \in P(V^G, U)$ si et seulement si $\phi j \in P(V, U_L)$. En effet, supposons qu'il existe des kG-morphismes $\alpha : V^G \to R$ et $\beta : R \to U$ avec R un kG-projectif tels que $\phi = \beta\alpha$. Alors $\phi j = \beta_L \alpha_L j$ se factorise par R_L qui, d'après le théorème 5.2, est kL-projectif.

D'autre part, supposons qu'il existe des kL-homomorphismes $\gamma : V \to Q$ et $\delta : Q \to U$ avec Q projectif tels que $\phi j = \delta\gamma$. D'après le lemme 8.8(3), Q^G est kG-projectif. Comme Q^G est relativement L-libre par rapport à l'application kL-linéaire $i : Q \to Q^G : y \mapsto 1 \otimes_L y$, il existe un kG-morphisme $\varepsilon : Q^G \to U$ tel que $\delta = \epsilon i$. Or pour tout $v \in V$, on a

$$\varepsilon\gamma^G j(v) = \varepsilon\gamma^G(1 \otimes_L v) = \varepsilon(1 \otimes_L \gamma(v)) = \varepsilon i(\gamma(v)) = \delta(\gamma(v)) = \phi j(v).$$

Ainsi $\varepsilon\gamma^G j = \phi j$. Donc $\phi = \varepsilon\gamma^G \in P(V^G, U)$. Ceci achève la démonstration.

10.6. Théorème. Soient U_1 et U_2 des kG-modules indécomposables non projectifs correspondants aux kL-modules indécomposables non projectifs V_1 et V_2, respectivement. Alors

$$\overline{\mathrm{Hom}}_{kG}(U_1, U_2) \cong \overline{\mathrm{Hom}}_{kL}(V_1, V_2).$$

Démonstration. Comme $V_1^G = U_1 \oplus R_1$ avec R_1 projectif et $(U_2)_L = V_2 \oplus Q_2$ avec Q_2 projectif, on a

$$\overline{\mathrm{Hom}}_{kG}(U_1, U_2) = \overline{\mathrm{Hom}}_{kG}(V_1^G, U_2) \quad \text{et} \quad \overline{\mathrm{Hom}}_{kL}(V_1, V_2) = \overline{\mathrm{Hom}}_{kL}(V_1, (U_2)_L).$$

D'après le lemme 10.5, $\overline{\mathrm{Hom}}_{kG}(V_1^G, U_2) \cong \overline{\mathrm{Hom}}_{kL}(V_1, (U_2)_L)$. Ceci achève la démonstration.

Remarque. Soient kG-$\overline{\mathrm{mod}}$ et kL-$\overline{\mathrm{mod}}$ les catégories stables sur kG et sur kL respectivement. Alors la correspondance bijective donnée dans le théorème 10.2 induit une équivalence de kG-$\overline{\mathrm{mod}}$ sur kL-$\overline{\mathrm{mod}}$. C'est-à-dire kG et kL sont stablement équivalentes.

11. Correspondance de Green

Soit H un sous-groupe de G. Si P et R sont des sous-groupes de G tels que $hPh^{-1} \le R$ pour certain $h \in H$, on note alors $P \le_H R$. Soit $\mathcal{H}$ une famille de sous-groupes de G. On note $P \le_H \mathcal{H}$ lorsque $P \le_H R$ pour certain $R \in \mathcal{H}$. En outre, on dit qu'un kG-module U est *relativement $\mathcal{H}$-projectif* si $U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$, où chaque U_i est relativement projectif pour certain sous-groupe dans $\mathcal{H}$.

Partout dans cette section, on suppose $p = \mathrm{car}(k) > 0$ et se fixe Q un p-sousgroupe de G et L un sous-groupe de G contenant $N_G(Q)$. Posons

$$\mathcal{X} = \{sQs^{-1} \cap Q \mid s \in G\backslash L\},\ \mathcal{Y} = \{sQs^{-1} \cap L \mid s \in G\backslash L\},\ \mathcal{Z} = \{R \mid R \le Q,\ R \not\le_G \mathcal{X}\}.$$

Remarques. (1) Si $G = L$, alors $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{\{1\}\}$.

(2) $Q \in \mathcal{Z}$.

11.1. Lemme. Les conditions suivantes sont équivalentes pour un sous-groupe R de Q:

(1) $R \le_G \mathcal{X}$.

(2) $R \le_L \mathcal{X}$.

(3) $R \le_L \mathcal{Y}$.

Démonstration. Supposons qu'il existe $g \in G$ tel que $gRg^{-1} \subseteq sQs^{-1} \cap Q$ pour un $s \in G\backslash L$. Si $g \in L$, alors $R \le_L \mathcal{X}$ par définition. Si $g \notin L$, alors $g^{-1}Qg \cap Q \in \mathcal{X}$. Comme $R \le g^{-1}Qg$ et $R \le Q$ par hypothèse, on a $R \le g^{-1}Qg \cap Q$, et donc $R \le_L \mathcal{X}$ car $1 \in L$. Ceci montre que (1) implique (2).

Supposons qu'il existe $x \in L$ tel que $xRx^{-1} \subseteq sQs^{-1} \cap Q$ pour un $s \in G\backslash L$. Mais $sQs^{-1} \cap Q \le sQs^{-1} \cap L \in \mathcal{Y}$. Ainsi $R \le_L \mathcal{Y}$. Ceci montre que (2) implique (3).

Supposons qu'il existe $x \in L$ tel que $xRx^{-1} \subseteq sQs^{-1} \cap L$ pour un $s \in G\backslash L$. Alors $R \le (x^{-1}s)Q(s^{-1}x)$. Donc $R \subseteq (x^{-1}s)Q(s^{-1}x) \cap Q$ car $R \subseteq Q$ par hypothèse. Comme $x^{-1}s \notin L$, on a $((x^{-1}s)Q(s^{-1}x)) \cap Q \in \mathcal{X}$, et donc $R \le_G \mathcal{X}$. Ceci achève la démonstration.

Remarques. (1) Un kG-module indécomposable U admet un sommet $R \in \mathcal{Z}$ si et seulement si U est relativement Q-projectif et n'est pas relativement $\mathcal{X}$-projectif.

(2) Un kL-module indécomposable V admet un sommet $R \in \mathcal{Z}$ si et seulement si V est relativement Q-projectif et n'est pas relativement $\mathcal{Y}$-projectif.

11.2. Lemme. Soient P, H des sous-groupes de G tels que $P \leq H$. Si W est un kH-module relativement P-projectif, alors W^G est relativement P-projectif.

Démonstration. Étant relativement P-projectif, W est un facteur direct de $(W_P)^H$. Ainsi W^G est un facteur direct de $((W_P)^H)^G = (W_P)^G$. Par conséquent, W^G est relativement P-projectif d'après la proposition 9.2(4). Ceci achève la démonstration.

11.3. Lemme. (1) Si U est un kG-module relativement $\mathcal{X}$-projectif, alors U_L est relativement $\mathcal{Y}$-projectif.

(2) Si V est un kL-module relativement Q-projectif et $\mathcal{Y}$-projectif, alors V^G est relativement $\mathcal{X}$-projectif.

Démonstration. On peut supposer que $G \neq L$.

(1) Supposons que U est relativement $\mathcal{X}$-projectif. Soit W un facteur direct indécomposable de U. Alors W est relativement $(sQs^{-1} \cap Q)$-projectif pour certain $s \in G \backslash L$. D'après le lemme 9.5(2), W est relativement $(sQs^{-1} \cap L)$-projectif, et W_L l'est également. Par conséquent, U_L est relativement $\mathcal{Y}$-projectif.

(2) Supposons que V est un kL-module relativement Q-projectif et $\mathcal{Y}$-projectif. Soit W un facteur direct indécomposable de V. Alors W est relativement Q-projectif. Ainsi Q contient un sommet R de W. Comme W est relativement $\mathcal{Y}$-projectif, $R \leq_L \mathcal{Y}$ d'après le théorème 9.9. Ainsi $R \leq_G \mathcal{X}$ d'après le lemme 11.1. Comme W est relativement R-projectif, d'après le lemme 11.2, W^G l'est aussi. Comme $R \leq_G \mathcal{X}$, on déduit du lemme 9.5 que W^G est relativement $\mathcal{X}$-projectif. Par conséquent, V^G est relativement $\mathcal{X}$-projectif. Ceci achève la démonstration.

11.4. Lemme. Soit V un kL-module relativement Q-projectif. Alors $(V^G)_L \cong V \oplus Y$, où Y est un kL-module relativement $\mathcal{Y}$-projectif.

Démonstration. Comme V est relativement Q-projectif, il existe un kQ-module W tel que $W^L = V \oplus T$ avec T un kL-module. Ainsi $W^G = (W^L)^G = V^G \oplus T^G$. Donc $(W^G)_L = (V^G)_L \oplus (T^G)_L$. Il suit du lemme de Mackey que $(V^G)_L = V \oplus Y$, $(T^G)_L = T \oplus Z$

avec Y, Z des kL-modules. En outre,

$$(W^G)_L = \oplus_{s\in L\backslash G/Q}((s \otimes_Q W)_{L\cap sQs^{-1}})^L = W^L \oplus X,$$

où $X = \oplus_{s\in L\backslash G/Q,\, s\notin L}((s \otimes_Q W)_{L\cap sQs^{-1}})^L$ est relativement $\mathcal{Y}$-projectif. Comme

$$V \oplus Y \oplus T \oplus Z \cong V \oplus T \oplus X,$$

on a $Y \oplus Z \cong X$. Ainsi Y est relativement $\mathcal{Y}$-projectif tel que $(V^G)_L = V \oplus Y$. Ceci achève la démonstration.

11.5. Lemme. Soit U un kG-module indécomposable ayant un sommet $R \in \mathcal{Z}$. Alors $U_L = V \oplus Y$, où V est un kL-module indécomposable avec sommet R tel que U est un facteur direct de V^G, et Y est un kL-module relativement $\mathcal{Y}$-projectif.

Démonstration. D'après la proposition 9.11, il existe un kL-module indécomposable V dont R est un sommet tel que U est un facteur direct de V^G. Comme $R \leq Q$ on voit que V est relativement Q-projectif. D'après le lemme 11.4, $(V^G)_L \cong V \oplus Y_1$, où Y_1 est un kL-module relativement $\mathcal{Y}$-projectif. Comme U_L est un facteur direct de $(V^G)_L$ et V est indécomposable, il existe un facteur direct Y de Y_1 tel que soit $U_L \cong V \oplus Y$, soit $U_L \cong Y$. D'après la proposition 9.11, U_L possède un facteur direct indécomposable W dont R est un sommet. Si W est un facteur direct de Y, alors W est relativement $\mathcal{Y}$-projectif, et ainsi $R \leq_L \mathcal{Y}$. D'après le lemme 11.1, $R \leq_G \mathcal{X}$. Ceci contredit que $R \in \mathcal{Z}$. Donc W n'est pas un facteur direct de Y. Par conséquent, $U_L \ncong Y$. Ceci montre que $U_L \cong V \oplus Y$ avec Y relativement $\mathcal{Y}$-projectif. Ceci achève la démonstration.

11.6. Corollaire. Soit U un kG-module relativement Q-projectif. Alors U est relativemnt $\mathcal{X}$-projectif si et seulement si U_L est relativement $\mathcal{Y}$-projectif.

Démonstration. La nécessité suit du lemme 11.3(1). Supposons que U n'est pas relativemnt $\mathcal{X}$-projectif. Alors il exsite un facteur direct indécomposable W de U qui n'est pas relativement $\mathcal{X}$-projectif. Étant relativement Q-projectif, W admet un sommet $R \leq Q$. Ainsi $R \in \mathcal{Z}$ car W n'est pas $\mathcal{X}$-projectif. D'après le lemme 11.5, $W_L = V \oplus Y$ avec V indécomposable dont R est un sommet. Comme $R \in \mathcal{Z}$, V n'est pas $\mathcal{Y}$-projective. Par conséquent, W_L, et donc U_L n'est pas $\mathcal{Y}$-projectif. Ceci achève la démonstration.

11.7. Lemme. Soit V un kL-module indécomposable ayant un sommet $R \in \mathcal{Z}$. Alors $V^G = U \oplus X$, où U est indécomposable avec sommet R tel que V est un facteur direct de U_L et X est relativement $\mathcal{X}$-projectif.

Démonstration. Comme V est relativement R-projectif, d'après le lemme 11.2, V^G est relativement R-projectif. En outre, V est relativement Q-projectif puisque $R \leq Q$. D'après le lemme 11.4, $(V^G)_L = V \oplus Y$ avec Y relativement $\mathcal{Y}$-projectif. Posons $V^G = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_r$ avec U_i indécomposables. On peut supposer que $(U_1)_L = V \oplus Y_1$. Alors $Y = Y_1 \oplus (U_2)_L \oplus \cdots \oplus (U_r)_L$. Ainsi $(U_i)_L$ est $\mathcal{Y}$-projectif et donc $\mathcal{X}$-projectif d'après le lemme 11.6, pour tout $i > 1$. Posons $U = U_1$ et $X = U_2 \oplus \cdots \oplus U_r$. Alors $V^G = U \oplus X$ avec V un facteur direct de U_L et X relativement $\mathcal{X}$-projectif. Il reste à vérifier que R est un sommet de U. Étant un facteur direct de V^G, U est relativement R-projectif. Donc R contient un sommet R_1 de U. En outre, U_L n'est pas $\mathcal{Y}$-projectif car V ne l'est pas. Ainsi U n'est pas $\mathcal{X}$-projectif d'après le lemme 11.6. Donc $R_1 \in \mathcal{Z}$. Remarquons que $U_L = V \oplus Y_1$ avec Y_1 relativement $\mathcal{Y}$-projectif. D'après les remarques suivant le lemme 11.1, R_1 n'est sommet d'aucun facteur direct de Y_1. Il suit du lemme 11.5 que R_1 est un sommet de V. Ainsi $R = R_1$ car R est un sommet de V. Ceci achève la démonstration.

11.8. Corollaire. Soit V un kL-module relativement Q-projectif. Alors V est relativement $\mathcal{Y}$-projectif si et seulement si V^G est relativement $\mathcal{X}$-projectif.

Démonstration. La nécessité suit du lemme 11.3(2). Supposons que V n'est pas relativement $\mathcal{Y}$-projectif. Alors V admet un facteur direct indécomposable W qui n'est pas relativement $\mathcal{Y}$-projectif. Étant relativement Q-projectif, W admet un sommet $R \leq Q$. D'après les remarques suivant le lemme 11.1, $R \in \mathcal{Z}$. D'après le lemme 11.7, $W^G = U \oplus X$, où U est indécomposable avec sommet R. Comme $R \in \mathcal{Z}$, U n'est pas $\mathcal{X}$-projectif. Par conséquent, W^G, et donc V^G n'est pas relativement $\mathcal{X}$-projectif. Ceci achève la démonstration.

11.9. Correspondance de Green. Il existe une correspondance bijective entre les classes d'isomorphisme des kG-modules indécomposables ayant un sommet dans $\mathcal{Z}$ et les classes d'isomorphisme des kL-modules indécomposables ayant un sommet dans $\mathcal{Z}$. Si $U \in kG$-ind et $V \in kL$-ind sont de tels modules qui se correspondent, alors U et V ont le même sommet et

$$U_L \cong V \oplus Y \qquad \text{et} \qquad V^G = U \oplus X$$

où Y est relativement $\mathcal{Y}$-projectif et X est relativement $\mathcal{X}$-projectif.

Démonstration. La corréspondance est donnée par les lemmes 11.5 et 11.7. Il reste à vérifier que cette correspondance est bijective. Soient U un kG-module indécomposable ayant un sommet $R \in \mathcal{Z}$ et V un kL-module indécomposable ayant un sommet $R \in \mathcal{Z}$ qui correspond à U. En particulier, U est un facteur direct de V^G. D'après le lemme 11.7, $V^G = U' \oplus X'$, où X' est relativement $\mathcal{X}$-projectif et U' est un kG-module indécomposable dont R est un sommet. Remarquons que U n'est pas relativement $\mathcal{X}$-projectif car $R \in \mathcal{Z}$. Ainsi $U \cong U'$. Par conséquent, U est le kG-module indécomposable qui correspond à V. De même, si V est un kL-module indécomposable ayant un somme $R \in \mathcal{Z}$ et U est le kG-module correspondant à V, alors V est le kL-module correspondant à U. Ceci achève la démonstration.

Remarque. Le théorème 10.2 est un cas spécial du théorème 11.9 pour le cas où Q est un p-sousgroupe de Sylow de G d'intersections triviales. En effet, pour tout $s \notin L$, $Q \cap sQs^{-1} = \{1\}$. Donc $\mathcal{X} = \{\{1\}\}$. Ainsi $\mathcal{Z}$ se compose des sous-groupes non-identités de Q. De plus, comme Q est le seul p-sousgroupe de Sylow de L, on a $L \cap sQs^{-1} = \{1\}$ pour tout $s \notin L$. Par conséquent, $\mathcal{Y} = \{\{1\}\}$. On voit maintenant qu'un kG-module indécomposable U possède un sommet dans $\mathcal{Z}$ si et seulement si U est non-projectif, et un kG-module X est $\mathcal{X}$-projectif si et seulement si X est projectif. Il en est de même pour les kL-modules.

On va étudier les homomorphismes entre les modules pour la correspondance de Green. Soit $\mathcal{H}$ une famille de sous-groupes de G. Si M, N sont des kG-modules, désignons par $\mathrm{Hom}_{kG,\mathcal{H}}(M, N)$ le sous-espace de $\mathrm{Hom}_{kG}(M, N)$ des homomorphismes qui se factorisent par un kG-module relativement $\mathcal{H}$-projectif (un tel homomorphisme est dit *$\mathcal{H}$-projectif*). Posons

$$\mathrm{Hom}_{kG}^{\mathcal{H}}(M, N) = \mathrm{Hom}_{kG}(M, N)/\mathrm{Hom}_{kG,\mathcal{H}}(M, N).$$

11.10. Lemme. Soit $\mathcal{H}$ une famillie de sous-groupes de G. Alors un kG-module M est relativement $\mathcal{H}$-projectif si et seulement si $\mathbb{1}_M \in \mathrm{Hom}_{kG,\mathcal{H}}(M, M)$.

Démonstration. La nécessité est évidente. Si $\mathbb{1}_M : M \to M$ se factorise par un kG-module relativement $\mathcal{H}$-projectif N, alors M est un facteur direct de N. Donc M est relativement $\mathcal{H}$-projectif. Ceci achève la démonstration.

Soit V un kH-module avec H un sous-groupe de G. D'après le lemme 8.7,

$$V^G = \oplus_{s \in G/H} s \otimes_H V = (1 \otimes_H V) \oplus W,$$

en tant que k-espace vectoriel. Remarquons que $1 \otimes_H V$ et $W = \oplus_{s \in G/H,\, s \notin H} s \otimes_H V$ sont des kH-sousmodules de V^G. Donc $(V^G)_H = (1 \otimes_H V) \oplus W \cong V \oplus W$ en tant que kH-module. Par conséquent, $i : V \to V^G : v \mapsto 1 \otimes_H v$ est une kH-section, $p : V^G \to V : \sum_{s \in G/H} s \otimes_H v_s \mapsto v_1$ est une kH-rétraction et

$$\varepsilon = ip : V^G \to V^G : \sum_{s \in G/H} s \otimes_H v_s \mapsto 1 \otimes_H v_1$$

est un idempotent de $\mathrm{End}_{kH}((V^G)_H)$.

11.11. Lemme. Soient M et N des kG-modules et R un sous-groupe de Q. Alors

$$\mathrm{Hom}_{kL,R}(M_L, N_L) \subseteq \mathrm{Hom}_{kL,\mathcal{Y}}(M_L, N_L) + \mathrm{Hom}_{kG,R}(M, N).$$

Démonstration. Soit $\phi \in \mathrm{Hom}_{kL,R}(M_L, N_L)$. Alors $\phi = \beta\alpha$, où $\alpha : M_L \to V$ et $\beta : V \to N_L$ sont des kL-morphismes avec V relativement R-projectif. Alors

$$\alpha' : M \to V^G : x \mapsto \sum_{s \in G/L} s \otimes_L \alpha(s^{-1}x)$$

est kG-linéaire tel que $\alpha = p\alpha'$, où $p : V^G \to V : \oplus_{s \in G/L} s \otimes_L v_s \mapsto v_1$. En outre, V^G est relative L-libre par rapport au kL-morphisme $i : V \to V^G : v \mapsto 1 \otimes_L v$, il existe un kG-morphisme $\beta' : V^G \to N$ tel que $\beta = \beta' i$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\phi &= \beta\alpha = \beta'\alpha' + (\beta\alpha - \beta'\alpha') \\
&= \beta'\alpha' + (\beta' i p \alpha' - \beta'\alpha') \\
&= \beta'\alpha' + \beta'(ip - \mathbb{1}_{V^G})\alpha'.
\end{aligned}$$

Comme V est relativement R-projectif, d'après le lemme 11.2, V^G l'est également. Ainsi $\beta'\alpha' \in \mathrm{Hom}_{kG,R}(M, N)$. Il reste à vérifier que $\beta'(ip - \mathbb{1}_{V^G})\alpha' \in \mathrm{Hom}_{kL,\mathcal{Y}}(M, N)$. Comme

$(V^G)_L \cong V \oplus W$ avec $W = \sum_{s \in G/L, s \notin L} s \otimes_L V$, on voit que

$$ip - \mathbb{1}_{V^G} : V^G \to V^G : \sum_{s \in G/L} s \otimes_L v_s \mapsto - \sum_{s \in G/L,\, s \notin L} (s \otimes_L v_s)$$

se factorise par W. Remarquons que V est relativement Q-projectif comme $R \subseteq L$. D'après le lemme 11.4, $(V^G)_L \cong V \oplus Y$ avec Y relativement $\mathcal{Y}$-projectif. Or $V \oplus Y \cong V \oplus W$ entraîne que $W \cong Y$ est relativement $\mathcal{Y}$-projective. Ainsi $\beta'(ip - \mathbb{1}_{V^G})\alpha' \in \mathrm{Hom}_{kL,\mathcal{Y}}(M, N)$. Ceci achève la démonstration.

11.12. Théorème. Soient U un kG-module indécomposable ayant un sommet $R \in \mathcal{Z}$ et V le kL-module indécomposable correspondant à U. Les énoncés suivants sont valides pour tout kG-module M :

(1) Si M est indécomposable tel que V est un facteur direct de M_L, alors $M \cong U$.

(2) U est un facteur direct de M si et seulement si V est un facteur direct de M_L.

Démonstration. (1) Supposons que M est indécomposable et $M_L = V \oplus W$ avec W un kL-module. Soient $p : M_L \to V$ la projection et $q : V \to M_L$ l'injection. Comme V et U ont même sommets, $\pi = qp \in \mathrm{Hom}_{kL,R}(M, M)$. D'après le lemme 11.11, $\pi = \alpha + \beta$ avec $\alpha \in \mathrm{Hom}_{kL,\mathcal{Y}}(M, M)$ et $\beta \in \mathrm{Hom}_{kG,R}(M, M)$. Il est évident que $\mathrm{Hom}_{kG,R}(M, M)$ est un idéal bilatère de $\mathrm{End}_{kG}(M)$. Supposons que $\mathrm{Hom}_{kG,R}(M, M) \neq \mathrm{End}_{kG}(M)$. Comme M est indécomposable, $\mathrm{Hom}_{kG,R}(M, M)$ est nilpotent. En particulier, $\beta^n = 0$ pour certain $n > 0$. Comme π est un idempodent, on a $\pi = \pi^n = (\alpha + \beta)^n \in \mathrm{Hom}_{kL,\mathcal{Y}}(M, M)$. Ceci entraîne que $\mathbb{1}_V = p\pi q \in \mathrm{Hom}_{kL,\mathcal{Y}}(V, V)$. D'après le lemme 11.10, V est relativement $\mathcal{Y}$-projectif, ce qui contredit que $R \in \mathcal{Z}$. Donc $\mathrm{Hom}_{kG,R}(M, M) = \mathrm{End}_{kG}(M)$. En particulier, $\mathbb{1}_M$ se factorise par un kG-module R-projectif. D'après le lemme 11.10, M est relativement R-projectif. Ainsi R contient un sommet R' de M. D'après le lemme 9.5(2), M_L est relativement R'-projectif, et donc V l'est aussi. Comme R est un sommet de V, on a $R' = R$. Donc R est un sommet de M. D'après le lemme 11.5, M_L admet un seul facteur direct indécomposable ayant R pour sommet, qui est nécessairement isomorphe à V. Ainsi V est le kL-module indécomposable correspondant à M, c'est-à-dire, $M \cong U$.

(2) Supposons que U est un facteur direct de M. Alors U_L est un facteur direct de M_L. Donc V est un facteur direct de M_L. Réciproquement si V est un facteur direct de M_L, alors il existe un facteur direct indécomposable N de M tel que V est un facteur direct de

N_L. D'après la partie (1), $N \cong U$. Ainsi U est un facteur direct de M. Ceci achève la démonstration.

11.13. Lemme. Soit H un sous-groupe de G. Si V est un kH-module et U est un kG-module, alors tout kG-morphisme $\phi : V^G \to U$ se factorise par $(U_H)^G$.

Démonstration. On a vu que l'application

$$\varepsilon : V^G \to V^G : \sum_{t \in G/H} t \otimes_H v_t \mapsto 1 \otimes_H v_1$$

est kH-linéaire. Soit $\phi \in \mathrm{Hom}_{kG}(V^G, U)$. Posons $\psi = \phi\varepsilon \in \mathrm{Hom}_{kH}(V^G, U)$. On sait que

$$\psi' : V^G \to (U_H)^G : y \mapsto \sum_{s \in G/H} s \otimes_H \psi(s^{-1}y)$$

est kG-linéaire. Remarquons que

$$\rho : (U_H)^G \to U : \sum_{t \in G/H} (t \otimes_H u_t) \mapsto \sum_{t \in G/H} tu_t$$

est kG-linéaire. Pour tout $x = \sum_{t \in G/H} t \otimes_H v_t \in V^G$,

$$\phi(x) = \phi\left(\sum_{t \in G/H} t(1 \otimes_H v_t)\right) = \sum_{t \in G/H} t\phi(1 \otimes_H v_t).$$

Et

$$\begin{aligned} \rho\psi'(x) &= \rho\left(\textstyle\sum_{s \in G/H} s \otimes_H \psi(s^{-1}x)\right) \\ &= \rho\left(\textstyle\sum_{s \in G/H} s \otimes_H \phi\varepsilon\left(\sum_{t \in G/H} s^{-1}t \otimes_H v_t\right)\right) \\ &= \rho\left(\textstyle\sum_{s \in G/H} s \otimes_H \phi(1 \otimes_H v_s)\right) \\ &= \textstyle\sum_{s \in G/H} s\phi(1 \otimes_H v_s) = \phi(x). \end{aligned}$$

Ainsi $\phi = \rho\psi'$ se factorise par $(U_H)^G$. Ceci achève la démonstration.

11.14. Lemme. Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ des familles de sous-groupes de G, et

$$\mathcal{L} = \{H \cap sKs^{-1} \mid H \in \mathcal{H}, K \in \mathcal{K}, s \in G\}.$$

Si $\phi \in \mathrm{Hom}_{kG,\mathcal{H}}(X, Y)$ et $\psi \in \mathrm{Hom}_{kG,\mathcal{K}}(Y, Z)$, alors $\psi\phi \in \mathrm{Hom}_{kG,\mathcal{L}}(X, Z)$.

Démonstration. Soit $\phi : X \to Y$ se factorisant par un kG-module relativement $\mathcal{H}$-projectif U. D'après la définition, $U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$, où U_i est relativement projectif pour certain $H_i \in \mathcal{H}$. Ainsi $\phi = \phi_1 + \cdots + \phi_r$ avec ϕ_i se factorisant par U_i. Or U_i est un facteur direct de V_i^G, où $V_i = (U_i)_{H_i}$. Ainsi $\phi_i = \beta_i\alpha_i$ avec $\alpha_i : X \to V_i^G$ et $\beta_i : V_i^G \to Y$. De même, on peut écrire $\psi = \delta_1\gamma_1 + \cdots + \delta_s\gamma_s$, où $\gamma_j : Y \to W_j^G$ et $\delta_j : W_j^G \to Z$ sont des kG-morphismes avec W_j un kK_j-module et $K_j \in \mathcal{K}$, $j = 1, \ldots, s$. Ainsi

$$\psi\phi = \sum_{1\leq i\leq r, 1\leq j\leq s} \delta_j(\gamma_j\beta_i)\alpha_i.$$

D'après le lemme 11.13, $\gamma_j\beta_i$ se factorise par $((W_j^G)_{H_i})^G$. D'après le lemme de Mackey,

$$(W_j^G)_{H_i} = \oplus_{s\in H_i\backslash G/K_j}((s \otimes_{K_j} W_j)_{H_i\cap sK_js^{-1}})^{H_i},$$

ce qui est relativement $\mathcal{L}$-projectif. D'après le lemme 11.2, $((W_j^G)_{H_i})^G$ est relativement $\mathcal{L}$-projectif. D'où on tire que $\psi\phi \in \mathrm{Hom}_{kG,\mathcal{L}}(X, Z)$. Ceci achève la démonstration.

11.15. Corollaire. Soient V un kL-module relativement Q-projectif. Pour tout kL-module W, on a

$$\mathrm{Hom}_{kL,\mathcal{X}}(V, W) = \mathrm{Hom}_{kL,\mathcal{Y}}(V, W).$$

Démonstration. Comme $Q \cap sQs^{-1} \subseteq L \cap sQs^{-1}$, un kL-module est relativement $\mathcal{Y}$-projectif s'il est relativement $\mathcal{X}$-projectif. Donc $\mathrm{Hom}_{kL,\mathcal{X}}(V, W) \subseteq \mathrm{Hom}_{kL,\mathcal{Y}}(V, W)$. De l'autre côté, si $\phi \in \mathrm{Hom}_{kL,\mathcal{Y}}(V, W)$, alors $\phi = \phi\mathbb{1}_V$. Comme $\mathbb{1}_V \in \mathrm{Hom}_{kL,Q}(V, V)$, d'après 11.14, ϕ se factorise par une somme directe de kL-modules X_i avec X_i étant relativement projectif pour certain sous-groupe de la forme $Q \cap g_i(L \cap s_iQs_i^{-1})g_i^{-1}$ avec $s_i \notin L$ et $g_i \in L$. Comme $Q \cap g_i(L \cap s_iQs_i^{-1})g_i^{-1} \subseteq Q \cap (g_is_i)Q(g_is_i)^{-1}$, on voit que X_i est relativement $Q \cap (g_is_i)Q(g_is_i)^{-1}$-projectif. Comme $g_is_i \notin L$, on a $Q \cap (g_is_i)Q(g_is_i)^{-1} \in \mathcal{X}$. Ainsi $\phi \in \mathrm{Hom}_{kL,\mathcal{X}}(V, W)$. Ceci achève la démonstration.

11.16. Lemme. Soient U un kG-module indécomposable ayant un sommet dans $\mathcal{Z}$ et V le kL-module indécomposable correspondant à U. Pour tout kG-module M, on a

$$\mathrm{Hom}_{kG}^{\mathcal{X}}(U, M) \cong \mathrm{Hom}_{kL}^{\mathcal{Y}}(V, M_L).$$

Démonstration. Comme $V^G \cong U \oplus X$ avec X relativement $\mathcal{X}$-projectif, l'injection $U \to V^G$ induit un isomorphisme $\mathrm{Hom}_{kG}^{\mathcal{X}}(U, M) \cong \mathrm{Hom}_{kG}^{\mathcal{X}}(V^G, M)$. Donc il suffit de montrer que $\mathrm{Hom}_{kG}^{\mathcal{X}}(V^G, M) \cong \mathrm{Hom}_{kL}^{\mathcal{Y}}(V, M_L)$.

Considérons le kL-morphisme $i : V \to V^G : v \mapsto 1 \otimes_L v$. Il suit du lemme 8.11(1) que

$$\Phi : \mathrm{Hom}_{kG}(V^G, M) \to \mathrm{Hom}_{kL}(V, M_L) : \phi \mapsto \phi i$$

est un k-isomorphisme. Donc il suffit de vérifier que $\phi \in \mathrm{Hom}_{kG,\mathcal{X}}(V^G, M)$ si et seulement si $\phi i \in \mathrm{Hom}_{kL,\mathcal{Y}}(V, M_L)$. Comme V est relativement Q-projectif, d'après le lemme 11.15, $\mathrm{Hom}_{kL,\mathcal{Y}}(V, M_L) = \mathrm{Hom}_{kL,\mathcal{X}}(V, M_L)$.

Supposons que $\phi = \beta\alpha$, où $\alpha : V^G \to X_1$ et $\beta : X_1 \to M$ sont kG-linéaires avec X_1 relativement $\mathcal{X}$-projectif. Alors $\phi i = \beta_L \alpha_L i$ se factorise par X_L qui est relativement $\mathcal{Y}$-projectif d'après le lemme 11.3(1). Donc $\phi i \in \mathrm{Hom}_{kL,\mathcal{Y}}(V, M_L)$.

Supposons réciproquement que $\phi i \in \mathrm{Hom}_{kL,\mathcal{X}}(V, M_L)$. Alors $\phi i = \delta\gamma$, où $\gamma : V \to Y$ et $\delta : Y \to M_L$ sont des kL-morphismes avec Y relativement $\mathcal{X}$-projectif. D'après le lemme 11.2, Y^G est relativement $\mathcal{X}$-projectif. Comme Y^G est relativement L-libre par rapport à $j : Y \to Y^G : y \mapsto 1 \otimes_L y$, il existe un kG-morphisme $\delta' : Y^G \to M$ tel que $\delta = \delta' j$. Or pour tout $v \in V$, on a $\delta'\gamma^G i(v) = \delta'\gamma^G(1 \otimes_L v) = \delta'(1 \otimes_L \gamma(v)) = \delta' j(\gamma(v)) = \delta(\gamma(v)) = \phi i(v)$. Ainsi $\delta'\gamma^G i = \phi i$. Donc $\phi = \delta'\gamma^G \in \mathrm{Hom}_{kG,\mathcal{X}}(V^G, M)$. Ceci achève la démonstration.

11.17. Théorème. Soient U_i un kG-module indécomposable ayant un sommet dans $\mathcal{Z}$ et V_i le kL-module indécomposable correspondant à U_i, $i = 1, 2$. Alors

$$\mathrm{Hom}^{\mathcal{X}}_{kG}(U_1, U_2) \cong \mathrm{Hom}^{\mathcal{Y}}_{kL}(V_1, V_2).$$

Démonstration. D'après le lemme 11.16, $\mathrm{Hom}^{\mathcal{X}}_{kG}(U_1, U_2) \cong \mathrm{Hom}^{\mathcal{Y}}_{kL}(V_1, (U_2)_L)$. Comme $(U_2)_L = V_2 \oplus Y_2$ avec Y_2 relativement $\mathcal{Y}$-projectif, on a $\mathrm{Hom}^{\mathcal{Y}}_{kL}(V_1, (U_2)_L) \cong \mathrm{Hom}^{\mathcal{Y}}_{kL}(V_1, V_2)$. D'où $\mathrm{Hom}^{\mathcal{X}}_{kG}(U_1, U_2) \cong \mathrm{Hom}^{\mathcal{Y}}_{kL}(V_1, V_2)$. Ceci achève la démonstration.

13. Groupes de défaut

Soit A une k-algèbre de dimension finie avec identité 1_A. Si $A = A_1 \oplus A_2$ avec A_1 et A_2 des idéaux bilatères de A et $1_A = e_1 + e_2$ avec $e_i \in A_i$, alors e_i est un idempotent central et A_i est une k-algèbre ayant e_i pour identité. On dit que A est *connexe* si $A = A_1 \oplus A_2$ avec $A_i \trianglelefteq A$ entraîne que $A_1 = 0$ ou $A_2 = 0$. Comme A est de dimension finie, il existe une seule décomposition $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$, où A_i est un idéal bilatère de A et aussi une k-algèbre connexe. On appelle $A_1, \ldots, A_n$ les *blocs* de A. Dans ce cas, un A_i-module est un A-module. Réciproquement, tout A-module M se décompose comme $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ avec M_i un A_i-module. On dit que M est un A-module appartenant à A_i si $M_j = 0$, pour tout $j \neq i$. Ceci équivaut à dire que $e_i x = x$, pour tout $x \in M$. En particulier, un A-module indécomposable appartient à un unique bloc A_i. En outre, si $i \neq j$, et M_i et M_j sont des A-modules appartenant à A_i et à A_j respectivement, alors $\mathrm{Hom}_A(M_i, M_j) = 0$. Ainsi on a

$$A\text{-mod} = A_1\text{-mod} \times \cdots \times A_n\text{-mod}.$$

Partout de cette section, on suppose que $\mathrm{car}(k) = p > 0$. Pour étudier les modules sur kG, il suffit d'étudier les modules sur chaque bloc de kG. Remarquons que kG est un $k(G \times G)$-module pour la multiplication $(g_1, g_2) \cdot a = g_1 a g_2^{-1}$. On voit que les $k(G \times G)$-sousmodules de kG sont exactement les idéaux bilatères de kG. Par conséqent, un bloc de kG est simplement un facteur direct indécomposable du $k(G \times G)$-module kG.

On se fixe $\delta(G) = \{(g, g) \mid g \in G\}$ un sous-groupe de $G \times G$.

13.1. Lemme. Le $k(G \times G)$-module kG est relativement $\delta(G)$-libre.

Démonstration. D'abord, $k \cdot 1$ est un $k\delta(G)$-sousmodule kG. Comme $|G \times G| = |G||G| = |G||\delta(G)|$, on a $\dim_k(kG) = |G|\dim_k(k \cdot 1) = [G \times G : \delta(G)]\dim_k(k \cdot 1)$. En outre, pour tout $g \in G$, on a $g = (g, 1) \cdot 1$. Ainsi, en tant que $k(G \times G)$-module, kG est engendré par $k \cdot 1$. D'après le corollaire 8.5, kG est relativement $\delta(G)$-libre par rapport à $k \cdot 1$.Ceci achève la démonstration.

13.2. Théorème. Un bloc de kG, en tant que $k(G \times G)$-module, admet un sommet de la forme $\delta(D)$ avec D un p-sousgroupe de G.

Démonstration. Soit B un bloc de kG, c'est-à-dire, un facteur direct du $k(G \times G)$-module kG. D'après le lemme 13.1, B est relativement $\delta(G)$-projectif. Ainsi $\delta(G)$ contient un sommet R de B. Remarquons que $\delta : G \to \delta(G) : g \mapsto (g, g)$ est un isomorphisme de groupes. Comme R est un p-groupe, $D = \delta^{-1}(R)$ est un p-sousgroupe de G tel que $R = \delta(D)$. Ceci achève la démonstration.

13.3. Définition. Soit B un bloc de kG. Un sous-groupe D de G s'appelle un *groupe de défaut* de B si $\delta(D)$ est un sommet de B en tant que $k(G \times G)$-module.

13.4. Proposition. Les groupes de défaut d'un bloc de kG forment une classe de conjugué de p-sousgroupes de G.

On dit qu'un bloc B de G est de *défaut* d si B admet un groupe de défaut d'ordre p^d. D'après la proposition 13.4, d est uniquement déterminé par B.

13.5. Lemme. Soient M, N des kG-modules. Si M est relativement projectif pour un sous-groupe H de G, alors $M \otimes_k N$ l'est aussi.

Démonstration. Supposons que M est un facteur direct de $(M_H)^G$. Alors $M \otimes_k N$ est un facteur direct de $(M_H)^G \otimes_k N$. Ce dernier, d'après le lemme 8.9, est isomorphe à $(M_H \otimes_k N_H)^G$, un kG-module relativement H-libre. Ceci achève la démonstration.

Soit B un bloc de kG. On muni B d'une nouvelle structure de kG-module, notée B_0, de sorte que $g \cdot b = gbg^{-1}$ pour tous $g \in G$ et $b \in B$.

13.6. Lemme. Soit B un bloc de kG avec D un groupe de défaut. Alors B_0 est relativement D-projectif.

Démonstration. Considérons la restriction $B_{\delta(G)}$ du $k(G \times G)$-module B à $\delta(G)$. D'après la définition, $(g, g) \cdot b = gbg^{-1}$, pour tous $(g, g) \in \delta(G)$ et $b \in B_{\delta(G)}$. Ainsi $\delta : G \to \delta(G) : g \mapsto (g, g)$ est un isomorphisme de groupes tel que $g \cdot b = \delta(g) \cdot b$. Ainsi B_0 est relativement D-projectif si et seulement si $B_{\delta(G)}$ est relativement $\delta(D)$-projectif. D'après la définition, $\delta(D)$ est un sommet du $k(G \times G)$-module B. En particulier, B est relativement $\delta(D)$-projectif. D'après le lemme 9.5(2), $B_{\delta(G)}$ est également relativement $\delta(D)$-projectif. Ceci achève la démonstration.

13.7. Théorème. Soit B un bloc de kG avec D un groupe de défaut. Alors tout kG-module indécomposable appartenant à B admet un sommet contenu dans D.

Démonstration. On veut montrer que U est relativement D-projectif. D'après le lemme 13.6, B_0 est relativement D-projectif, et $B_0 \otimes_k U$ l'est aussi.

Or il est facile de vérifier que $\phi : B_0 \otimes_k U \to U : b \otimes_k u \mapsto bu$ est un kG-morphisme. DE plus, soit e l'identité de B. Comme e est central dans kG, on voit aisément que $\psi : U \to B_0 \otimes_k U : u \mapsto e \otimes_k u$ est kG-linéaire. Comme U appartient à B, on a $eu = u$, pour tout $u \in U$. Ainsi $\phi\psi = \mathbb{1}_U$. Ceci montre que U est un facteur direct de $B_0 \otimes_k U$. Par conséquent, U est relativement D-projectif. Ceci achève la démonstration.

13.8. Lemme. Soit H un sous-groupe de G.

(1) Si $t \in G$, alors $|HtH| = |H|[H : H \cap tHt^{-1}]$.

(2) Si G est un p-groupe, alors il existe une suite

$$H = H_0 \lhd H_1 \lhd \cdots \lhd H_r = G$$

de sous-groupes de G tel que $[H_i : H_{i-1}] = p, i = 1, \ldots, r$.

(3) Si G est un p-groupe et H est un sommet d'un kH-module indécomposable V, alors H est un sommet de V^G.

13.9. Proposition. Soient H un sous-groupe de G et $t \in G$.

(1) Le $k(H \times H)$-sousmodule $k(HtH)$ du $k(G \times G)$-module kG est induit par le module trivial du groupe $(1,t)^{-1}\delta(H \cap tHt^{-1})(1,t)$.

(2) Si H est un p-sousgroupe de G, alors le $k(H \times H)$-module $k(HtH)$ est indécomposable ayant pour sommet $(1,t)^{-1}\delta(H \cap tHt^{-1})(1,t)$.

(3) Si Q est un p-sousgroupe de H avec $C_G(Q) \subseteq H$ et $t \notin H$, alors aucun $k(H \times H)$-facteur direct indécomposable de $k(HtH)$ n'admet un sommet contenant $\delta(Q)$.

Démonstration. D'abord, $k(HtH)$ est le k-sousespace de kG engendré par les éléments de HtH. Pour tout $(h_1, h_2) \in H \times H$, on a $(h_1, h_2) \cdot (HtH) = h_1(HtH)t_2^{-1} = HtH$. Ainsi $k(HtH)$ est un $k[H \times H]$-sousmodule du $k(G \times G)$-module kG.

(1) Posons $N = \{(h_1, h_2) \in H \times H \mid (h_1, h_2) \cdot t = t\}$. Si $x = (h_1, h_2) \in H \times H$, alors $x \in N$ si et seulement si $(h_1, h_2) \cdot t = t$ si et seulement si $h_1 t h_2^{-1} = t$ si et seulement si $h_2 = t^{-1}h_1 t$ si et seulement si $x = (h, t^{-1}ht)$ avec $t^{-1}ht \in H$ si et seulement si $x = (h, t^{-1}ht) = (1,t)^{-1}(h,h)(1,t)$ avec $h \in H \cap tHt^{-1}$. Ainsi $N = (1, t^{-1})\delta(H \cap tHt^{-1})(1,t)$. Par conséquent, kt est le module trivial de kN. Or

$$\dim k(HtH) = |HtH| = |H|[H : H \cap tHt^{-1}] = \frac{|H \times H|}{|N|} = [H \times H : N].$$

Il est évident que kt engendre $k(HtH)$ comme $k(H\times H)$-module. D'après le corollaire 8.5, le $k(H\times H)$-module $k(HtH)$ est relativement N-projectif par rapport à kt. D'après les lemmes 8.2 et 8.7, on a $k(HtH)\cong (kt)^{H\times H}$.

(2) Supposons que H est un p-sousgroupe de G. D'après la partie (1), $k(HtH)\cong (k_N)^{H\times H}$. Comme $H\times H$ est un p-groupe, on déduit du lemme 13.8(2) et du théorème de Green que $k(HtH)$ est indécomposable. Étant un p-groupe, N est le sommet du kN-module trivial k_N. D'après le lemme 13.8(3), N est un sommet de $k(HtH)$.

(3) Supposons que Q est un p-sousgroupe de H avec $C_G(Q)\subseteq H$ et $t\notin H$. Soit V un facteur direct indécomposable du $k(H\times H)$-module $k(HtH)$. D'après la partie (1), V est relativement $(1,t^{-1})\delta(H\cap tHt^{-1})(1,t)$-projectif. Ainsi $(1,t^{-1})\delta(H\cap tHt^{-1})(1,t)$ contient un sommet R_1 de V. Supposons que V possède un sommet R_2 contenant $\delta(Q)$. Alors il existe $(h_1,h_2)\in H\times H$ tel que $(h_1,h_2)R_2(h_1,h_2)^{-1}=R_1$. Donc

$$(h_1,h_2)\delta(Q)(h_1,h_2)^{-1}\subseteq R_1\subseteq (1,t^{-1})\delta(H\cap tHt^{-1})(1,t)\subseteq (1,t^{-1})\delta(G)(1,t).$$

Donc $(1,t)(h_1,h_2)\delta(Q)(h_1,h_2)^{-1}(1,t)^{-1}\subseteq\delta(G)$. Ainsi pour tout $x\in Q$, on a $h_1xh_1^{-1}=th_2xh_2^{-1}t^{-1}$, c'est-à-dire, $xh_1^{-1}th_2=h_1^{-1}th_2$. Ceci montre que $h_1h_2^{-1}t\in C_G(Q)\subseteq H$. Par conséquent $t\in H$, une contradiction. Ceci achève la démonstration.

13.10. Théorème. Soit B un bloc de kG avec D un groupe de défaut.

(1) Si P est un p-sousgroupe de Sylow de G contenant D, alors il existe $c\in C_G(D)$ tel que $D=P\cap(cPc^{-1})$.

(2) D contient tout p-sousgroupe normal de G.

(3) D est le plus grand p-sousgroupe normal de $N_G(D)$.

Démonstration. (1) D'abord, $\delta(D)\subseteq P\times P$. D'après la définition, $\delta(D)$ est un sommet du $k(G\times G)$-module indécomposable B. D'après la proposition 9.11, $B_{P\times P}$ admet un facteur direct indécomposable V dont $\delta(D)$ est un sommet. Alors V est un facteur direct de $(kG)_{P\times P}$ puisque B est un facteur direct de kG. Comme G est une réunion disjoint des classes bilatères pour P,P, on a $(kG)_{P\times P}\cong\oplus_{t\in P\backslash G/P}\,k(PtP)$. D'après le lemme 13.9(2), pour tout $t\in P\backslash G/P$, le $k(P\times P)$-module $k(PtP)$ est indécomposable dont $(1,t)^{-1}\delta(P\cap tPt^{-1})(1,t)$ est un sommet. Étant un facteur direct indécomposable de $(kG)_{P\times P}$, V est isomorphe à certain $k(PtP)$ avec $t \in G$. Ainsi il existent $r, s \in P$ tels que

$$\delta(D) = (r,s)(1,t)^{-1}\delta(P \cap tPt^{-1})(1,t)(r,s)^{-1}.$$

En particulier, $|D| = |P \cap tPt^{-1}|$. En outre, $(1,t)(r,s)^{-1}\delta(D)(r,s)(1,t)^{-1} \subseteq \delta(G)$. Donc pour tout $x \in D$, on a $r^{-1}xr = ts^{-1}xst^{-1}$, d'où $rts^{-1} \in C_G(D)$. Posons $c = rts^{-1}$. On montrera que $D = P \cap cPc^{-1}$. En effet, $D \subseteq P \cap cPc^{-1}$ puisque $D \subseteq P$ et $c \in C_G(D)$. Or

$$|P \cap cPc^{-1}| = |S \cap (rts^{-1}Pst^{-1}r^{-1})| = |(r^{-1}Pr) \cap (tPt^{-1})| = |P \cap tPt^{-1}| = |D|.$$

Donc $D = P \cap cPc^{-1}$.

(2) Prenons P un p-sousgroupe de Sylow de G contenant D. D'après la partie (1), $D = P \cap cPc^{-1}$, pour certain $c \in C_G(D)$. Si N est un p-sousgroupe normal de G, alors N est contenu dans tout p-sousgroupe de Sylow de G. En particulier, $N \subseteq P$ et $N \subseteq cPc^{-1}$. D'où $N \subseteq D$.

(3) D'abord, D est un p-sousgroupe normal de $N_G(D)$. Soit Q un p-sousgroupe de Sylow de $N_G(D)$ contenant D. Alors $D \subseteq Q \cap cQc^{-1}$. Soit P un p-sousgroupe de Sylow de G contenant Q. D'après la partie (1), $D = P \cap (cPc^{-1})$ avec $c \in C_G(D)$. On a donc

$$D \subseteq Q \cap cQc^{-1} \subseteq P \cap cPc^{-1} = D.$$

D'où $D = Q \cap cQc^{-1}$ avec Q, cQc^{-1} des p-sousgroupes de Sylow de $N_G(D)$. Or tout p-sousgroupe normal de $N_G(D)$ est contenu dans tous les p-sousgroupes de Sylow de $N_G(D)$, et donc contenu dans D. Ceci achève la démonstration.

Remarque. Si G admet un seul p-sousgroupe de Sylow P, alors P est le groupe de défaut de tous les blocs de kG.

14. Correspondance de Brauer

On se fixe H un sous-groupe de G. On rappelle que

$$(kG)_{H\times H} = \oplus_{t\in H\backslash G/H}\, k(HtH) = \oplus_{t\in H\backslash G/H, t\notin H}\, k(HtH) \oplus kH,$$

en tant que $k(H\times H)$-module. Soit b un bloc de H, c'est-à-dire, un facteur direct indécomposable du $k(H\times H)$-module kH. Alors b est un facteur direct de $(kG)_{H\times H}$. Par conséquent, il existe un bloc B de kG tel que b est un facteur direct de $B_{H\times H}$. Si B est le seul tel bolc, on dit alors que B le kG-bloc *correpondant à* b, et on note $B = b^G$.

14.1. Lemme. Soit b un bloc de H avec D un groupe de défaut.

(1) Si $C_G(D) \subseteq H$, alors b^G est défini.

(2) Si b^G est défini, alors D est contenu dans un groupe de défaut de b^G.

(3) Soit K un sous-groupe de G avec $H \subseteq K \subseteq G$. Si b^K, b^G et $(b^K)^G$ sont définis, alors $b^G = (b^K)^G$.

Démonstration. (1) D'abord, on sait que

$$(kG)_{H\times H} = \oplus_{t\in H\backslash G/H}\, k(HtH) = \oplus_{t\in H\backslash G/H, t\notin H}\, k(HtH) \oplus b_1 \oplus \cdots \oplus b_s,$$

où $b_1, \ldots, b_s$ sont les blocs de H. Remarquons que $b_i \ncong_{k(H\times H)} b_j$ lorsque $i \neq j$. Supposons que $C_G(D) \subseteq H$. Si $t \notin H$, d'après le lemme 13.9(3), b n'est pas facteur direct de $k(HtH)$ puisque $\delta(D)$ est un sommet de b. Ceci montre que b apparaît exactement une fois dans toute décomposition de $(kG)_{H\times H}$ en une somme direct de $k(H \times H)$-modules indécomposables. Posons $kG = B_1 \oplus \cdots \oplus B_n$, où $B_1, B_2, \ldots, B_n$ sont les blocs de G. Alors $(kG)_{H\times H} = (B_1)_{H\times H} \oplus \cdots \oplus (B_n)_{H\times H}$. Il existe ainsi un unique i avec $1 \leq i \leq n$ tel que b est un facteur direct de $(B_i)_{H\times H}$, c'est-à-dire, $b^G = B_i$.

(2) Soit E un groupe de défaut de $B = b^G$, c'est-à-dire, $\delta(E)$ est un sommet du $k(G\times G)$-module B. D'après le lemme 9.5(2), $B_{H\times H}$ est relativement $\delta(E)$-projectif. Étant un fcateur direct de $B_{H\times H}$, b est aussi relativement $\delta(E)$-projectif. Comme $\delta(D)$ est un sommet de b, il existe $x = (h_1, h_2) \in H \times H$ tel que $\delta(D) \subseteq x\delta(E)x^{-1}$. Par conséquent $D \subseteq h_1 E h_1^{-1}$. Ce dernier est un groupe de défaut de B d'après la proposition 13.4.

(3) D'après la définition, b^K est un facteur direct de $((b^K)^G)_{K\times K}$. Ainsi b est un facteur direct de $(((b^K)^G)_{K\times K})_{H\times H} = ((b^K)^G)_{H\times H}$. D'après l'unicité, $b^G = (b^K)^G$. Ceci achève la démonstration.

14.2. Théorème de Brauer I. Soient H un sous-groupe de G, et D un p-sousgroupes de H avec $N_G(D) \subseteq H$. Alors il existe une correspondance bijective entre les blocs de H ayant D pour groupe de défaut et les blocs de G ayant D pour groupe de défaut.

Démonstration. Comme $\delta(D) \subseteq N_{G\times G}(\delta(D)) = N_G(D) \times N_G(D) \subseteq H \times H$, on peut considérons la correspondance de Green pour $\delta(D), H \times H$ et $G \times G$. Soit b un bloc de H dont D est un groupe de défaut. Comme $C_G(D) \subseteq H$, d'après le lemme 14.2(3), $B = b^G$ est défini. Remarquons que b est un $k(H \times H)$-module indécomposable avec sommet $\delta(D)$ et b est un facteur direct de $B_{H\times H}$. D'après le théorème 11.12, B est le $k(G \times G)$-module indécomposable correspondant à b. En particulier, $\delta(D)$ est un sommet de B, c'est-à-dire, D est un groupe de défaut de B. Ainsi $b \mapsto b^G$ donne une injection de la classe des blocs de H ayant D pour groupe de défaut dans la classe des blocs de G ayant D pour groupe de défaut. Ici l'injectivité suit de l'injectivité de la correspondance de Green.

Supposons maintenant que B est un bloc de G ayant D pour groupe de défaut, c'est-à-dire, B est un $k(G\times G)$-facteur direct indécomposable de kG avec sommet $\delta(D)$. D'après le lemme 9.11, il existe un $k(H \times H)$-facteur direct indécomposable b de $B_{H\times H}$ avec sommet $\delta(D)$. En particulier, b est un facteur direct de $(kG)_{H\times H}$. Rappelons que

$$(kG)_{H\times H} = \oplus_{t\in H\backslash G/G, t\notin H}\, k(HtH) \oplus (kH).$$

Si $t \notin H$, d'après la proposition 13.9, aucun facteur direct indécomposable de $k(HtH)$ a $\delta(D)$ pour sommet. Par conséquent, b est un facteur direct indécomposable de kH, c'est-à-dire, b est un bloc de H dont D est un groupe de défaut. Comme $C_G(D) \subseteq N_G(D) \subseteq H$, d'après le lemme 14.1(1), b^G est défini. Comme b est un facteur direct de $B_{H\times H}$, on a $B = b^G$. Ceci achève la démonstration.

Remarque. Si $H = N_G(D)$, on appelle b^G le *correspondant de Brauer* de b.

14.3. Lemme. Soient U un kG-module indécomposable et V un facteur direct indécomposable de U_H. Alors chaque sommet de V est contenu dans un sommet de U.

Démonstration. Soit R un sommet de U. Alors U est un facteur direct de $(U_R)^G$. Donc V est un facteur direct de $((U_R)^G)_H$. D'après le lemme de Mackey,

$$((U_R)^G)_H = \oplus_{s\in H\backslash G/R}((s \otimes_R U_R)_{H\cap sRs^{-1}})^H.$$

Ainsi V est un facteur direct de certain $((s \otimes_R U_R)_{H\cap sRs^{-1}})^H$ avec $s \in G$. Donc $H \cap sRs^{-1}$ contient un sommet R' de V. Or $R' \subseteq sRs^{-1}$ et ce dernier est un sommet de U. Ceci achève la démonstration.

Soit b un bloc de H avec indentité e. Soit X un kH-module. Alors eX est le facteur direct de X appartenant à b. En outre, si Y est un facteur direct de X, alors eY est un facteur direct de eX.

14.4. Théorème de Brauer II. Soient b un bloc de H et B un bloc de G. Soient V un kH-module indécomposable appartenant à b et U un kG-module indécomposable appartenant à B tel que V est un facteur direct de U_H. Si V admet un sommet Q avec $C_G(Q) \subseteq H$, alors $b^G = B$.

Démonstration. Supposons que V admet un sommet Q avec $C_G(Q) \subseteq H$. Soit D un groupe de défaut de b. D'après le théorème 13.7, $Q \subseteq D$. Ainsi $C_G(D) \subseteq C_G(Q) \subseteq H$. D'après le lemme 14.1(1), b^G est défini. Supposons que $b^G \neq B$, c'est-à-dire, b n'est pas un facteur direct de $B_{H\times H}$. Rappelons que $(kG)_{H\times H} = kH \oplus M$, où $M = \oplus_{t\in H\backslash G/H, t\notin H}\, k(HtH)$. Soit e l'indentité de b. Alors $e(kG) = e(kH) \oplus (eM) = b \oplus eM$, en tant que k-espace vectoriel. Comme e est central dans kH, eM est un $k(H \times H)$-sousmodule de $e(kG)$. Ainsi $e(kG)_{H\times H} = b \oplus (eM)$ en tant que $k(H \times H)$-module. Comme $e^2 = e$, on a $B_{H\times H} = (eB)_{H\times H} \oplus ((1-e)B)_{H\times H}$, d'où b n'est pas un facteur direct de $(eB)_{H\times H}$. Comme $(eB)_{H\times H}$ est un facteur direct $(e(kG))_{H\times H}$ et b est un $k(H \times H)$-module indécomposable, $(eB)_{H\times H}$ est un facteur direct de eM, et donc un facteur direct de M. Il suit de la proposition 13.9(3) qu'aucun facteur direct indécomposable de $(eB)_{H\times H}$ n'admet un sommet contenant $\delta(Q)$. Ceci est équivalent à dire qu'aucun facteur direct indécomposable de $e(B_0)_H$ n'admet un sommet contenant Q. Il en est de même pour le kH-module $e(B_0)_H \otimes_k eU_H$ d'après le lemme 13.5. Maintenant $eV = V$ puisque V appartient à b. Donc V est un facteur direct de eU_H. On montrea que eU_H est un facteur direct de $e(B_0)_H \otimes_k eU_H$. Ceci donnera la contradiction cherchée puisque Q est un sommet de V. Soit e_B l'unité de B. Comme e et e_B commutent avec les éléments de H, l'application

$$\phi : eU_H \to e(B_0)_H \otimes_k eU_H : w \mapsto ee_B \otimes_k w$$

est kH-linéaire. D'autre part, il existe un k-morphisme

$$\psi : e(B_0)_H \otimes_k eU_H \to eU_H : a \otimes_k w \mapsto aw$$

tel que $\psi\phi = \mathbb{1}_{eU_H}$ On voit aisément que ψ est kH-linéaire. Ceci achève la démonstration.

14.5. Corollaire. Soit U un kG-module indécomposable appartenant à un bloc B de G et ayant un sommet Q. Soit V le $k[N_G(Q)]$-module correspondant à U sous la correspondance de Green et appartenant à un bloc b de $N_G(Q)$. Alors $b^G = B$.

Démonstration. On sait que V est un facteur direct de $U_{N_G(Q)}$ avec sommet Q. Comme $C_G(Q) \subseteq N_G(Q)$, d'après le théorème 14.3, $b^G = B$. Ceci achève la démonstration.

14.6. Théorème. Soit B un bloc de G. Un sous-groupe D de G est un groupe de défaut de B si et seulement si D est un sommet maximal de kG-modules indécomposables appartenants à B.

Démonstration. Soit D un groupe de défaut de B. D'après le théorème 13.7, il suffit de montrer que D est un sommet d'un kG-module indécomposable appartenant à B. D'après le théorème 14.2, il existe un bloc b de $N_G(D)$ tel que $b^G = B$. Soit S un $kN_G(D)$-module simple appartenant à b. D'après le théorème de Clifford, S_D est semi-simple. Comme D est un p-groupe, l'action de D sur S est triviale. D'après le lemme 5.3, S est un $k[N_G(D)/D]$-module simple. Soit V la couverture projective du $k[N_G(D)/D]$-module S. Alors V est un $kN_G(D)$-module indécomposable tel que $\mathrm{Hom}_{kN_G(D)}(V, S) \neq 0$. Ainsi V appartient à b. Il est aisé que $k[N_G(D)/D] \cong_{kN_G(D)} (k_D)^{N_G(D)}$, un $kN_G(D)$-module relativement D-libre. Étant un facteur direct indécomposable d'une somme direct de $k(N_G(D)/D)$, V est relativement D-projectif. Ainsi D contient un sommet R de V. En outre, V_D est un facteur direct de

$$((k_D)^{N_G(D)})_D = \oplus_{s \in D\backslash N_G(D)/D} \; ((s \otimes_D k_D)_{D \cap sDs^{-1}})^D.$$

Comme D est normal dans $N_G(D)$, on a $((s \otimes_D k_D)_{D \cap sDs^{-1}})^D \cong k_D$, pour tout $s \in N_G(D)$. Donc V_D est une somme direct de k_D. D'après la proposition 9.11, R est un sommet de k_D. Ainsi $R = D$ puisque D est un p-groupe. Considérons la correspondance de Green pour $D, N_G(D)$ et G. Soit U le kG-module correspondant à V. Alors D est un sommet de U. De plus, il suit du corollaire 14.5, U appartient à B. Ceci achève la démonstration.

14.7. Corollaire. Un bloc B de G est simple si et seulement si B est de défaut zéro.

Démonstration. B est simple si et seulement si B est semi-simple si et seulement si tout kB-module indécomposable admet $\{1\}$ pour sommet si et seulement si $\{1\}$ est le groupe de défaut de B. Ceci achève la démonstration.

15. Module canonique

Soient $B_1, \ldots, B_r$ les blocs de kG et $1 = e_1 + \cdots + e_r$. Soit U un kG-module. Alors $U = e_1U \oplus \cdots \oplus e_rU$. On appelle e_iU le facteur direct canonique de U appartenant à B_i. En général si $e = e_{i_1} + \cdots + e_{i_s}$, alors $eU = e_{i_1}U \oplus \cdots \oplus e_{i_s}U$ s'appelle le facteur direct canonique de U appartenant à $B_{i_1}, \ldots, B_{i_s}$. Il est évident que si U et W sont des kG-modules appartenants à deux ensembles disjoints de blocs de G, alors $U \ncong W$.

Partout dans cette section, on se fixe N un sous-groupe normal de G. En outre soient B un bloc de G et b un bloc de N tel que B *couvre* b, i.e. il existe un kG-module U appartenant à B tel que U_N admet un facteur direct non nul appartenant à b.

Comme N est normal dans G, un élément $g \in G$ induit par conjugaison un automorphisme de l'algèbre kN. Ceci donne une permutation des blocs de N. Soit b un bloc de N. Alors le stablisateur $\mathrm{S}_G(b) = \{g \in G \mid gbg^{-1} = b\}$ de b dans G est un sous-groupe de G.

15.1. Lemme. (1) En tant que kN-module régulier, $k(GbG)$ est le facteur direct canonique de kG appartenant aux blocs de N conjugués avec b.

(2) Soient $b = b_1, b_2, \ldots, b_r$ les représentants des classes de conjugaison des blocs de N. Alors $kG = k(Gb_1G) \oplus \cdots \oplus k(Gb_rG)$, en tant que $k[G \times G]$-module.

Démonstration. (1) On veut montrer que $k(GbG) = \left(\sum_{g\in G} gbg^{-1}\right)(kG)$. En effet $\forall g_1, g_2 \in G$, $g_1bg_2 = g_1bg_1^{-1}(g_1g_2)$. Ainsi $k(GbG) \subseteq \left(\sum_{g\in G} gbg^{-1}\right)(kG)$. D'autre part $(gbg^{-1})(kG) = k(gbg^{-1}G) \subseteq kGbG$. Ainsi $k(GbG) = \left(\sum_{g\in G} gbg^{-1}\right)(kG)$.

(2) Posons $U = \sum_{i=1}^{n} k(Gb_iG)$. Comme $k(Gb_iG)$ contient tous les conjugués de b_i, U contient tous les blocs de kN. Donc $kN \subseteq U$. Or $GU = U$ entraîne que $U = GU \subseteq G(kN) = k(GN) = kG$. Donc $kG = U$. Si $i \neq j$, alors en tant que kN-module régulier, $k(Gb_iG)$ et $k(Gb_jG)$ appartiennent à des blocs distincts de N. Donc $kG = U = \oplus_{i=1}^{r} k(Gb_iG)$. Ceci achève la démonstration.

15.2. Lemme. Soit H un sous-groupe normal de G. Soit U un kG-module. Si V est un facteur direct indécomposable de U_H alors pour $g \in G$, gV est un facteur direct de U_H, et V et gV ont même sommets.

Démonstration. Posons $U_H = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ avec chacun V_i un kH-module indécomposable. Soit $g \in G$. Pour tout $h \in H$, $h(gV_i) = g[(g^{-1}hg)V]gV$ car $ghg^{-1} \in H$. Ainsi gV_i est un sousmodule de U_H. En tant que k-espace, $U = gU = gV_1 + \cdots + gV_n$. En outre si $gv_1 + \cdots gv_n = 0$, $v_i \in V_i$, alors $g(v_1 + \cdots + v_n) = 0$. Donc $v_1 + \cdots + v_n = 0$. Ceci implique $v_i = 0, \forall 1 \leq i \leq n$. Ainsi $U = gV_1 \oplus \cdots \oplus gV_n$ en tant que k-espace. Par conséquent $U_H = gV_1 \oplus \cdots \oplus gV_n$ en tant que kH-module. Ceci entraîne que gV_i est indécomposable pour tout $1 \leq i \leq n$. Or si X est un kH-module, alors $X_0 = X$ est un kH-module pour la multiplication $h \circ x = g^{-1}hgx$. En utilisant cette observation, on peut vérifier que V est relativement R-projectif si et seulement si gV est relativement gRg^{-1}-projectif.

Soit $X = \delta(S_G(b))(N \times N)$. Alors $N \times N \trianglelefteq X \leq G \times G$. Or b est un k-sousespace du $k[G \times G]$-module kG tel que $\forall x = (h,h)(h_1,h_2) \in X$ avec $h \in S_G(b)$ et $h_1, h_2 \in N$, $x \cdot b = (h,h) \cdot [(h_1,h_2) \cdot b] = (h,h) \cdot b = hbh^{-1} = b$. Ainsi b est un sousmodule de $(kG)_X$, noté b_X.

15.3. Lemme. Soit b un bloc de N.

(1) $k(GbG)_{N \times N} = \oplus_{t \in (G \times G)/X}\ t \cdot b$ avec $t \cdot b$ un $k[N \times N]$-module indécomposable.

(2) En tant que $k[G \times G]$-module, $k(GbG) \cong (b_X)^{G \times G}$.

Démonstration. (1) Remarquons que b est un facteur direct indécomposable de $(kG)_{N \times N}$. Comme $N \times N$ est normal dans $G \times G$, pour tout $t \in (G \times G)/X$, $t \cdot b$ est un facteur direct indécomposable de $(kG)_{N \times N}$ par 15.2. En outre $\forall y \in G \times G$, $y = tx$ avec $t \in (G \times G)/X$ et $x \in X$. Ainsi $y \cdot b = t \cdot (x \cdot b) = t \cdot b$. Donc $k(GbG) = k[G \times G] \cdot b = \sum_{t \in (G \times G)/X}\ t \cdot b$. Il reste à vérifier que cette somme est directe.

Soit $t = (g_1, g_2) \notin X$. On pr'etend que $t \cdot b \subseteq k(G \backslash N)$ ou $t \cdot b = gbg^{-1}$ avec $gbg^{-1} \neq b$. En effet si $g_1 g_2^{-1} \notin N$, alors $t \cdot b = g_1 g_2^{-1}(g_2 b g_2^{-1}) \subseteq k(N \backslash N)$ car $g_2 b g_2^{-1} \subseteq kN$. Si $z = g_1 g_2^{-1} \in N$, alors

$$t \cdot b = z g_2 b g_2^{-1} = g_2(g_2^{-1} z g_2) b g_2^{-1} = g_2 b g_2^{-1}.$$

Or $t = (g_1, g_2) = (z, 1)(g_2, g_2) \notin X = \delta(S_G(b))(N \times N) = (N \times N)\delta(S_G(b))$ implique que $g_2 \notin S_G(b)$. Ainsi $g_2 b g_2^{-1} \neq b$. Or en tant que k-espace, $kG = kN \oplus k(G \backslash N) = b_1 \oplus \cdots \oplus b_n \oplus k(G \backslash N)$, où $b_1 = b, \ldots, b_n$ sont les blocs de N. Ainsi $b \cap \sum_{t \in (G \times G)/X, t \notin X}\ t \cdot b = 0$. Ceci implique la somme $k(GbG) = \sum_{t \in (G \times G)/X}\ t \cdot b$ est directe.

(2) On sait que b_X est un sousmodule de $(kG)_X$. Par (1), $k(GbG) = \oplus_{t\in(G\times G)/X}\, t\cdot b$. Par 8.5, $k(GbG) \cong (b_X)^{G\times G}$

15.4. Lemme. Soient B un bloc de G et b un bloc de N. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(1) b est couvert par B.

(2) b est un facteur direct de $B_{N\times N}$.

(3) En tant que $k[G\times G]$-module, B est un facteur direct de $k(GbG)$.

(4) Pour tout kG-module non nul U appartenant à B, $U_N = \sum_{g\in G}(gbg^{-1})b$ avec chaque $gbg^{-1}b$ non nul.

Démonstration. Soient $b = b_1, b_2, \ldots, b_r$ les représentants des classes de conjugaison des blocs de N. Par 15.1.(2), en tant que $k[G\times G]$-module, $kG = k(Gb_1G)\oplus\cdots\oplus k(Gb_rG)$. Étant un facteur direct indécomposbale de kG, B est un facteur direct de $k(Gb_{i_0}G)$ pour un $1 \le i_0 \le r$.

(2)⇒(3)) Supposons que b est un facteur direct de $B_{N\times N}$. Alors $bB \neq 0$ car $bb \subseteq bB$. Ainsi $bk(Gb_{i_0}G) \neq 0$. Ceci montre que b est un des blocs de N auxquels le kN-module régulier $k(Gb_{i_0}G)$ appartient. Par 15.1.(1), b est conjugué avec b_{i_0}. Ainsi $i_0 = 1$ et B est un facteur direct de $k(GbG)$.

(3)⇒(2) et (4)) Supposons que B est un facteur direct de $k(GbG)$ en tant que $k[G\times G]$-module. Par 15.3.(1), $k(GbG)_{N\times N} = \oplus_{t\in(G\times G)/X}\, t\cdot b$ avec les $t\cdot b$ indécomposables. Or $B_{N\times N}$ est un facteur direct de $k(GbG)_{N\times N}$ entraîne qu'il existe un t tel que $t\cdot b$ est un facteur direct de $B_{N\times N}$. Par 15.2, b est un facteur direct de $B_{N\times N}$.

En outre remarquons que B n'est pas un facteur direct de $k(Gb_iG)$ pour $i > 1$. Ainsi pour tout kG-module non nul U appartenant à B, $k(Gb_iG)U = 0$, $\forall i > 1$ car $k(Gb_iG)$ est une somme directe de blocs de G auquels U ne contient pas. En particulier $(gb_ig^{-1})U = 0, \forall g\in G, \forall i > 1$. Ainsi $U_N = NU = \sum_{g\in G}(gbg^{-1})b$. D'autre part $BU = U$ et $B \subseteq k(GbG)$ entraînent que $U = k(GbG)U = (kG)bU$. Ceci donne $bU \neq 0$. De plus $\forall g\in G$, $gbg^{-1}U = gbU \neq 0$ car $bU \neq 0$.

(1)⇒(3)) Prenons U un kG-module non nul appartient à B tel que $bU \neq 0$. Donc $k(GbG)U \neq 0$. Mais comme B est un facteur direct de $k(Gb_{i_0}G)$ et $kG = \oplus_{i=1}^{r} k(Gb_iG)$, on a que $k(Gb_jG) = 0$, $\forall j \neq i_0$. Ainsi $i_0 = 1$, c'est-à-dire, B est un facteur direct de $k(GbG)$. Enfin on a trivialement que (4) implique (1).

Remarque. $b^G = B$ si et seulement si B est le seul bloc de G qui couvre b.

Soit n un entier positif tel que $n = p^a q$ avec $p \not| p$. On note $p^a = n_p$.

15.5. Théorème. Soient B un bloc de G et b un bloc de N couvert par B.

(1) Les blocs de N couverts par B forment une classe de conjugaison.

(2) $S_G(b)$ contient un groupe de défaut de B.

(3) Un groupe de défaut de b est l'intersection d'un groupe de défaut de B avec N.

(4) Il existe un bloc B' de G couvrant b et ayant un groupe de défaut D' tel que D' contient un groupe de défaut de tout bloc de G couvrant b et $[D' : D' \cap N] = [S_G(b) : N]_p$.

(5) Si b a un groupe de défaut dont le centralisateur dans G est contenu dans N, alors b^G est défini et $b^G = B$.

Démonstration. (1) Soit U un kG-module non nul appartenant à B. Par 15.4.(4), U_N admet un facteur direct non nul appartenant à tout bloc de N conjugué avec b. Ainsi tout bloc conjugué avec b est couvert par B. En outre si b' est un bloc non conjugué avec b, alors tout kG-module n'a pas de facteur direct non nul appartenant à b'. Donc b' n'est pas couvert par B.

(5) Soit D un groupe de défaut de b avec $C_G(D) \subseteq N$. Par 14.6, il existe un kb-module indécomposable V tel que D est un sommet de V. Comme V est un facteur direct de $(V^G)_N$, il suit de 14.4 que b^G est défini. Or par 15.4.(2), b est un facteur direct de $B_{N\times N}$. Ceci implique $b^G = B$.

(2) Par 15.3.(2), le $k[G\times G]$-module $k(GbG)$ est relativement libre pour $X = \delta(S_G(b))(N\times N)$. Or B est un facteur direct de $k(GbG)$ par 15.4.(3), et donc relativement X-projective. Remarquons que $X \subseteq S_G(b) \times S_G(b)$ car $N \subseteq S_G(b)$. Ainsi B possède un sommet $\delta(D) \subseteq S_G(b) \times S_G(b)$. Ainsi $S_G(b)$ contient D, un groupe de défaut de B.

(3) Soit D_1 un sommet de b. Par 15.4.(2), b est un facteur direct de $B_{N\times N}$. Par 14.3, $\delta(D_1) \subseteq \delta(D)$, un sommet de B. Ainsi $\delta(D_1) \subseteq \delta(D) \cap (N \times N)$. Par 13.1, $kG = (k_{\delta(G)})^{G\times G}$. Par le devoir 8.3, B a une source triviale car B est un facteur direct de $kG \cong (k_{\delta(G)})^{G\times G}$. Par 9.12, $B_{N\times N}$ a un facteur direct indécomposable ayant un sommet contenant l'intersection

d'un sommet de B avec $N \times N$. Par 15.4.(3), $B_{N\times N}$ est un facteur direct de $k(GbG)_{N\times N} \overset{15.3}{=} \oplus_{t\in(G\times G)/X}\, t\cdot b$. Par 15.2, $t\cdot b$ est indécomposable et admet les même sommets que b. Donc $B_{N\times N} = t_1\cdot b \oplus \oplus t_n \cdot b$ avec $t_1,\ldots,t_n \in G\times G$. Ainsi b admet un sommet $\delta(D_2)$ contenant $\delta(D_3)\cap(N\times N)$ avec $\delta(D_3)$ un sommet de B. Ainsi $|\delta(D_1)| = |\delta(D_2)| \geq |\delta(D_3)\cap(N\times N)| = |\delta(D)\cap(N\times N)|$. Donc $\delta(D_1) = \delta(D)\cap(N\times N)$. Ceci donne $D_1 = D\cap N$.

(4) Par 15.4, les blocs de G couvrant b sont les facteurs directs indécomposables de $k(GbG) \overset{15.3}{\cong} (b_X)^{G\times G}$. Par conséquent un tel bloc admet un sommet contenu dans un sommet de b_X. Mais b_X est un facteur direct de $((b_X)^{G\times G})_X \cong k(GbG)_X$. Donc il existe un bloc B' de G couvrant b tel que b_X est un facteur direct de $(B')_X$. Par 14.3, tout sommet de b_X est contenu dans un sommet de B'. Ainsi B' admet un sommet qui est également un sommet de b_X. Donc tout bloc couvrant b a un sommet contenu dans un sommet de B', c'est-à-dire, tout bloc couvrant b a un groupe de défaut contenu dans un groupe de défaut de B'.

Enfin soit $\delta(D') \subseteq X$ un sommet de B' et de b_X. Comme $N \subseteq S_G(b)$, on a que $\delta(S_G(b))\cap(N\times N) = \delta(N)$. Ainsi

$$\begin{aligned} & [X : (N\times N)] = [\delta(S_G(b)) : \delta(S_G(b))\cap(N\times N)] \\ = \;& [\delta(D') : \delta(D'\cap N)] = [\delta(S_G(b)) : \delta(N)] = [S_G(b) : N]. \end{aligned}$$

En outre $[\delta(D') : \delta(D')\cap(N\times N)] = [D' : D'\cap N]$. Remarquons que $(b_X)_{N\times N} = b$ est indécomposable. Par 9.13, $\delta(D')(N\times N)/(N\times N)$ est un p-sousgroupe de Sylow de $X/(N\times N)$. Ainsi

$$\begin{aligned} [S_G(b) : N]_p &= [X : (N\times N)]_p = |X/(N\times N)|_p \\ &= |\delta(D')(N\times N)/(N\times N)| \\ &= |\delta(D')/\delta(D')\cap(N\times N)| \\ &= [D' : D'\cap N]. \end{aligned}$$

15.6. Proposition. Soit D un p-sousgroupe de G. Alors il existe une correspondance bijective entre les blocs B de G avec D un groupe de défaut et les classes de conjugaison dans $N_G(D)$ des blocs β de $DC_G(D)$ avec D un groupe de défaut tel que $\beta^G = B$ et $[S_{N_G(D)}(\beta) : DC_G(D)]$ non divisible par p.

Démonstration. Soit B un bloc de G avec D un groupe de défaut. Par 14.2, il existe un seul bloc b de $N_G(D)$ avec D un groupe de défaut tel que $b^G = B$. Remarquons que $DC_G(D)$ est un sous-groupe normal de $N_G(D)$. Soit β un bloc de $DC_G(D)$ couvert par b. Comme D est un p-sousgroupe normal de $DC_G(D)$, D est contenu dans un groupe de défaut D' de β par 13.10. Comme $C_{N_G(D)}(D') \subseteq C_{N_G(D)}(D) \subseteq C_G(D) \subseteq DC_G(D)$, $\beta^{N_G(D)}$ est défini et $\beta^{N_G(D)} = b$ par 15.5.(5). Or $\beta^G = (\beta^{N_G(D)})^G = b^G = B$. En outre par 14.1, D' est contenu dans un groupe de défaut D'' de $\beta^{N_G(D)} = b$. Ceci entraîne que $D = D''$ et donc $D = D'$ est un groupe de défaut de β. En outre comme b est le seul bloc de $N_G(D)$ couvrant β, par 15.5.(4), $1 = [D : D] = [D : D \cap DC_G(D)] = [S_{N_G(D)}(\beta) : DC_G(D)]_p$. Ainsi $p \not| [S_{N_G(D)}(\beta) : DC_G(D)]$. Par conséquent associer la classe de conjugaison dans $N_G(D)$ de β à B donne une injection.

D'autre part, supposons que β est un bloc de $DC_G(D)$ avec D un groupe de défaut tel que $p \not| [S_{N_G(D)}(\beta) : DC_{N_G(D)}(D)]$. Comme $C_G(D) \subseteq DC_G(D)$, $\beta^{N_G(D)}$ est défini par 15.5.(5). Alors $b = \beta^{N_G(D)}$ est le seul bloc de $N_G(D)$ couvrant β. Par 15.5.(2), il existe un groupe de défaut D_1 de b tel que $D = D_1 \cap DC_G(D)$. Par 15.5.(4), $[D_1 : D] = [D_1 : D_1 \cap DC_G(D)] = [S_{N_G(D)}(\beta) : DC_G(D)]_p = 1$. Ainsi $D = D_1$ est un groupe de défaut de b. Soit $B = b^G$ le bloc de G qui est le correspondant de Brauer de b. Alors D est un groupe de défaut de B, et donc la classe de conjugaison dans $N_G(D)$ de β correspond à B. Ceci achève la démonstration.

15.7. Lemme. Soit A une k-algèbre de dimension finie. Alors deux A-modules simples non isomorphes S et T appartiennent au même bloc de A si et seulement si il existe des A-modules simples $S = T_1, T_2, \ldots, T_m = T$ tels que $\forall 1 \leq i < m$, soit $\mathrm{Ext}^1_A(T_i, T_{i+1})$ non nul soit $\mathrm{Ext}^1_A(T_{i+1}, T_i)$ non nul.

15.8. Lemme. Soit H un p-sousgroupe G tel que $G = HL$ avec $L \subseteq C_G(H)$. Alors

(1) Tout kG-module simple est un $k(G/H)$-module simple.

(2) Deux kG-module simples appartiennent au même bloc de G si et seulement si ils appartiennent au même bloc de $k(G/H)$.

Démonstration. Tout d'abord H est normal dans G. Soient S et T deux kG-modules simples non isomorphes. D'après le théorème de Clifford, S_H est semi-simple. Comme H est un p-groupe, l'action de H sur S_H est triviale. Par 5.3, S est un $k(G/H)$-module simple.

En outre $\forall x \in S_L$, $Lx = HLx = Gx = S = S_L$. Ainsi S_L est également simple.

On prétend que $\mathrm{Ext}^1_{kG}(S,T) \neq 0$ si et seulement si $\mathrm{Ext}^1_{k(G/H)}(S,T) \neq 0$. En effet si $0 \to T \to V \to S \to 0$ est une suite exacte non scindée dans $k(G/H)$-mod, alors elle est aussi exacte et non-scindée dans kG-mod lors qu'on considère T, V et S comme des kG-modules.

Réciproquement soit $0 \to T \to U \to S \to 0$ une suite exacte non scindée dans kG-mod. Alors

$$0 \to T_L \to U_L \to S_L \to 0$$

est exacte dans kL-mod avec T_L et S_L simples. De plus S_L et T_L sont non isomorphes car S et T sont non isomorphes. Ainsi soit U_L est unisériel soit $U_L \cong T_L \to U_L \oplus S_L$. Dans le premier cas, $\mathrm{End}_{kL}(U_L) = k$ comme $T_L \ncong S_L$ et dans le deuxième cas $\mathrm{End}_{kL}(U_L) = k \oplus k$. Or $\forall h \in H, \phi_h : U_L \to U_L : x \mapsto hx$ est kL-linéaire car $L \subseteq C_G(H)$. Ainsi $h \mapsto \phi_h$ induit un homomorphisme d'algèbres $\phi : kH \to \mathrm{End}_{kL}(U)$. Or toute sous-algèbre de k ou de $k \oplus k$ est toujours semi-simple. Donc $kD/\ker(\phi)$ est semisimple. Par conséquent $\mathrm{rad}(kH) \subseteq \ker(\phi)$. Or $\mathrm{rad}(kH) = \Delta(H) = \{\sum_{h\in H} \lambda_h h \mid \sum_{h\in H} \lambda_h = 0\}$ car H est un p-groupe. Par conséquent $1-h \in \ker(\phi)$, c'est-à-dire, $hx = x, \forall x \in U$. Ceci montre que l'action de H sur U est triviale. Donc U est également un $k(G/H)$-module. Donc $0 \to T \to U \to S \to 0$ est une suite exacte non scindée dans $k(G/H)$-mod.

Il s'en suit maintenant de 15.7 que S et T appartiennent au même bloc de G si et seulement si ils appartiennent au même bloc de $k(G/H)$.

15.9. Lemme. Soit H un sous-groupe normal de G. Soit U un kG-module indécomposable ayant un sommet P contenant H. Si l'action de H sur U est triviale, alors U est un $k(G/H)$-module indécomposable dont P/H est un sommet.

Démonstration. On peut identifier les $k(G/H)$-modules avec les kG-modules sur lesquels l'action de H est triviale. En particulier si V et W sont de tels modules, alors V est un facteur direct de W en tant que kG-module si et seulement si V est un facteur direct de W en tant que $k(G/H)$-module.

Soit Q/H un sous-groupe de G/H avec $H \subseteq Q$. Supposons que l'action de H sur U est triviale. On prétend que $(U_{Q/H})^{G/H} \cong (U_Q)^G$ en tant que kG-module et en tant que $k(G/H)$-

module. En effet, on peut vérifier qu'il existe des kG-homomorphismes $\phi : (U_{Q/H})^{G/H} \to (U_Q)^G$ et $\psi : (U_Q)^G \to (U_{Q/H})^{G/H}$ tels que $\phi(\bar{g} \otimes_{Q/H} u) = g \otimes_Q u$ et $\psi(g \otimes_Q u) = \bar{g} \otimes_{Q/H} u$. Ainsi $\phi\psi = \mathbb{1}$ et $\psi\phi = \mathbb{1}$.

Or comme U est relativement P-projectif, U est un facteur direct de $(U_P)^G \cong (U_{P/H})^{G/H}$. Ainsi U est facteur direct de $(U_{P/H})^{G/H}$ en tant que $k(G/H)$-module. Donc U est relativement P/H-projectif en tant que $k(G/H)$-module. Ainsi P/H contient un sommet Q/H de U en tant que $k(G/H)$-module avec $H \subseteq Q \subseteq P$. De même U est un facteur direct de $(U_Q)^G$ en tant que kG-module. D'où U est relativement Q-projectif, et donc $P = Q$. Ceci donne $P/H = Q/H$ est un sommet de U en tant que $k(G/H)$-module.

15.10. Proposition. Soit D un p-sousgroupe de G. Alors il existe une correspondance bijective entre les blocs de $DC_G(D)$ et les blocs de $DC_G(D)/D$ tel que si un bloc de $DC_G(D)$ a un groupe de défaut P alors le bloc correspondant de $DC_G(D)/D$ a un groupe de défaut P/D. En outre cette correspondance est compatible avec la conjugaison par les éléments de $N_G(D)$.

Démonstration. D'abord D est un p-sousgroupe normal de $DC_G(D)$. Par 15.8, un $k[DC_G(D)]$-module simple est un $k[DC_G(D)/D]$-module simple et deux $k[DC_G(D)]$-modules simples S et T appartiennent au même bloc de $DC_G(D)$ si et seulement si ils appartiennent au même bloc de $DC_G(D)/D$. À chaque bloc b de $DC_G(D)$, on associe le bloc $\bar{b}$ de $k[DC_G(D)]/D]$ ayant les même modules simples que b. Ceci donne une correspondance bijective entre les blocs de $DC_G(D)]$ et ceux de $DC_G(D)]/D$. Il reste à vérifier que si P est un groupe de défaut de b, alors P/D est un groupe de défaut de $\bar{b}$.

Supposons que P est un groupe de défaut de b. Alors $D \subseteq P$ par 13.10. Soit W un $k[DC_G(D)/D$-module indécomposable appartenant à $\bar{b}$. Remarquons que les facteurs de composition de W appartiennent à $\bar{b}$. Mais ils sont également les facteurs de composition de W en tant que $k[DC_G(D)]$-module. Ainsi en tant que $k[DC_G(D)]$-module, W appartient à b et donc relativement P-projectif par 13.7. En tant que $k[DC_G(D)/D]$-module, W est relativement P/D-projectif par 15.9. Ainsi P/D contient un groupe de défaut de $\bar{b}$. On achèvera la démonstration en trouvant un $\bar{b}$-module indécomposable dont P/D est un sommet.

Posons $N(P)$ le normatisateur de P dans $DC_G(D)$. On considère la correspondance de

Green (11.9) et la correspondance de Brauer (14.2) pour $P, N(P)$ et $DC_G(D)$. Soit β le bloc de $N(P)$ tel que $\beta^{DC_G(D)} = b$. Alors P est un groupe de défaut de β.

Soit V un $k[N(P)/P]$-module indécomposable projectif appartenant à β. Par le raisonnement dans la démonstration de 14.6, V est un $kN(P)$-module indécomposable dont P est un sommet et l'action de P sur V est triviale. Ceci entraîne que l'action de D sur $V^{DC_G(D)} = DC_G(D) \otimes_{N(P)} V$ est triviale.

Soit U le $k[DC_G(D)]$-module correspondant à V sous la correspondance de Green. Alors P est un sommet de U et V est un facteur direct de $U_{N(P)}$. Par 14.4, U appartient à $\beta^{DC_G(D)} = b$. En outre U est un facteur direct de $V^{DC_G(D)}$. Donc l'action de D sur U est triviale. Par conséquent U est un $k[DC_G(D)/D]$-module dont P/D est un sommet par 15.9. Ceci achève la démonstration.

15.11. Théorème III de Brauer. Soit D un p-sousgroupe de G. Alors il existe une correspondance bijective entre les blocs de G avec D un groupe de défaut et les classes de conjugaison dans $N_G(D)$ des blocs β de $DC_G(D)$ de défaut zéro tel que $[S_{N_G(D)}(\beta) : DC_G(D)]$ n'est pas divisible par p.

Démonstration. Il s'en suit de 15.6 et 15.11.

15.12. Lemme. Soit D un p-groupe non cyclique. Alors D est un sommet d'une infinité de kD-modules indécomposables non isomorphes.

Décomposition. Comme D n'est pas cyclique, il existe un sous-groupe normal Q de D tel que $D/Q = P_1/Q \times P_2/Q$ avec $Q \subseteq P_i$ et $|P_i/Q| = p$. Or $\forall n \geq 1$, il existe un $k(D/Q)$-module indécomposable V_n de dimension $2n$. Si D/Q n'est pas un sommet de V_n, alors V_n admet un sommet Q_n/Q avec $Q \subseteq Q_n \subseteq D$ et il existe un $k(Q_n/Q)$-module indécomposable W_n tel que V_n est un facteur direct de $(V_n)^{D/Q}$. Mais Q_n/Q est cyclique entraîne que $k(Q_n/Q)$ est représentation-finie. Donc il existe un nombre positif $m(Q_n)$ tel que $\dim W_n \leq m(Q_n)$. Ceci implique $\dim V_n \leq \dim(W_n)^D \leq |D| \cdot m(Q_n)$. Or il n'a y qu'un nombre fini de sous-groupes propres de D/Q entraîne qu'il y a $n_0 > 0$ tel que D est un sommet de V_n pour tout $n > n_0$.

Or V_n est un kD-module indécomposable de dimension $2n$ sur lequel l'action de Q est triviale. Ainsi k_Q est un facteur direct de $(V_n)_Q$. Étant le sommet de k_Q, Q est inclu dans un sommet D_n de V_n par 14.3. Alors V_n est relativement D_n/Q-projectif en tant que $k(D/Q)$-module. Ainsi $D_n/Q = D/Q$ si $n > n_0$. Donc $D = D_n$ est un sommet de V_n pour tout $n > n_0$. Ceci achève la démonstration.

15.13. Théorème. Soit B un bloc de G. Alors B est représentation-finie si et seulement si les groupes de défaut de B sont cycliques.

Démonstration. Soit D un groupe de déaut de B. Supposons que D est cyclique. Soit U un kG-module indécomposable appartenant à B. Alors D contient un sommet Q de U par 13.7. Prenons V une source de U, i.e. V est un kQ-module indécomposable tel que U est un facteur direct de V^G. Or Q est cyclique entraîne qu'il n'existe qu'un nombre fini de kQ-modules indécomposables à isomorphisme près. Par conséquent, il n'existe qu'un nombre fini de kG-modules indécomposables, à isomorphisme près, appartenant à B. Ainsi B est représentation-finie.

Supposons maintenant que D n'est pas cyclique. Par 15.2, D est un sommet d'une infinité de kD-modules indécomposables non-isomorphes V_i. Soit b le bloc de $N = N_G(D)$ correspondant à B, i.e. $b^G = B$. Soit S un kN-module simple appartenant à b. Alors S est aussi un $k(N/D)$-module simple. Ainsi $\mathrm{Hom}_{kN}(k(N/D), S) = \mathrm{Hom}_{k(N/D)}(k(N/D), S) \neq 0$. Ainsi $k(N/D) = (k_D)^N$ possède un facteur direct non nul appartenant à b. Ainsi $\forall i,\ (V_i)^N \otimes_k (k_D)^N$ possède un facteur direct non nul appartenant à b. Mais

$$(V_i)^N \otimes_k (k_D)^N \overset{8.9}{\cong} \Big((V_i^N)_D \otimes_k k_D\Big)^N \cong \Big((V_i^N)_D\Big)^N \cong \oplus_{s\in D\backslash N/D}\, (s \otimes_D V_i)^N$$

Ainsi il exsite un $s \in N$ tel que $(s \otimes_D V_i)^N$ admet un facteur direct non nul appartenenat à b. Donc $0 \neq b(kN \otimes_D s \otimes_D V_i) = b \otimes_k s \otimes_D V_i = s \otimes_D (b \otimes_D V_i)$. Ceci donne $b(V_i)^N = b \otimes_D V_i \neq 0$. Par conséquent $(V_i)^N$ admet un facteur direct indécomposable U_i appartenenat à b. Or U_i est relativement D-projectif entraîne que D contient un sommet U_i. Et $\Big((V_i)^N\Big)_D = \otimes_{t\in D\backslash N/D}\, t \otimes_D V_i$ entraîne qu'il existe $\Sigma_i \subseteq D\backslash N/D$ tel que $(U_i)_D = \otimes_{t\in\Sigma_i}\, t \otimes_D V_i$. Par 15.2, $t \otimes_D V_i = t(1 \otimes_D V_i)$ a même sommets que $1 \otimes_D V_i \cong V_i$. Ainsi D est un sommet de $t \otimes_D V_i$. Par 14.3, D est inclu dans un sommet de U_i. Par conséquent D est un sommet de U_i.

Or pour tout V_i, il n'y a qu'un nombre fini, à isomorphe près, de kD-modules isomorphes aux $t \otimes_D V_i$ avec $t \in D\backslash N/D$, on obtient une infinité de U_i non isomorphes. Soit W_i le kG-module correspondant à U_i. Alors U_i est un facteur direct de $(W_i)_{N_G(D)}$. Par 14.4,

W appartient à $b^G = B$. Ceci donne une infinité de B-modules indécomposables non-isomorphes. Le démonstration est completée.

16. Bloc principal

Le *bloc principal* $b_0(G)$ de G est le bloc auquel le kG-module trivial k appartient. Comme les sommets de k sont les p-sous-groupes de Sylow de G, par 14.6, les groupes de défaut de $b_0(G)$ sont les p-sousgroupes de Sylow de G. Si N est un sous-groupe normal de G, par 15.4, $b_0(N)$ est le seul bloc de N couvert par $b_0(G)$ car k_N est indécomposable appartenant à $b_0(N)$.

16.1. Lemme. Soit H un sous-groupe de G. Si D est un groupe de défaut de $b_0(H)$ tel que $C_G(D) \subseteq H$, alors $(b_0(H))^G = b_0(G)$.

Démonstration. On sait que D est un p-sousgroupe de Sylow de H, et donc un sommet de k_H. Comme k_H est la restriction du kG-module trivial k qui appartient à $b_0(G)$. Par 14.4, $(b_0(H))^G$ est défini et $(b_0(H))^G = b_0(G)$.

16.2. Lemme. Soit D un p-sousgroupe de G. Soit b un bloc de $DC_G(D)$ dont D est un groupe de défaut. Si $b^G = b_0(G)$, alors $b = b_0(DC_G(D))$.

Démonstration. Supposons que $b^G = b_0(G)$. Remarquons que b^L est défini pour tout sous-groupe $L \supseteq DC_G(D)$. En particulier $b_0(G) = b^G = (b^{N_G(D)})^G$.

On procède par récurrence. Supposons que D est un p-sousgroupe de Sylow de G. Alors D est un p-sousgroupe de Sylow de $N_G(D)$. Ainsi D est un groupe de défaut de $b_0(G)$ et de $b_0(N_G(D))$. Comme $C_G(D) \subseteq N_G(D)$, $(b_0(N_G(D)))^G = b_0(G)$ par 16.1. Or par 14.2, $(b^{N_G(D)})^G = (b_0(N_G(D)))^G$ entraîne que $b^{N_G(D)} = b_0(N_G(D))$. Comme $DC_G(D)$ est normal dans $N_G(D)$, $b_0(DC_G(D))$ est le seul bloc de $DC_G(D)$ couvert par $b_0(N_G(D))$. Ceci implique que $b = b_0(DC_G(D))$.

Supposons que D n'est pas un p-sousgroupe de Sylow de G et l'énoncé est vrai pour tout p-sousgroupe de G contenant strictement D. Par 14.1, D est inclu dans un groupe de défaut E de $b^{N_G(D)}$. Si $E = D$, alors $(b^{N_G(D)})^G = b^G = b_0(G)$ et $C_G(D) \subseteq N_G(D)$ entraînent que D est un groupe de défaut $b_0(G)$ par 14.2. Ainsi $D = E$ est un p-sousgroupe de Sylow de G, une contradiction. Ainsi $D \subset E$. Or $EC_{N_G(E)}(E) = EC_G(E)$ car $C_G(E) \subseteq C_D(D) \subseteq N_G(D)$. Par 15.6, il existe un bloc β de $EC_G(E)$ dont E est un groupe de défaut tel que $\beta^{N_G(D)} = b^{N_G(D)}$. Ainsi

$$\beta^G = (\beta^{N_G(D)})^G = (b^{N_G(D)})^G = b^G = b_0(G).$$

Par récurrence, on a que $\beta = b_0(EC_G(E))$. Ainsi $b^{N_G(D)} = \beta^{N_G(D)} = (b_0(EC_G(E)))^{N_G(D)} \overset{16.1}{=} b_0(N_G(D))$. Or $DC_G(D)$ est normal dans $N_G(D)$ entraîne que $b_0(DC_G(D))$ est le seul bloc de $DC_G(D)$ couvert par $b_0(N_G(D))$. Par conséquent $b = b_0(DC_G(D))$. Ceci achève la démonstration.

16.2. Théorème. Soit H un sous-groupe de G. Soit b un bloc de H ayant un groupe de défaut D tel que $C_G(D) \subseteq H$. Alors $b^G = b_0(G)$ si et seulement si $b = b_0(H)$.

Démonstration. Tout d'abord par 14.1, b^G est défini car $C_G(D) \subseteq H$. la suffisance est 16.1. Supposons maintenant que $b \neq b_0(H)$ et $b^G = b_0(G)$. On obtiendra une contradiction. Considérons la correspondance de Brauer pour $D \trianglelefteq N_H(D) \subseteq H$. Soit b' le bloc de $N_H(D)$ correspondant à b. Alors $(b')^H = b$ et D est un groupe de défaut de b'. Or $C_G(D) \subseteq H$ entraîne que $C_G(D) = C_H(D) \subseteq N_H(D)$. Par 14.1.(3), $(b')^G$ est défini, et $(b')^G = ((b')^H)^G = b^G = b_0(G)$. Si $b' = b_0(N_H(D)$, alors $b = b_0(H)$ par la suffisance. Ainsi $b' \neq b_0(N_H(D))$. D'après la démonstration de 15.6, b' couvre un bloc β de $DC_H(D) = DC_G(D)$ dont D est un groupe de défaut. On a encore que $\beta' \neq b_0(DC_H(D))$ car $C_{N_H(D)}(D) \subseteq C_H(D) \subseteq DC_H(D)$. De plus β^G est défini par 14.1.(3) car $C_G(D) \subseteq DC_G(D) = DC_H(D)$. Donc $\beta^G = (\beta^{N_H(D)})^G = (b')^G = b_0(G)$. Ceci contredit 16.2. La démonstration est completée.

16.3. Théorème. L'algèbre kG est représentation-finie si et seulement si les p-sousgroupes de Sylow de G sont cycliques.

Démonstration. Si les p-sousgroupes de Sylow de G sont cycliques, alors les groupes de défaut d'un bloc de G sont cyclqies. Par 15.3, tout bloc de G est représentation-finie. Ainsi kG l'est.

Si kG est représentation-finie, alors $b_0(G)$ l'est. Par 15.3, les groupes de défaut de $b_0(G)$ sont cycliques, i.e. les p-sousgroupes de Sylow de G sont cycliques.