MAT 721: Algèbre non commutative

Chapitre I: Algèbres

1.1 Définitions et exemples

Dans notre terminologie, un anneau R admet toujours un élément identité 1_R et un R-module à droite M est toujours unifère, c'est-à-dire, $x \cdot 1_R = x$ pour tout $x \in R$.

Partout dans ce chapitre, on se fixe K un anneau commutatif. Dans ce cas, un K-module à gauche est aussi un K-module à droite.

1.1.1. Définition. Une *algèbre sur* K (ou K-*algèbre*) est un anneau $A = (A, +, \cdot)$ muni d'une multiplication externe $\bullet : K \times A \to A : (\alpha, a) \mapsto \alpha \bullet a$ telle que

(1) $(A, +, \bullet)$ est un K-module.

(2) Pour tous $a, b \in A$ et $\alpha \in K$, on a $\alpha \bullet (a \cdot b) = (\alpha \bullet a) \cdot b = a \cdot (\alpha \bullet b)$.

De plus, on dit que A est une K-algèbre *commutative* si $a \cdot b = b \cdot a$ pour tous $a, b \in A$.

Exemples. (1) $\mathbb{C}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre commutative.

(2) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Alors l'ensemble $C[a, b]$ des fonctions continues définies sur $[a, b]$ est une $\mathbb{R}$-algèbre commutative.

(3) Soit $n \geq 1$ un entier. L'ensemble $M_n(K)$ des matrices carrées sur K est une K-algèbre. On voit que $M_n(K)$ est commutative si, et seulement si, $n = 1$. En particulier, K est K-algèbre commutative.

(4) L'ensemble $K[t]$ des polynômes à une indéterminée t à coefficients dans K est une K-algèbre commutative.

(5) Soit M un K-module. Alors l'ensemble $\mathrm{End}_K(M)$ des applications K-linéaires de M dans M est une K-algèbre.

Remarques. (1) Soit $A = (A, +, \cdot)$ un anneau.

(1) A est une $\mathbb{Z}$-algèbre pour la multiplication externe suivante:

$$n \bullet a = \begin{cases} \overbrace{a + \cdots + a}^{(n \text{ fois})}, & \text{si} \quad n > 0 \\ 0, & \text{si} \quad n = 0 \\ \overbrace{(-a) + \cdots (-a)}^{(-n \text{ fois})}, & \text{si} \quad n < 0. \end{cases}$$

(2) Le centre $R = \{x \in A \,|\, x \cdot a = a \cdot x, \text{ pour tout } a \in A\}$ est un sous-anneau commutatif de A. On voit que A est une algèbre sur R.

1.1.2. Définition. Soit A une K-algèbre. Une partie B de A s'appelle *sous-algèbre* si les conditions suivantes sont satisfaites:

(1) $1_A \in B$.

(2) B est un sous-anneau de l'anneau $(A, +, \cdot)$.

(3) B est sous-module du K-module $(A, +, \bullet)$.

Dans ce cas, B lui-même est une K-algèbre.

Exemples. (1) Soit $C^1[a, b]$ l'ensemble des fonctions différentiables définies sur $[a, b]$, alors $C^1[a, b]$ est une sous-algèbre de $C[a, b]$.

(2) L'ensemble $D_n[K]$ des matrices diagonales d'ordre n sur K est une sous-algèbre de $M_n(K)$.

(3) $K1_A = \{\alpha 1_a \mid \alpha \in K\}$ est une sous-algèbre de A.

1.1.3. Proposition. Soit A une K-algèbre. Alors le centre

$$Z(A) = \{a \in A \,|\, ab = ba, \text{ pour tout } b \in A\}$$

est une sous-algèbre de A contenant $K1_A$.

Soit K un corps. Alors une K-algèbre A est un K-espace vectoriel dont la dimension s'appelle la *dimension* de A. On dit que A est de *dimension finie* si $\dim_K A < \infty$ et de dimension infinie sinon.

Exemples. (1) On voit que $\mathbb{C}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension deux, et $C[a, b]$ est une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension infinie.

(2) Soit K un corps commutatif. Alors $M_n(K)$ est une K-algèbre de dimension n^2 et $K[t]$ est une K-algèbre de dimension infinie.

Soient K un corps et A une K-algèbre de dimension finie ayant pour K-base $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Alors

$$a_i \cdot a_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ij}^k a_k, \;\; \alpha_{ij}^k \in K.$$

On voit que la multiplication de A est uniquement déterminée par les scalaires α_{ij}^k, $i, j, k = 1, \ldots, n$, qui sont appelés les *constantes de structure* de A par rapport à la base $\{a_1, \ldots, a_n\}$.

Le résultat suivant nous dit comment faire d'un K-espace vectoriel de dimension finie une K-algèbre.

1.1.4. Proposition. Soit K un corps et soit A un K-espace vectoriel ayant pour base $\{a_1, \cdots, a_n\}$. On défini d'abord $a_i a_j \in A$ pour touts $1 \leq i, j \leq n$, et ensuite on prolonge aux éléments de A par la distributivité. Si $(a_ia_j)a_k = a_i(a_ja_k)$, pour tous $1 \leq i, j, k \leq n$, alors A devient une K-algèbre.

Exemples. (1) $\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ est un $\mathbb{R}$-espace ayant pour une base $\{1, i, j, k\}$. On voit que la multiplication

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$$

est associative. Donc $\mathbb{H}$ devient une $\mathbb{R}$-algèbre, s'appelle *algèbre des quaternions d'Hamilton*, si l'on prolonge la multiplication par la distributivité.

(2) Soient K un corps et G un groupe fini. Alors

$$KG = \{\sum_{g \in G} \alpha_g g,\ \alpha_g \in K\}$$

est un K-espace ayant pour une base G. Comme la multiplication de G est associative, KG devient une K-algèbre, s'appelle *algèbre du groupe*, si l'on prolonge la multiplication de G aux éléments de kG par la distributivité.

Soit K un corps et soit A une K-algèbre. Dans ce cas, on peut identifier $\alpha \in K$ avec $\alpha \bullet 1_A$. De cette manier, on peut considérer K comme une sous-algèbre de A contenue dans le centre de A. On dit que A est un *sur-corps* de K si tout élément non nul de A admet un inverse.

Exemple. $\mathbb{H}$ est un sur corps de $\mathbb{R}$ de dimension 4. En effet,

$$(a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

1.1.5. Théorème. Soit K un corps algébriquement clos. Si A est un sur corps de K de dimension finie, alors $A = K$.

Démonstration. D'abord, on a $K \subseteq A$. Soit $a \in A$. Si $\dim_K A = n$, alors $\{1, a, \ldots, a^n\}$ est liée. Ainsi il existe des scalaires $\alpha_n, \cdots, \alpha_1, \alpha_0$, non tous nuls, tels que $\alpha_n a^n + \cdots + \alpha_1 a + \alpha_0 = 0$. Ainsi $f(t) = \alpha_n t^n + \cdots + \alpha_1 t + \alpha_0$ est un annulateur de a. Soit $m(t) = t^m + \beta_{m-1}t^{m-1} + \cdots + \beta_1 t + \beta_0$ avec $m \geq 1$ le polynôme minimal de a. Comme A est un sur corps de K, on voit que $m(t)$ est irréductible sur K. Comme K est algébriquement clos, $m = 1$. Ainsi $a = -\beta_0 \in K$.

1.2. Idéaux et algèbres simples

Partout dans cette section, on se fixe K un anneau commutatif et A une K-algèbre.

1.2.1. Définition. Un idéal à gauche (respectivement, à droite, bilatère) de l'anneau A s'appellent *idéal à gauche* (respectivement, *à droite, bilatère*) de l'algèbre A.

Par exemple, 0 et A sont deux idéaux bilatères.

Remarque. Un idéal à gauche ou à droite de A est un sous-module du K-module $(A, +, \bullet)$.

1.2.2. Proposition. Si $\{I_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ est une famille d'idéaux à gauche (respectivement, à droite, bilatère) de A, alors l'intersection $\cap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ et la somme $\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ sont des idéaux à gauche (respectivement, à droite, bilatère).

1.2.3. Proposition. Soit A une K-algèbre avec I un idéal bilatère. Alors

$$A/I = \{\overline{a} = a + I \mid a \in A\}$$

est une K-algèbre, appelée le *quotient* de A modulo par I.

1.2.4. Proposition. Soient I un idéal bilatrе de A.

(1) Si J est un idéal à gauche (respectivement, à droite, bilatère) de A, alors $J/I = \{a + I \mid a \in J\}$ l'est aussi. En outre, $J/I = (J + I)/I$.

(2) L'application $J \mapsto J/I$ donne une bijection de l'ensemble des idéaux à gauche (respectivement, à droite, bilatère) contenant I de A sur l'ensemble des idéaux à gauche (respectivement, à droite, bilatère) de A/I, qui préserve l'ordre d'inclusion.

1.2.5. Définition. Une K-algèbre A est dite *simple* s'il n'a pas d'idéal bilatère propres.

Exemple. Si K est un corps, alors tout sur-corps de K est simple.

Remarquons, pour tout $n \geq 1$, que l'ensemble $M_n(A)$ des matrices carrées d'ordre n sur A est une K-algèbre.

1.2.6. Théorème. Soit D un sur-corps de K. Alors pour tout $n \geq 1$, $M_n(D)$ est une K-algèbre simple. En particulier, $M_n(K)$ est simple.

Démonstration. Pour tous $1 \leq i, j \leq n$ et $d \in D$, désignons par $e_{ij}(a) \in M_n(D)$ dont le (i, j)-terme est a et les autres termes sont tous nuls. Alors

$$e_{ij}(a) \cdot e_{kl}(b) = \begin{cases} e_{il}(ab), & \text{si} \quad j = k \\ 0, & \text{si} \quad j \neq l. \end{cases}$$

Soit I un idéal bilatère non nul de $M_n(D)$. Prenons $B = (b_{ij})_{n\times n} \in I$ telle que $b_{rs} \neq 0$ pour certains $1 \leq r, s \leq n$. Remarquons $B = \sum_{1\leq k,l\leq n} e_{kl}(b_{kl})$. Pour tout $1 \leq i \leq n$, on a

$$I \ni e_{ir}(1_D) \cdot B \cdot e_{si}(1_D) = \sum_{1\leq k,l\leq n} b_{kl} e_{ir}(1_D) e_{kl}(b_{kl}) e_{si}(1_D) = e_{ii}(b_{rs}),$$

et donc $e_{ii}(1_D) = e_{ii}(b_{rs})e_{ii}(b_{ii}^{-1}) \in I$. Ainsi $I = M_n(D)$. Ceci achève la démonstration.

1.3. Homomorphismes d'algèbres

Partout dans cette section, on se fixe K un anneau commutatif.

1.3.1. Définition. Soit $\phi : A \to B$ une application de K-algèbres. On dit que ϕ est un *homomorphisme* si pour tous $a, b \in A$ et $\alpha \in K$,

(1) $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$.

(2) $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$.

(3) $\phi(\alpha \bullet a) = \alpha \bullet \phi(a)$.

(4) $\phi(1_A) = 1_B$.

En outre, on dit que ϕ est un *anti-homomorphisme* si ϕ satisfait aux conditions (1), (3), (4), et la condition que $\phi(ab) = \phi(b)\phi(a)$, pour tous $a, b \in A$.

De plus, un *isomorphisme* (ou anti-isomorphisme) de K-algèbres est un homomorphisme (ou anti-homomorphisme) bijectif. Dans ce cas, son inverse est également un homomorphisme (ou anti-homomorphisme).

1.3.2. Lemme Soit $\phi : A \to B$ un homomorphisme de K-algèbres.

(1) $\mathrm{Im}(\phi)$ est une sous-algèbre de B.

(2) $\mathrm{Ker}(\phi) = \{a \in A \mid \phi(a) = 0_B\}$ est un idéal bilatère de A.

(3) ϕ est injectif si, et seulement si, $\mathrm{Ker}(\phi) = 0$.

Exemple. Si I est un idéal bilatère d'une K-algèbre A, alors

$$\pi : A \to \overline{A} : a \to \overline{a} = a + I$$

est un homomorphisme surjectif, appelé *projection canonique*, dont le noyau est I.

1.3.3. Théorème. Soit $\phi : A \to B$ un homomorphisme de K-algèbres. Soient I un idéal bilatère de A tel que $I \subseteq \mathrm{Ker}(\phi)$ et $\pi : A \to A/I$ la projection canonique. Alors il existe un unique homomorphisme $\bar{\phi} : A/I \to B$ tel que $\phi = \bar{\phi}\pi$, $\mathrm{Im}(\bar{\phi}) = \mathrm{Im}(\phi)$, et $\mathrm{Ker}(\bar{\phi}) = \mathrm{Ker}(\phi)/I$. Par conséquent, $\bar{\phi}$ est surjectif si et seulement si ϕ est surjectif, et $\bar{\phi}$ est injectif si et seulement si $I = \mathrm{Ker}(\phi)$.

1.3.4. Corollaire. Si $A \to B$ est un homomorphisme surjectif de K-algèbres, alors $B \cong A/\mathrm{Ker}(\phi)$.

Exemple. Soient K un corps et $K[t]$ l'algèbre des polynômes. On se fixe $\alpha \in K$. Alors

$$\phi_\alpha : K[t] \to K : f(t) \mapsto f(\alpha)$$

est un homomorphisme surjective d'algèbres. Or pour tout $f(t) \in K[t]$, on a $f(t) \in \mathrm{Ker}(\phi)$ si, et seulement si, $f(\alpha) = 0$ si et seulement si $f(t) = (t - \alpha)g(t)$ avec $g(t) \in K[t]$. Ainsi $\mathrm{Ker}(\phi) = (t - \alpha)K[t]$. D'où $K[t]/(t - \alpha)K[t] \cong K$.

1.3.5. Corollaire. Soient I, J des idéaux bilatères de A avec $I \subseteq J$. Alors

$$(A/I)/(J/I) \cong A/J.$$

Démonstration. Considérons la projection canonique $\pi : A \to A/J$. Comme $I \subseteq J = \mathrm{Ker}(\pi)$, il existe homomorphisme surjectif $\bar{\pi} : A/I \to A/J$ de noyau J/I. Ainsi $A/J \cong (A/I)/(J/I)$. Ceci achève la démonstration.

Chapitre II: Modules sur une algébre

Partout dans ce chapitre, on se fixe K un anneau commutatif et A une K-algèbre.

2.1. Modules

2.1.1. Définition. Un A-*module à droite* est un module à droit $(M, +, \cdot)$ sur l'anneau sous-jacent de A muni d'une multiplication externe

$$\bullet : K \times M \mapsto M : (\alpha, x) \mapsto \alpha \bullet x$$

telle que

(1) $(M, +, \bullet)$ est un K-module.

(2) Pour tous $\alpha \in K$, $a \in A$, $x \in M$, on a $\alpha \bullet (x \cdot a) = (\alpha \bullet x) \cdot a = x \cdot (\alpha a)$.

De même, on définit un A-module à gauche.

Exemple. (1) A est un module à droite et un module à gauche sur lui-même, noté A_A et ${}_AA$ respectivement.

(2) Même si $\mathbb{H}$ n'est pas une $\mathbb{C}$-algèbre, $\mathbb{H}$ est un module à gauche sur la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{C}$.

(3) Soit $A = M_n(K)$. Alors $K^{(n)}$ est un A-module à gauche, et K^n est un A-module à droite.

(4) Soit M un K-module. On se fixe ϕ un K-endomorphisme de M. Alors M devient un module à gauche sur $K[t]$ si pour tous $f(t) \in K[t]$ et $x \in M$, on définit $f(t) \cdot x = f(\phi)(x)$.

2.1.2. Définition. Soit M un A-module à droite. Un sous-ensemble N de M est un *sous-module* si pour tous $x, y \in N$ et $a \in A$, on a $x + y \in N$ et $x \cdot a \in N$. Dans ce cas, $\alpha \bullet x \in N$ pour tous $\alpha \in K$ et $x \in N$. Ainsi N lui-même est un A-module à droite.

Exemples. (1) $0, M$ sont des sous-modules de M.

(2) Pour tout $x \in M$, on a $xA = \{xa \,|\, a \in A\}$ est un sous-module de M.

(3) Les sous-modules de A_A sont les idéaux à droite de A, et les sous-modules de ${}_AA$ sont les idéaux à gauche de A.

Dès maintenant, dans la plupart des cas, on énoncera les notions et les résultats pour les A-modules sans spécifier à droite ou à gauche.

Une famille $\{N_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ d'ensembles est une *chaîne* si pour tous $\lambda, \mu \in \Lambda$, soit $N_\lambda \subseteq N_\mu$ soit $N_\mu \subseteq N_\lambda$.

2.1.3. Proposition. Soient M un A-module et $\mathcal{N} = \{N_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ une famille de sous-modules de M. Alors

(1) $\cap_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$ et $\sum_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$ sont des sous-modules de M.

(2) Si $\mathcal{N}$ est une chaîne, alors $\cup_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$ est un sous-module de M.

2.1.4. Définition. Soient M un A-module et $X \subseteq M$. L'intersection des sous-modules de M contenant X s'appelle le *sous-module engendré par* X, noté $< X >$. Par définition, $< X >$ est le plus petit sous-module de M contenant X.

2.1.5. Lemme. Soient M un A-module à droite et $X \subseteq M$. Alors $< X >= 0$ si $X = \emptyset$; et $< X >= \sum_{x\in X} xA$ sinon.

On dit qu'un A-module M est de *type fini* s'il existe une famille finie X telle que $M =< X >$; et *cyclique* s'il existe un élément $x \in M$ tel que $M =< x >$. Par exemple, A_A et ${}_AA$ sont cycliques.

2.1.6. Définition. Soit M un A-module. Un sous-module N de M est dit *maximal* si $N \neq M$ et il n'existe pas de sous-module L de M tel que $N \subset L \subset M$.

Exemple. Soit K un corps. Si $\alpha \in K$, alors $< t - \alpha >= \{(t - a)f(t) \mid f(t) \in K[t]\}$ est un sous-module maximal de $K[t]_{K[t]}$.

2.1.7. Définition. Soit M un A-module non nul de type fini. Si N est un sous-module de M tel que $N \neq M$, alors N est contenu dans un sous-module maximal de M.

Démonstration. Supposons $M =< x_1, \ldots, x_n >$. Soit $\mathcal{F}$ la famille des sous-modules P de M tels que $N \subseteq P \subset M$. Alors $N \in \mathcal{F}$. Soit $\{P_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ une chaîne d'éléments de $\mathcal{F}$. Alors $\overline{P} = \cup_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$ est un sous-module de M contenant N. Supposons que $\overline{P} = M$. Alors $x_i \in P_{\lambda_i}$ pour un $\lambda_i \in \Lambda$. Or on peut supposer que $P_{\lambda_1} \subseteq P_{\lambda_2} \subseteq \cdots \subseteq P_{\lambda_n}$, car $\{P_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ est une chaîne. Donc $x_1 \cdots, x_n \in P_{\lambda_n}$. En conséquence, $M \subseteq P_{\lambda_n}$, et donc $M = P_{\lambda_n}$, une contradiction. Ainsi $\overline{P} \in \mathcal{F}$. D'après le lemme de Zorn, $\mathcal{F}$ admet un élément maximal, disons P_0. Alors $N \subset P_0$. Si L est un sous-module de M tel que $P_0 \subset L \subseteq M$, alors $L \notin \mathcal{F}$. Donc $L = M$, c'est-à-dire, P_0 est un sous-module maximal de M. Ceci achève la démonstration.

2.1.8. Corollaire. L'algèbre A admet au moins un idéal maximal à droite et au moins un idéal maximal à gauche.

Soit K un corps. Alors tout A-module est un K-espace vectoriel. On dit qu'un A-module M est de *dimension finie* si $\dim_K M$ est finie; et de dimension infinie sinon.

2.1.9. Proposition. Soit K un corps.

(1) Tout A-module de dimension finie est de type fini.

(2) Si A est de dimension finie, alors un A-module est de type fini si, et seulement si, il est de dimension finie.

Démonstration. (1) Soit M un A-module à droite de dimension n. Alors M a pour une K-base $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Donc tout $x \in M$ s'écrit comme $x = \alpha_1 x_1 + \cdots \alpha_n x_n$ avec $\alpha_i \in K$. Ainsi $x \in < x_1, \ldots, x_n >$. Ceci donne $M =< x_1, \ldots, x_n >$.

(2) Supposons que A est de dimension finie ayant pour K-base $\{a_1, \ldots, a_m\}$. Si M est un A-module à droite de type fini, disons $M =< y_1, \cdots, y_n >$. Alors pour tout $x \in M, x = \sum_{i=1}^n y_i b_i,\ b_i \in A$. Or $b_i = \sum_{j=1}^m a_j \alpha_{ij},\ \alpha_{ij} \in K$. Ceci donne $x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (y_i a_j)\alpha_{ij}$. En tant que K-espace vectoriel, M est engendré par $\{y_i a_j \mid 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\}$. Donc M est de dimension finie. Ceci achève la démonstration.

Exemple. Considérons l'algèbre $K[t]$ des polynâmes sur un corps commutatif K. Alors le $K[t]$-module $K[t]_{K[t]}$ est de dimension infinie, mais il est de type fini.

2.1.10. Lemma. Soit M un A-module. Si N est un sous-module de M, alors

$$M/N = \{\overline{x} = x + M \mid x \in M\}$$

est un A-module, appelé le *quotient* de A modulo par N.

2.1.11. Proposition. Soient M un A-module et N un sous-module de M.

(1) Si L est un sous-module de M, alors $L/N = \{x + N \,|\, x \in L\}$ l'est aussi. En outre, $L/N = (L + N)/N$.

(2) L'application $L \mapsto L/N$ donne une bijection de l'ensemble des sous-modules de M contenant N sur l'ensemble des sous-modules de M/N, qui préserve l'ordre d'inclusion.

Pour terminer cette section, on donnera une autre interprétation de A-modules.

Si K est un corps, alors un homomorphisme $\rho : A \to M_n(K)$ de K-algèbres s'appelle une *représentation* de A de dimension n. Remarquons que $M_n(K)$ est isomorphe à l'algèbre des K-endomorphismes de $K^{(n)}$.

2.1.12. Définition. Soit M un K-module. Une *représentation* de A sur M est un homomorphisme $\rho : A \to \mathrm{End}_K(M)$ de K-algèbres.

2.1.13. Proposition. Soit M un K-module. Alors donner M une structure de A-module à gauche est équivalent à donner une représentation de A sur M.

Démonstration. Supposons que $\rho : A \to \mathrm{End}_K(M) : a \to \rho(a)$ est une représentation de A sur M. Pour tous $a \in A$ et $x \in M$, on définit $a \cdot x = \rho(a)(x)$. On peut vérifier que M devient un A-module à gauche pour cette multiplication externe.

Réciproquement, supposons que M est un A-module à gauche. Pour tout $a \in A$, on voit que $\rho(a) : M \to M : x \mapsto a \cdot x$ est K-linéaire. De plus, $\rho : A \to \mathrm{End}_K(M) : a \to \rho(a)$ est un homomorphisme de K-algèbres. Ceci achève la démonstration.

Remarque. De même, on voit que donner M une structure de A-module à droite est équivalent à donner un anti-homomorphisme de K-algèbres de A dans $\mathrm{End}_K M$.

Soient M un A-module à gauche et I un idéal bilatère. On dit que M est annulé par I si $IM = 0$. C'est le cas si, et seulement si, I est contenu dans le noyau de la représentation de A sur ${}_K M$. En particulier, l'annulateur de M

$$\mathrm{ann}(M) = \{a \in A \,|\, ax = 0 \text{ pour tout } x \in M\}$$

est le noyau de la représentation de A sur M correspondante.

2.1.14. Proposition. Soit I un idéal de A.

(1) Si M est un A-module à gauche annulé par I, alors M est un A/I-module à gauche si l'on définit $(a + I)x = ax$, pour tous $x \in M$ et $a + I \in A/I$.

(2) Si N est un A/I-module, alors N est un A-module à gauche annulé par I si l'on définit $ay = (a + I)y$, pour tous $y \in N$, $a \in A$.

En somme, on peut identifier les A/I-modules à gauche comme les A-modules à gauche annulés par I.

Démonstration. Soit $\pi : A \to A/I$ la projection canonique.

(1) Soit $\rho : A \to M$ la représentation correspondante à la structure de A-module à gauche de M. Comme $I \subseteq \mathrm{Ker}(\rho)$, il existe un homomorphisme $\bar{\rho} : A/I \to M$ de K-algèbres tel que $\rho = \bar{\rho}\pi$. Or $\bar{\rho}$ donne à M une structure de A/I-module à gauche telle que $(a + I)x = ax$, pour tous $x \in M$ et $a + I \in A/I$.

(2) Soit $\sigma : A/I \to N$ la représentation correspondante à la structure de A/I-module à gauche de N. Alors $\delta = \sigma\pi : A \to N$ est une représentation de A sur N dont le noyau contient I. Donc δ donne à N une structure de A-module à gauche telle que $ay = (a + I)y$, pour tous $y \in N$ et $a \in A$. Ceci achève la démonstration.

2.2. Homomorphismes de modules

On se fixe K un anneau commutatif et A une K-algèbre.

2.2.1. Définition. Soient M, N des A-modules à droite. Une application $f : M \to N$ s'appelle *homomorphisme* de A-modules (ou *application A-linéaire*) si pour tous $x, y \in M$ et $a \in A$, on a $f(x + y) = f(x) + f(y)$ et $f(xa) = f(x)a$. Dans ce cas, $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ pour tous $\alpha \in K$, $x \in M$. Si, de surcroît, f est bijectif, alors il s'appelle un *isomorphisme*. Dans ce cas, f^{-1} est également un isomorphisme.

Un homomorphisme (respectivement, isomorphisme) de M dans M s'appelle *endomorphisme* (respectivement, *automorphisme*) de M.

Remarque. Soient M et N des A-modules à gauche qui corréspondent aux représentations $\rho : A \to M$ et $\delta : A \to N$ respectivement. Alors une application K-linéaire $f : M \to N$ est A-linéaire si et seulement si $f \circ \rho(a) = \delta(a) \circ f$ pour tout $a \in A$, si et seulement si $f \circ \rho(a_i) = \delta(a_i) \circ f$ pour tout $1 \leq i \leq r$ lorsque A admet une K-base $a_1, \ldots, a_r$.

2.2.2. Définition. Soit $f : M \to N$ un homomorphisme de A-modules.

(1) $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in M \mid f(x) = 0\}$ est un sous-module de M, appeleé le *noyau* de f.

(2) $\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in M\}$ est sous-module de N et $\mathrm{Coker}(f) = N/\mathrm{Im}(f)$ s'appelle le *co-noyau* de f.

Exemples. (1) Soit N un sous-module de M. Alors l'inclusion $i : N \hookrightarrow M : x \mapsto x$ et la projection canonique $p : M \to M/N : x \mapsto x + N$ sont des homomorphismes avec M/N le co-noyau de i et N le noyau de p.

(2) Il est évident que

$$A^{(n)} = \{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in A\}$$

est un A-module à droite. Soit M un A-module à droite. Si $x_1, \ldots, x_n \in M$, alors l'application,

$$(x_1 \cdots x_n)\bullet : A^{(n)} \to M : \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mapsto (x_1 \cdots x_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = x_1a_1 + \cdots + x_na_n,$$

la multiplication à gauche par la matrice $(x_1 \cdots x_n)$, est un homomorphisme. On voit qu'elle est surjective si et seulement si M est engendré par $x_1, \ldots, x_n$. En outre, son noyau est

$$P = \{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in A^{(n)} \mid x_1a_1 + \cdots + x_na_n = 0\}.$$

2.2.3. Proposition. Soit $f : M \to N$ un homomorphisme de A-modules. Alors

(1) f est injectif si, et seulement si, $\mathrm{Ker}(f) = 0$ si, et seulement si, pour tout homomorphisme de A-modules $g : L \to M$, $f \circ g = 0$ entraîne $g = 0$.

(2) f est surjectif si, et seulement si, $\mathrm{Coker}(f) = 0$ si, et seulement si, pour tout homomorphisme de A-modules $g : N \to L$, $g \circ f = 0$ entraîne $g = 0$.

Démonstration. (1) Supposons f est injectif. Si $g : L \to M$ tel que $f \circ g = 0$, alors $f(g(y)) = 0$ pour tout $y \in L$. Ainsi $g(y) \in \mathrm{Ker}(f)$. Ainsi $g(y) = 0$. Donc $g = 0$. Réciproquement, supposons que $f \circ g = 0$ entraîne $g = 0$ pour tout $g : L \to M$. Considérons l'inclusion $i : \mathrm{K}er(f) \hookrightarrow M : x \mapsto x$. On a $f \circ i = 0$. Donc $i = 0$ par hypothèse. En conséquence, $\mathrm{Ker}(f) = 0$. Donc f est injectif.

(2) Supposons f est surjectif. Soit $g : N \to L$ tel que $g \circ f = 0$, alors $g(N) = (gf)(M) = 0$. Ainsi $g = 0$. D'autre part, supposons que $g \circ f = 0$ entraîne $g = 0$ pour tout $g : N \to L$. Comme la projection canonique $p : N \to N/\mathrm{Im}(f)$ est telle que $pf = 0$, on a $p = 0$. Ainsi $N = \mathrm{Im}(f)$, c'est-à-dire, f est surjectif. Ceci achève la démonstration.

2.2.4. Théorème. Soit $f : M \to N$ un homomorphisme de A-modules. Soient L un sous-module de M tel que $L \subseteq \mathrm{Ker}(f)$ et $p : M \to M/L$ la projection canonique. Alors il existe un unique homomorphisme $\bar{f} : M/L \to N$ tel que $f = \bar{f}p$, $\mathrm{Im}(\bar{f}) = \mathrm{Im}(f)$, et $\mathrm{Ker}(\bar{f}) = \mathrm{Ker}(f)/L$. Par conséquent, $\bar{f}$ est surjectif si et seulement si f est surjectif, et $\bar{f}$ est injectif si et seulement si $L = \mathrm{Ker}(f)$.

2.2.5. Corollaire. Si $f : M \to N$ est un homomorphisme surjectif de A-modules, alors $N \cong M/\mathrm{Ker}(f)$.

2.2.6. Corollaire. Un A-module à droite M est cyclique si, et seulement si, il existe un idéal à droite I de A tel que $M \cong A/I$.

Démonstration. Si M est cyclique, alors $M = xA$ pour un $x \in M$. Évidemment $f : A \to M : a \mapsto xa$ est A-linéaire et surjective. Ainsi $I = \mathrm{Ker}(f)$ est un idéal à droite de A tel que $M \cong A/I$. D'autre part, si I un idéal à droite de A, alors $A/I =< 1_A + I > A$ est cyclique. Par conséquent, $M \cong A/I$ l'est aussi. Ceci achève la démonstration.

2.2.7. Théorème. Soit M un A-module et soient L, N des sous-modules de M.

(1) $N/N \cap L \cong N + L/L$.

(2) Si $L \subseteq N$, alors $(M/L)/(N/L) \cong M/N$.

Démonstration. (1) Évidemment $f : N \to N + L/L : x \mapsto x + L$ est A-linéaire. Pour tous $x \in N, y \in L$, on a $(x + y) + L = x + L = f(x)$ puisque $(x + y) - x \in L$. Donc f est surjective. Or $x \in N$ est tel que $f(x) = 0$ si et seulement si $x + L = 0 + L$, c'est-à-dire, $x \in L$. Ainsi $\mathrm{Ker}(f) = N \cap L$. Par conséquent, $N + L/L \cong N/N \cap L$.

(2) Soit $p : M \to M/N$ la projection canonique. Alors $\mathrm{Ker}(p) = N$. Si $L \subseteq N$, alors il existe un homomorphisme $\bar{p} : M/L \to M/N$ tel que $\mathrm{Ker}(\bar{p}) = N/L$. Ainsi $M/N \cong (M/L)/(N/L)$. Ceci achève la démonstration.

2.2.9. Proposition. Si M et N sont des A-modules isomorphes, alors $\operatorname{ann}(M) = \operatorname{ann}(N)$.

Démonstration. Soit $f : M \to N$ un isomorphisme. Si $a \in \operatorname{ann}(M)$, alors $Na = f(M)a = f(Ma) = 0$. Ainsi $\operatorname{ann}(M) \subseteq \operatorname{ann}(N)$. Comme $f^{-1} : N \to M$ est un isomorphisme, on a $\operatorname{ann}(N) \subseteq \operatorname{ann}(M)$. Ceci achève la démonstration.

2.2.10. Exemple. Soient K un corps et $\lambda \in K$ non nul avec $\lambda^n \neq 1$ pour tout $n > 0$. Soit A la K-algèbre admettant une K-base $\{1, x, y, z\}$ telle que

$$xy = z,\ yx = -\lambda z,\ x^2 = y^2 = z^2 = xz = zx = yz = zy = 0.$$

Posons $M_n = (x + \lambda^n y)A$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Alors les M_n sont deux à deux non isomorphes.

Démonstration. Comme $(x + \lambda^n y)(x + \lambda^{n+1} y) = -\lambda^{n+1} z + \lambda^{n+1} z = 0$ et

$$(x + \lambda^n y)x(x + \lambda^{n+1} y) = (x + \lambda^n y)y(x + \lambda^{n+1} y) = (x + \lambda^n y)z(x + \lambda^{n+1} y) = 0,$$

on voit que $M_n(x + \lambda^{n+1} y) = 0$, c'est-à-dire, $x + \lambda^{n+1} y \in \operatorname{ann}(M_n)$. Si $m \neq n$, alors

$$(x + \lambda^m y)(x + \lambda^{n+1} y) = -\lambda^{m+1} z + \lambda^{n+1} z = (\lambda^{n+1} - \lambda^{m+1})z \neq 0.$$

Ainsi $\operatorname{ann}(M_n) \neq \operatorname{ann}(M_j m$. Par conséquent, $M_n \not\cong M_m$ si $n \neq m$.

2.3. Suites exactes d'homomorphismes

On se fixe K un anneau commutatif et A une K-algèbre.

2.3.1. Définition. (1) Une suite

$$M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} M_2 \to \cdots \to M_{n-1} \xrightarrow{f_n} M_n$$

d'homomorphismes de A-modules avec $n \geq 2$ est dite *exacte* si $\operatorname{Ker}(f_{i+1}) = \operatorname{Im}(f_i)$ pour tout $1 \leq i < n$. En particulier, $f_{i+1}f_i = 0$, pour tout $1 \leq i < n$.

(2) Une suite exacte de la forme $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ s'appelle *suite exacte courte.*

Exemples. (1) Soit $f : M \to N$ une application A-linéaire. Alors

$$0 \to \operatorname{Ker}(f) \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{p} \operatorname{Coker}(f) \to 0$$

est exacte, où i est l'inclusion et p est la projection canonique.

(2) Si N est un sous-module de M, alors $0 \to M \xrightarrow{i} N \xrightarrow{p} N/M \to 0$ est une suite exacte courte, où i est l'inclusion et p est la projection canonique.

Remarques. Soit $f : M \to N$ un homomorphisme de A-modules.
(1) f est injective si et seulement si la suite $0 \to M \xrightarrow{f} N$ est exacte.
(2) f est surjective si et seulement si la suite $M \xrightarrow{f} N \to 0$ est exacte.
(3) f est bijective si et seulement si la suite $0 \to M \xrightarrow{f} N \to 0$ est exacte.

Exemple. Soit A l'algèbre définie dans l'exemple 2.2.10. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, posons $\phi_n : A \to A$ la multiplication à gauche par $x + \lambda^n y$. Alors

(1) Il existe une suite exacte

$$\cdots \to A \xrightarrow{\phi_n} A \to \cdots \to A \xrightarrow{\phi_1} A \xrightarrow{\varepsilon} M_0 \to 0,$$

où ε est la co-restriction de ϕ_0 sur M_0.

(2) Il existe une suite exacte

$$0 \to M_0 \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\phi_{-1}} A \to \cdots \to A \xrightarrow{\phi_{-n}} A \to \cdots,$$

où i est l'inclusion.

Démonstration. On se fixe $n \in \mathbb{Z}$. Alors $\mathrm{Im}(\phi_n) = M_n$. Comme $(x + \lambda^n y)(x + \lambda^{n+1} y) = 0$, on voit que $M_{n+1} \subseteq \mathrm{Ker}(\phi_n)$. Remarquons $\dim A = 4$ et $\dim(M_n) = 2$. Ainsi $\dim(\mathrm{Ker}(\phi_n)) = 2$. Comme $\dim(M_{n+1}) = 2$, on a $\mathrm{Im}(\phi_{n+1}) = M_{n+1} = \mathrm{Ker}(\phi_n)$. Ceci montre que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la suite

$$A \xrightarrow{\phi_{n+1}} A \xrightarrow{\phi_n} A$$

est exacte. De plus, comme $\mathrm{Ker}(\varepsilon) = \mathrm{Ker}(\phi_0)$ et $\mathrm{Im}(i) = \mathrm{Im}(\phi_0)$, les suites (1) et (2) sont exactes.

2.3.2. Proposition. Soit

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \\ & & & & v\downarrow & & w\downarrow \\ 0 & \longrightarrow & L' & \xrightarrow{f'} & M' & \xrightarrow{g'} & N' \end{array}$$

un diagramme commutatif à lignes exactes d'homomorphismes de A-modules. Alors il existe un unique homomorphisme $u : L \to L'$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \\ & & u\downarrow & & v\downarrow & & w\downarrow \\ 0 & \longrightarrow & L' & \xrightarrow{f'} & M' & \xrightarrow{g'} & N'. \end{array}$$

En outre, u est injectif si v l'est.

Démonstration. Par hypothèse, $w \circ g = g' \circ v$, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$, $\mathrm{Im}(f') = \mathrm{Ker}(g')$ et f, f' sont injectives.

Pour tout $x \in L$, comme $g'(v(f(x))) = w(g(f(x))) = w(0) = 0$, on a $v(f(x)) \in \text{Ker}(g') = \text{Im}(f')$. Comme f' est injectif, il existe un unique $x' \in L'$ tel que $f'(x') = v(f(x))$. Définissons $u : L \to L' : x \mapsto x'$, où x' est tel que $f'(x') = v(f(x))$. Il est trivial de vérifier que u est A-linéaire telle que $f' \circ u = v \circ f$. Si $u' : L \to L'$ est A-linéaire telle que $f' \circ u' = v \circ f = f' \circ u$, alors $f' \circ (u - u') = 0$. Par conséquent, $u' = u$ puisque f' est injective.

Enfin, si v est injective, alors $f' \circ u = v \circ f$ est injective. Ceci donne que u est injective. La preuve se termine.

On a le résultat dual comme suit.

2.3.3. Proposition. Soit

$$\begin{array}{ccccccc} L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \to & 0 \\ u\downarrow & & v\downarrow & & & & \\ L' & \xrightarrow{f'} & M' & \xrightarrow{g'} & N' & \to 0 & \end{array}$$

un diagramme commutatif à lignes exactes de homomorphismes de A-modules. Alors il existe un unique homomorphisme $w : N \to N'$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \to & 0 \\ u\downarrow & & v\downarrow & & w\downarrow & & \\ L' & \xrightarrow{f'} & M' & \xrightarrow{g'} & N' & \to & 0. \end{array}$$

En outre, w est surjectif si v l'est.

2.3.4. Corollaire. (1) Si $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ est une suite exacte, alors il existe un unique isomorphisme $j : L \to \text{Ker}(g)$ tel que $f = i \circ j$, où i est l'inclusion.

(2) Si $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ est une suite exacte, alors il existe un unique isomorphisme $k : N \to \text{Coker}(g)$ tel que $g = k \circ p$, où p est la projection canonique.

(3) Si $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ est une suite exacte courte, alors $L \cong \text{Ker}(g)$ et $N \cong \text{Coker}(f)$.

Démonstration. Il suffit de montrer (1). Considérons les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \\ & & & & 1\!\!1\downarrow & & 1\!\!1\downarrow \\ 0 & \to & \text{Ker}g & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{g} & N, \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} 0 & \to & \text{Ker}g & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{g} & N \\ & & & & 1\!\!1\downarrow & & 1\!\!1\downarrow \\ 0 & \to & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N. \end{array}$$

D'après la proposition 2.3.2, il existe des homomorphismes $j : L \to \text{Ker}(g)$ et $j' : \text{Ker}(g) \to L$ tels que $1\!\!1_M \circ f = i \circ j$ et $1\!\!1_M \circ i = f \circ j'$. Alors $f(j'j) = f 1\!\!1_M$ et $i(jj') = i 1\!\!1_M$. Ainsi $jj' = 1\!\!1_M$ et $j' \circ j = 1\!\!1_M$ puisque f, i sont injectifs. Ceci achève la démonstration.

Le résultat suivant est très important.

2.3.5. Lemme du Serpent. Soit

$$\begin{array}{ccccccc} & & M_1 & \xrightarrow{f_1} & M_2 & \xrightarrow{f_2} & M_3 & \rightarrow & 0 \\ & & h_1\downarrow & & h_2\downarrow & & h_3\downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & N_1 & \xrightarrow{g_1} & N_2 & \xrightarrow{g_2} & N_3 & & \end{array}$$

un diagramme commutatif à lignes exactes d'homomorphismes de A-modules. Alors il existe une suite exacte comme suit:

$$\mathrm{Ker}h_1 \xrightarrow{f_1'} \mathrm{Ker}h_2 \xrightarrow{f_2'} \mathrm{Ker}h_3 \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}h_1 \xrightarrow{g_1'} \mathrm{Coker}h_2 \xrightarrow{g_2'} \mathrm{Coker}h_3.$$

En outre, f_1' est injectif si f_1 l'est; et g_2' est surjectif si g_2 l'est.

Démonstration. Considérons les inclusions $i_j : \mathrm{Ker}h_j \rightarrow M_j$ et les projections $p_j : N_j \rightarrow \mathrm{Coker}h_j, j = 1, 2, 3$. D'après les propositions 2.3.2 et 2.3.3, il existe des homomorphismes $f_j' : \mathrm{Ker}h_j \rightarrow \mathrm{Ker}h_{j+1}$ et $g_j' : \mathrm{Coker}h_j \rightarrow \mathrm{Coker}h_{j+1}$ tels que $f_j \circ i_j = i_{j+1} \circ f_j'$ et $g_j' \circ p_j = p_{j+1} \circ g_j,\ j = 1, 2$. En outre, f_1' est injectif si f_1 l'est; et g_2' est surjectif si g_2 l'est. Considérons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Ker}h_1 & \xrightarrow{f_1'} & \mathrm{Ker}h_2 & \xrightarrow{f_2'} & \mathrm{Ker}h_3 \\ i_1\downarrow & & i_2\downarrow & & i_3\downarrow \\ M_1 & \xrightarrow{f_1} & M_2 & \xrightarrow{f_2} & M_3 \\ h_1\downarrow & & h_2\downarrow & & h_3\downarrow \\ N_1 & \xrightarrow{g_1} & N_2 & \xrightarrow{g_2} & N_3 \\ p_1\downarrow & & p_2\downarrow & & p_3\downarrow \\ \mathrm{Coker}h_1 & \xrightarrow{g_1'} & \mathrm{Coker}h_2 & \xrightarrow{g_2'} & \mathrm{Coker}h_3. \end{array}$$

(1) *La première ligne est exacte.* Comme $i_3 f_2' f_1' = f_2 i_2 f_1' = f_2 f_1 i_1 = 0$, on a $f_2' f_1' = 0$ car i_3 est injectif. Donc $\mathrm{Im}f_1' \subseteq \mathrm{Ker}f_2'$. Si $x_2 \in \mathrm{Ker}f_2'$, alors $f_2(i_2(x_2)) = i_3(f_2'(x_2)) = 0$. Donc il existe $y_1 \in M_1$ tel que $f_1(y_1) = i_2(x_2)$. Comme $g_1(h_1(y_1)) = h_2(f_1(y_1)) = h_2(i_2(x_2)) = 0$, on a $h_1(y_1) = 0$ car g_1 est injectif. Donc il existe $x_1 \in\mathrm{Ker}h_1$ tel que $y_1 = i_1(x_1)$. Maintenant, comme $i_2(f_1'(x_1)) = f_1(i_1(x_1)) = f_1(y_1) = i_2(x_2)$, on a $x_2 = f_1'(x_1)$ car i_2 est injectif. Donc $\mathrm{Im}f_1' = \mathrm{Ker}f_2'$. De même, *la dernière ligne est exacte.*

(2) On va définir δ. Si $x_3 \in \mathrm{Ker}h_3$, alors $i_3(x_3) \in M_3$. Ainsi il existe $y_2 \in M_2$ tel que $f_2(y_2) = i_3(x_3)$. Comme $g_2(h_2(y_2)) = h_3(f_2(x_2)) = h_3(i_3(x_3)) = 0$, il existe $z_1 \in N_1$ tel que $g_1(z_1) = h_2(y_2)$. Ceci donne $z_1 + \mathrm{Im}h_1 \in \mathrm{Coker}(h_1)$. Si $y_2' \in M_2$ tel que $f_2(y_2') = i_3(x_3)$ et $z_1' \in N_1$ tel que $g_1(z_1') = h_2(y_2')$, alors $f_2(y_2 - y_2') = 0$. Donc il existe $x_1 \in M_1$ tel que $y_2 - y_2' = f_1(x_1)$. Comme $g_1(z_1 - z_1') = h_2(y_2 - y_2') = h_2(f_1(x_1)) = g_1(h_3(x_1))$, on a $z_1 - z_1' = h_3(x_1)$ car g_1 est injectif. Donc $z_1 + \mathrm{Im}h_1 = z_1' + \mathrm{Im}h_1$. Ceci montre que

$z_1 + \mathrm{Im}h_1$ est uniquement déterminé par x_3. Écrivons $y_2 = f_2^{-1}(i_3(x_3))$ et $z_1 = g_1^{-1}h_2(y_2)$. On a $z_1 + \mathrm{Im}h_1 = p_1 g_1^{-1}h_2 f_2^{-1}(i_3(x_3))$. Définissons maintenant

$$\delta : \ \mathrm{Ker}h_3 \to \ \mathrm{Coker}h_1 : x_3 \mapsto p_1 g_1^{-1} h_2 f_2^{-1} i_3(x_3).$$

Soient $x_3, x_3' \in \mathrm{Ker}h_3$ et $a, a' \in A$. Supposons $y_2, y_2' \in M_2,\ z_1, z_1' \in N_1$ tel que $f_2(y_2) = i_3(x_3), f_2(y_2') = i_3(x_3')$ et $g_1(z_1) = h_2(y_2), g_1(z_1') = h_2(y_2')$. Alors $f_2(y_2a + y_2'a') = i_3(x_3a + x_3'a')$ et $g_1(z_1a + z_1'a') = h_2(y_2a + y_2'a')$. Donc $\delta(x_3a + x_3'a') = (z_1a + z_1'a') + \mathrm{Im}h_1 = \delta(x_3)a + \delta(x_3')a'$. Ceci montre que δ est A-linéaire.

Pour tout $x_2 \in \mathrm{Ker}h_2$, on a $f_2((i_2(x_2)) = i_3(f_2'(x_2))$ et $g_1(0) = h_2(i_2(x_2))$. Ainsi $\delta(f_2'(x_2)) = 0 + \mathrm{Im}h_1$. Cela veut dire que $\mathrm{Im}f_2' \subseteq \mathrm{Ker}\delta$.

Enfin, soit $x_3 \in \mathrm{Ker}\delta$. Si $y_2 \in M_2,\ z_1 \in N_1$ tel que $f_2(y_2) = i_3(x_3)$ et $g_1(z_1) = h_2(y_2)$, alors $z_1 \in\mathrm{Im}h_1$. Soit $y_1 \in M_1$ tel que $z_1 = h_1(y_1)$. Or $h_2(y_2) = g_1(z_1) = g_1h_1(y_1) = h_2(f_1(y_1))$. Donc $y_2 - f_1(y_1) \in \mathrm{Ker}(h_2)$. Or $f_2'(y_2 - f_1(y_1)) = f_2(y_2 - f_1(y_1)) = f_2(y_2) = x_3$. Ceci montre que $\mathrm{Im}f_2' = \mathrm{Ker}\delta$. De même $\mathrm{Ker}g_1' = \mathrm{Im}\delta$. La preuve se termine.

Remarque. La méthode dans la démonstration ci-dessus s'appelle *la chasse de diagramme.*

2.3.6. Lemme des cinq. Soit

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \xrightarrow{f_1} & M_2 & \xrightarrow{f_2} & M_3 & \xrightarrow{f_3} & M_4 & \xrightarrow{f_4} & M_5 \\ h_1\downarrow & & h_2\downarrow & & h_3\downarrow & & h_4\downarrow & & h_5\downarrow \\ N_1 & \xrightarrow{g_1} & N_2 & \xrightarrow{g_2} & N_3 & \xrightarrow{g_3} & N_4 & \xrightarrow{g_4} & N_5 \end{array}$$

un diagramme commutatif à lignes exactes d'homomorphismes de A-modules.

(1) Supposons que h_5 est injectif. Si h_2, h_4 sont surjectifs, alors h_3 l'est.

(2) Supposons que h_1 est surjectif. Si h_2, h_4 sont injectifs, alors h_3 l'est.

(3) Supposons que h_1 est surjectif et h_5 est injectif. Si h_2, h_4 sont bijectifs, alors h_3 l'est.

Démonstration. (1) Supposons que h_2, h_4 sont surjectifs. Alors pour tout $y_3 \in N_3$, comme h_4 est surjectif, il existe $x_4 \in M_4$ tel que $h_4(x_4) = g_3(y_3)$. Or $h_5(f_4(x_4)) = g_4(h_4(x_4)) = g_4(g_3(x_3)) = 0$ implique $f_4(x_4) = 0$ puisque h_5 est injectif. Ainsi il existe $x_3 \in M_3$ tel que $f_3(x_3) = x_4$. Maintenant $g_3(h_3(x_3)) = h_4(f_3(x_3)) = h_4(x_4) = g_3(y_3)$, donc $g_3(y_3 - h_3(x_3)) = 0$. D'où, $y_3 - h_3(x_3) = g_2(y_2)$ avec $y_2 \in N_2$. Comme h_2 est surjectif, $y_2 = h_2(x_2)$ avec $x_2 \in M_2$. Or $h_3(f_2(x_2)) = g_2(h_2(x_2)) = g_2(y_2) = y_3 - h_3(x_3)$. Ceci donne $y_3 = h_3(x_3 + f_2(x_2))$. Donc h_3 est surjectif. La preuve se termine.

2.3.7. Corollaire. Soit

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & M_1 & \xrightarrow{f_1} & M_2 & \xrightarrow{f_2} & M_3 & \to & 0 \\ & & h_1\downarrow & & h_2\downarrow & & h_3\downarrow & & \\ 0 & \to & N_1 & \xrightarrow{g_1} & N_2 & \xrightarrow{g_2} & N_3 & \to & 0 \end{array}$$

un diagramme commutatif à lignes exactes de homomorphismes de A-modules. Si h_1, h_3 sont surjectifs (ou injectifs, bijectifs, respectivement), alors h_2 l'est.

2.4. Modules d'homomorphismes

On se fixe K un anneau commutatif et A, B, C des K-algèbres.

2.4.1. Définition. Un B-A-bimodule est un K-module M qui est à la fois un B-module à gauche et un A-module à droite tel que $b(xa) = (bx)a$, pour tous $b \in B, x \in M, a \in A$.

Exemples. (1) A est un A-A-bimodule.

(2) Un A-module à droite M est un K-A-bimodule; et un A-module à gauche M est un A-K-bimodule.

2.4.2. Lemme. Soient M, N des A-modules à droite. Alors

$$\mathrm{Hom}_A(M, N) = \{f : M \to N \mid f \text{ est } A-\text{linéaire}\}$$

est un K-module si, pour $f, g \in \mathrm{Hom}_A(M, N),\ \alpha \in K$, on définit

$$f + g : M \to N : x \mapsto f(x) + g(x); \qquad \alpha f : M \to N : x \mapsto \alpha f(x).$$

Remarque. En général, $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ n'est A-module ni à droite ni à gauche.

2.4.3. Théorème. (1) Soient $M =_A M_B$ un A-B-bimodule et $N =_C N_A$ un A-C-bimodule. Alors $\mathrm{Hom}_A(M_B,\ N_C)$ est un B-C-bimodule si pour tous $c \in C, b \in B$, et $f \in \mathrm{Hom}_A(M,\ N)$, on définit

$$bf : M \to N : x \mapsto f(xb) \text{ et } fc : M \to N : x \mapsto f(x)c.$$

(2) Soient M un B-A-bimodule et N un C-A-bimodule. Alors $\mathrm{Hom}_A(M,\ N)$ est un C-B-bimodule si, pour tous $c \in C, b \in B, f \in \mathrm{Hom}_A(M_A,\ N_A)$, on définit

$$cf : M \to N : x \mapsto cf(x) \text{ et } fb : M \to N : x \mapsto f(bx).$$

Démonstration. (1) D'abord, $\mathrm{Hom}_A(M,\ N)$ est un K-module. Pour touts $a_1, a_2 \in A$, $b \in B$ et $x \in M$, on a

$$(bf)(a_1x_1 + a_2x_2) = f((a_1x_1 + a_2x_2)b) = f(a_1(x_1b) + a_2(x_2b)) = a_1(bf)(x_1) + a_2(bf)(x_2).$$

Ainsi $bf \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$. Pour tous $b_1, b_2 \in B$ et $x \in M$, on a

$$(b_1(b_2f))(x) = f((xb_1)b_2) = f(x(b_1b_2)) = ((b_1b_2)f)(x).$$

Donc $(b_1(b_2f) = (b_1b_2)f$. Par conséquent, $\mathrm{Hom}_A(M,\ N)$ est un B-module à gauche. De même, il est un C-module à droite. Enfin, comme

$$((bf)c)(x) = ((bf)(x))c = f(xb)c = (fc)(xb) = (b(fc))(x),$$

on a $(bf)c = b(fc)$. Il s'agit d'un B-C-bimodule. Ceci achève la démonstration.

2.4.4. Corollaire. (1) Soit M un B-A-bimodule. Si N est un A-module à droite, alors $\mathrm{Hom}_A(M,\ N)$ est un B-module à droite. Si L est un B-module à gauche, alors $\mathrm{Hom}_B(M,\ L)$ est un A-module à gauche.

(2) Si M, N sont des A-modules à gauche ou à droite, alors $\mathrm{Hom}_K(M, N)$ est un A-A-bimodule.

(3) Si M est un A-module à droite (respectivement, à gauche), alors $\mathrm{Hom}_K(M, K)$ est un A-module à gauche (respectivement, à droite).

2.4.5. Proposition. Soit M un A-module 'a droite (respectivement, à gauche). Alors $\mathrm{Hom}_A(A,\ M) \cong M$ en tant que A-modules à droite (respectivement, à gauche).

Démonstration. D'abord, $\mathrm{Hom}_A(A,\ M)$ est un A-module à droite. Définissons

$$\phi : \mathrm{Hom}_A(A, M) \to M : f \mapsto f(1).$$

Pour $f, g \in \mathrm{Hom}_A(A, M)$, $a, a' \in A$, on a

$$(fa + ga')(1) = (fa)(1) + (ga')(1) = f(a1) + g(a'1) = f(1)a + g(1)a'.$$

Donc ϕ est A-linéaire. Si $\phi(f) = \phi(g)$, alors $f(1) = g(1)$. Ainsi $f = g$ comme f, g sont A-linéaires. Donc ϕ est injectif. Enfin, pour tout $x \in M$, l'application $f_x : A \to M : a \mapsto xa$ est A-linéaire tel que $f_x(1) = x1 = x$. Donc ϕ est surjectif. Ceci achève la démonstration.

Remarquons que $\mathrm{End}_A(A_A)$ est à la fois un A-A-bimodule et une K-algèbre.

2.4.6. Théorème. (1) $\mathrm{End}(A_A) \cong A$ en tant que A-A-bimodules et en tant que K-algèbres.

(2) $\mathrm{End}({}_AA)$ est anti-isomorphe à A en tant que K-algèbres.

Démonstration. Il suffit de montrer (1). D'après la proposition 2.4.5, l'application

$$\phi : \mathrm{End}_A(A_A) \to A : f \mapsto f(1)$$

est un isomorphisme de A-A-bimodules. En outre, $\phi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}(1) = 1$ et

$$\phi(fg) = (fg)(1) = f(g(1)) = f(1 \cdot g(1)) = f(1)g(1) = \phi(f)\phi(g).$$

Donc ϕ est un isomorphisme de K-algèbres. Ceci achève la démonstration.

Chapitre III: Catégories de modules

3.1. Catégories et foncteurs

3.1.1. Définition. Une catégorie $\mathcal{C}$ est constituée de

(1) une classe Obj$\mathcal{C}$ d'objets,

(2) un ensemble $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ de morphismes pour chaque couple (X,Y) d'objets, tel que $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y) \cap \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X',Y') = \emptyset$ si $(X,Y) \neq (X',Y')$.

(3) une composition de morphismes

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Z) : (f,g) \mapsto gf$$

satisfaisant aux axiomes suivants:

(i) Pour tous $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y),\ g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y,Z),\ h \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Z,W)$, on a $(hg)f = h(gf)$.

(ii) Pour tout $X \in \mathrm{Obj}\mathcal{C}$, il existe un *morphisme identité* $\mathbb{1}_X \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,X)$ tel que pour tous $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Z,X),\ g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, on a $\mathbb{1}_X f = f$ et $g\mathbb{1}_X = g$.

En outre, si $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, on dit alors que f est un morphisme de X vers Y et noté $f : X \to Y$.

Un morphisme $f : X \to Y$ s'appelle *isomorphisme* si'il existe morphisme $g : Y \to X$ tel que $gf = \mathbb{1}_Y$ et $fg = \mathbb{1}_X$. Dans ce cas, on dit que X et Y sont *isomorphes* et on le note $X \cong_{\mathcal{C}} Y$.

On dit que la catégorie $\mathcal{C}$ est *concrète* si les objets sont des ensembles et les morphismes sont des applications et la composition de morphismes est la composition des applications.

Exemples. (1) La catégorie **Ens** admet pour objets les ensembles, pour morphismes les applications, pour la composition des morphismes la composition des applications. Ici les isomorphismes sont les bijections. Donc deux ensembles sont isomorphes dans **Ens** si, et seulement si, ils ont le même cardinal. Il s'agit d'une catégorie concrète.

(2) Soit K anneau commutatif. La catégorie $\mathbf{Alg}(K)$ est la catégorie concrète dont les objets sont les K-algèbres et les morphismes sont les homomorphismes de K-algèbres.

(3) Soit A une K-algèbre. La catégorie Mod-A (A-Mod, respectivement) est la catégorie concrète ayant pour objets les A-modules à droite (à gauche, respectivement), pour morphismes les applications A-linéaires.

(4) Soit $(S,\leq)$ un ensemble partiellement ordonné. Alors S devient une catégorie si l'on prend les éléments de S comme les objets, et on définit les morphismes par

$$\mathrm{Mor}_S(a,b) = \begin{cases} \rho_b^a, & \text{si } a \leq b \\ \emptyset, & \text{sinon,} \end{cases}$$

et la composition par $\rho_b^a \rho_c^b = \rho_c^a$. Ici $\mathbb{1}_a = \rho_a^a$, et $a \cong_S b$ si et seulement si, $a = b$. Il s'agit d'une catégorie non concrète.

(5) Un carquois Q est une catégorie dont les objets sont les sommets et les morphismes sont les chemins et la composition des morphismes est la concaténation des chemins. Il s'agit d'une catégorie non concrète.

Dès maintenant on se fixe $\mathcal{C}$ une catégorie. Pour tous objets X, Y de $\mathcal{C}$, on note $\mathcal{C}(X, Y) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

3.1.2. Définition. Une catégorie $\mathcal{D}$ est dite *sous-catégorie* de $\mathcal{C}$ si

(1) $\mathrm{Obj}\,\mathcal{D} \subseteq \mathrm{Obj}\,\mathcal{C}$.

(2) Pour tous objets X, Y de $\mathcal{D}$, on a $\mathcal{D}(X, Y) \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$ et $\mathbb{1}_X \in \mathcal{D}(X, X)$.

(3) La composition des morphismes de $\mathcal{D}$ est induite de celle des morphismes de $\mathcal{C}$.

En outre, $\mathcal{D}$ est dite *pleine* dans $\mathcal{C}$ si $\mathcal{D}(X, Y) = \mathcal{C}(X, Y)$ pour tous objets X, Y de $\mathcal{D}$.

Exemples. (1) Soient K un corps et A une K-algèbre de dimension finie. La catégorie mod-A (respectivement, A-mod) est la catégorie concrète dont les objets sont les A-module à droite (respectivement, à gauche) de dimension finie et les morphismes sont les applications A-linéaires. On voit aisément que mod-A (respectivement, A-mod) est une sous-catégorie pleine de Mod-A (respectivement, A-Mod).

(2) Soit I un idéal bilatère de A. Soit $\mathrm{Mod}_I A$ la catégorie concrète dont les objets sont les A-modules à droite annulés par I et les morphismes sont les applications A-linéaires. Alors $\mathrm{Mod}_I A$ est une sous-catégorie pleine de Mod-A.

3.1.3. Définition. Un morphisme $f : X \to Y$ de $\mathcal{C}$ s'appelle *monomorphisme* si pour tous morphismes distincts $g, h : Z \to X$, on a $fg \neq fh$; et un *épimorphisme*) si pour tous morphismes distincts $g, h : Y \to Z$, on a $gf \neq hf$.

Exemples. (1) Dans la catégorie Mod-A, un morphisme est un monomorphisme (respectivement, épimorphisme, isomorphisme) si, et seulement si, il est injectif (respectivement, surjectif, bijectif).

(2) Soit Q un carquois. Si on considère Q comme une catégorie, alors tout morphisme est un monomorphisme ainsi qu'un épimorphsime, mais les isomorphismes sont les chemins de longueurs zéro.

3.1.4. Proposition. Un isomorphisme d'une catégorie est un monomorphisme ainsi qu'un épimorphisme.

Démonstration. Soient $f : X \to Y, f' : Y \to X$ tels que $ff' = \mathbb{1}_Y, f'f = \mathbb{1}_X$. Si $fg = fh$, alors $f'fg = f'fh$, et donc $g = h$. Ainsi f est un monomorphisme. De même, f est un épimorphisme.

3.1.5. Proposition. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie concrète.

(1) Tout morphisme injectif (respectivement, surjectif) de $\mathcal{C}$ est un monomorphisme (respectivement, épimorphisme).

(2) Tout isomorphisme est bijectif.

Démonstration. (1) Supposons que f est injectif. Si $g, h : U \to X$ tel que $fg = fh$, alors pour tout $x \in U, f(g(x)) = f(h(x))$. Comme f est injectif, on a $g(x) = h(x)$ pour tout $x \in U$. Donc f est un monomorphisme.

(2) Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ tels que $fg = \mathbb{1}_Y, gf = \mathbb{1}_X$. Comme f et g sont des applications, on voit que f est bijectif.

Exemples. (1) Soit $\mathcal{D}$ la sous-catégorie pleine de Mod- $\mathbb{Z}$ des $\mathbb{Z}$-modules divisibles M, c'est-à-dire, $nM = M$ pour tout $n \neq 0$. Alors

$$p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} : x \mapsto x + \mathbb{Z}$$

est un morphisme de $\mathcal{D}$, qui est un épimorphisme car il est surjectif. Soient $f, g : M \to \mathbb{Q}$ des morphismes de $\mathcal{D}$ tels que $pf = pg$. On se fixe un $x \in M$. Alors $f(x) - g(x) \in \mathbb{Z}$. Soit n un entier non nul quelconque. Comme M est divisible, $x = ny$ pour un $y \in M$. Or $f(x) - g(x) = n(f(y) - g(y))$ avec $f(y) - g(y) \in \mathbb{Z}$. Donc $f(x) - g(x)$ divisible par tout $n \neq 0$. Ainsi $f(x) - g(x) = 0$. Par conséquent, $f = g$. Ceci montre que p est un monomorphisme, même si p est non injectif. De plus, étant non bijectif, p n'est pas un isomorphisme même s'il est un monomorphisme et un épimorphisme.

(2) Le morphisme

$$j : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} : n \mapsto n$$

de la catégorie **Alg**($\mathbb{Z}$) est un épimorphsime même s'il est non surjectif. En effet, si $f, g : \mathbb{Q} \to B$ des morphismes de **Alg**($\mathbb{Z}$) tels que $fj = gj$. Alors $f(n) = g(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Pour tout $m \neq 0$, on a $1 = f(m)f(\frac{1}{m}) = f(\frac{1}{m})f(m)$. Ainsi $f(m)$ est inversible dans B. Comme $1 = g(m)g(\frac{1}{m})$ et $(m) = g(m)$, on voit que $f(\frac{1}{m}) = g(\frac{1}{m})$. Par conséquent, $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$.

(3) Considérons deux lettres a, b. Soit $\mathcal{C}$ la sous-catégorie de la catégorie **Ens** dont les objets sont les ensembles $\{a\}$ et $\{b\}$ tels que $\mathcal{C}(\{b\}, \{a\}) = \emptyset$ et $\mathcal{C}(\{x\}, \{y\}) = \mathbf{Ens}(\{x\}, \{y\})$ pour tous $x, y \in \{a, b\}$ avec $(x, y) \neq (b, a)$. Alors l'application de $\{a\}$ vers $\{b\}$ est bijectif, mais elle n'est pas un isomorphisme de $\mathcal{C}$.

3.1.6. Définition. Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ des catégories. Un *foncteur covariant* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est constitué de fonctions

(1) $F : \operatorname{Obj} \mathcal{C} \to \operatorname{Obj} \mathcal{D} : X \mapsto F(X)$

(2) $F : \mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{D}(F(X), F(Y)) : f \mapsto F(f)$

telles que

(i) Pour tous $f \in \mathcal{C}(X,Y),\ g \in \mathcal{C}(Y,Z),\ F(gf) = F(g)F(f)$.

(ii) Pour tout $X \in \operatorname{Obj}\mathcal{C},\ F(\mathbb{1}_X) = \mathbb{1}_{F(X)}$.

En outre, F est dit *plein* ou *fidèle* si l'application $F : \mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{D}(F(X),F(Y))$ est surjective ou injective, respectivement, pour tous objets X, Y de $\mathcal{C}$, ; et *dense* si pour tout objet Y de $\mathcal{D}$, il existe un objet X de $\mathcal{C}$ tel que $Y \cong_{\mathcal{D}} F(X)$.

Exemples. (1) Le foncteur identité $\mathbb{1}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C} : X \mapsto X; f \mapsto f$ est un foncteur covariant qui est plein, fidèle et dense.

(2) Soit X un objet de $\mathcal{C}$. Si $f : Y \to Z$ est un morphisme de $\mathcal{C}$, alors on a une application $\mathcal{C}(X,f) : \mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{C}(X,Z) : g \mapsto fg$. Or $\mathcal{C}(X,-) : \mathcal{C} \to \text{Ens} : Y \mapsto \mathcal{C}(X,Y); f \mapsto \mathcal{C}(X,f)$ est un foncteur covariant.

(3) Soit A une K-algèbre.

(i) Si $M = (M,+,\cdot,*)$ $\in$Mod-A, alors $(M,+,\cdot)$ $\in$Mod-K. Or U : Mod-$A \to$ Mod-K : $(M,+,\cdot,*) \mapsto (M,+,\cdot); f \mapsto f$ est un foncteur covariant, applé *foncteur oubli.* Aisément U est fidèle, mais ni dense ni plein.

(ii) Soit I un idéal de A. Si M $\in$Mod-(A/I), alors M est un A-module annulé par I. Or F : Mod-$(A/I) \to$ Mod-A : $M \mapsto M; f \mapsto f$ est un foncteur covariant fidèle et plein. Remarquons que si $I \neq 0$, alors $A_A \ncong F(M)$, pour tout $M \in$ Mod-A/I. Ainsi F est non dense dans ce cas.

3.1.7. Définition. Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ des catégories. Un *foncteur contravariant* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est constitué de fonctions

(1) $F : \operatorname{Obj}\mathcal{C} \to \operatorname{Obj}\mathcal{D} : X \mapsto F(X)$

(2) $F : \mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{D}(F(Y),F(X)) : f \mapsto F(f)$

telles que

(i) Pour tous $f \in \mathcal{C}(X,Y),\ g \in \mathcal{C}(Y,Z),\ F(gf) = F(f)F(g)$.

(ii) Pour tout objet X de $\mathcal{C},\ F(\mathbb{1}_X) = \mathbb{1}_{F(X)}$.

En outre, on définit pour un foncteur contravariant soit *plein*, *fidèle* ou *dense* de la même façon que pour un foncteur covariant.

Exemples. (1) Soit X un objet de $\mathcal{C}$. Si $f : Y \to Z$ est un morphisme de $\mathcal{C}$, alors on a une application $\mathcal{C}(f,X) : \mathcal{C}(Z,X) \to \mathcal{C}(Y,X) : g \mapsto gf$. Or

$$\mathcal{C}(-,X) : \mathcal{C} \to \textbf{Ens} : Y \mapsto \mathcal{C}(Y,X); f \mapsto \mathcal{C}(f,X)$$

est un foncteur contravariant.

(2) Soit A une K-algèbre. Alors

$$\operatorname{Hom}_A(-,K) : \text{Mod-}A \to A\text{-Mod} : M \mapsto \operatorname{Hom}_K(M,K); f \mapsto \operatorname{Hom}_K(f,K)$$

est un foncteur contravariant.

3.1.8. Lemme. Soient $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ des foncteurs covariants ou contravariants de catégories.

(1) Si $X \cong_{\mathcal{C}} Y$, alors $F(X) \cong_{\mathcal{D}} F(Y)$.

(2) Le composée

$$G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{E} : X \mapsto G(F(X)); f \mapsto G(F(f))$$

est un foncteur qui est covariant si F et G sont tous covariants ou tous contravariants; et contravariant sinon. En outre, $G \circ F$ est plein, fidèle ou dense si F et G le sont tous.

3.1.9. Définition. Un foncteur covariant (respectivement, contravariant) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ de catégories s'appelle *isomorphisme* (respectivement, *anti-isomorphisme*) s'il existe un foncteur covariant (respectivement, contravariant) $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tels que $G \circ F = \mathbb{1}_{\mathcal{C}}$ et $F \circ G = \mathbb{1}_{\mathcal{D}}$. Dans ce cas, on dit que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont *isomorphes* (respectivement, *anti-isomorphes*).

Exemples. (1) Le foncteur identité $\mathbb{1}_{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$ est un isomorphisme.

(2) Soit I un idéal bilatère de A. Alors Mod-(A/I) est isomorphe à la sous-catégorie pleine de Mod-A dont les objets sont les modules annulés par I.

3.1.10. Définition. (1) Soient $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ des foncteurs tous covariants (respectivement, contravariants). Une transformation naturelle $\phi : F \to G$ est constitué d'une famille $\{\phi_X : F(X) \to G(X) \,|\, X \in \operatorname{Obj}\mathcal{C}\}$ de morphismes de $\mathcal{D}$ telle que pour tout morphisme $f : X \to Y$ de $\mathcal{C}$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \phi_X \downarrow & & \phi_Y \downarrow \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) \end{array} \;, \quad \text{respectivement,} \quad \begin{array}{ccc} F(Y) & \xrightarrow{F(f)} & F(X) \\ \phi_Y \downarrow & & \phi_X \downarrow \\ G(Y) & \xrightarrow{G(f)} & G(X) \end{array}$$

est commutatif. Dans ce cas, on dit aussi que les morphismes $\phi_X : F(X) \to G(X)$ sont *fonctoriels* pour X.

Exemples. (1) Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur covariant ou contravariant. Alors la transformation naturelle identité $\mathbb{1}_F : \; F \to F$ est définie par $(\mathbb{1}_F)_X = \mathbb{1}_{F(X)}$, pour tout $X \in \mathcal{C}$.

(2) Soit A une K-algèbre. Considérons le foncteur identité $\mathbb{1}_{\text{Mod}-A}$ et le foncteur

$$\operatorname{Hom}_A(A, -) : \text{ Mod}-A \to \text{ Mod}-A : M \mapsto \operatorname{Hom}_A(A, M); f \mapsto \operatorname{Hom}_A(A, f).$$

Pour tout $M \in \text{Mod-}A$, l'application $\phi_M : \text{Hom}_A(A, M) \to M : f \mapsto f(1)$ est un morphisme dans Mod-A. On prétend que $\phi = (\phi_M \mid M \in \text{Mod}-A)$ est une transformation naturelle de $\text{Hom}_A(A, -)$ vers $\mathbb{1}_{\text{Mod}-A}$. En effet, soit $f : M \to N \in$Mod-A. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_A(A, M) & \xrightarrow{\text{Hom}(A,f)} & \text{Hom}_A(A, M) \\ \phi_M \downarrow & & \phi_N \downarrow \\ M & \xrightarrow{f} & N. \end{array}$$

Pour tout $g \in \text{Hom}(A, M)$, $(\phi_N \circ \text{Hom}(A, f))(g) = \phi_N(fg) = (fg)(1)$ et $(f \circ \phi_M)(g) = f(\phi_M(g)) = f(g(1)) = (fg)(1)$. Donc $f \circ \phi_M = \phi_N \circ \text{Hom}(A, f)$. Ceci montre l'énoncé.

Remarque. Soient $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ des foncteurs tous covariants ou tous contravariants. Si $\phi : F \to G$ et $\psi : G \to H$ sont des transformations naturelles, alors $\psi \circ \phi = \{\psi_X \circ \phi_X \mid X \in \mathcal{C}\}$ est une transformation naturelle de F vers H.

3.1.11. Définition. (1) Soient $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ des foncteurs tous covariants ou tous contravariants. Une transformation naturelle $\phi : F \to G$ s'appelle *isomorphisme naturel* si $\phi_X : F(X) \to G(X)$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}$ pour tout $X \in \mathcal{C}$. Dans ce cas, $\phi^{-1} = (\phi_X^{-1} \mid X \in \mathcal{C})$ est une transformation naturelle telle que $\phi \circ \phi^{-1} = \mathbb{1}_{\mathcal{D}}$ et $\phi^{-1} \circ \phi = \mathbb{1}_{\mathcal{C}}$. On note $F \cong G$.

Exemple. Soit A une K-algèbre. Alors $\text{Hom}(A, -) \cong \mathbb{1}_{\text{Mod}-A}$.

3.1.12. Définition. Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ des catégories. Un foncteur covariant (respectivement, contravariant) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ s'appelle *équivalence* (respectivement, *anti-équivalence*) s'il existe un foncteur covariant (respectivement, contravariant) $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, appelé *quasi-inverse* de F, tel que $F \circ G \cong \mathbb{1}_{\mathcal{D}}$ et $G \circ F \cong \mathbb{1}_{\mathcal{C}}$. Dans ce cas, on dit que $\mathcal{C}$ et D sont *équivalentes* (respectivement, *anti-équivalentes*).

Exemple. Soit K un corps et A une K-algèbre de dimension finie. Alors

$$D = \text{Hom}_K(-, K) : \text{mod-}A \to A\text{-mod} : M \mapsto \text{Hom}_K(M, K); f \mapsto \text{Hom}_K(f, K)$$

est une anti-équavalence a pour quasi-inverse

$$D = \text{Hom}_K(-, K) : A\text{-mod} \to \text{mod-}A : N \mapsto \text{Hom}_K(N, K); f \mapsto \text{Hom}_K(f, K).$$

Démonstration. Pour tout $M \in \text{mod-}A$, posons

$$\phi_M : M \to \text{Hom}_K(\text{Hom}_K(M, K), K) : x \mapsto (\text{Hom}_K(M, K) \to K : f \mapsto f(x))$$

est un isomorphisme fonctoriel en M.

3.1.13. Théorème. Un foncteur covariant (respectivement, contravariant) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est une équivalence (respectivement, anti-équivalence) si, et seulement si, F est pleine, fidèle et dense.

Démonstration. Supposons que F est covariant. Supposons que G est un quasi-inverse de F. Alors il existe des isomorphismes naturels $\phi : F\circ G \to \mathbb{1}_{\mathcal{D}}$ et $\psi : G\circ F \to \mathbb{1}_{\mathcal{C}}$. Pour tout $Z \in \mathcal{D}$, $\phi_Z : F(G(Z)) \to Z$ est un isomorphisme. Donc F est dense. Soient $f, g : X \to Y$ des morphismes de $\mathcal{C}$ tels que $F(f) = F(g) : F(X) \to F(Y)$, alors on a des diagrammes commutatifs suivants:

$$\begin{tikzcd} GF(X) \arrow[r, "GFf"] \arrow[d, "\psi_X"'] & GF(Y) \arrow[d, "\psi_Y"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y, \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} GF(X) \arrow[r, "GFg"] \arrow[d, "\psi_X"'] & GF(Y) \arrow[d, "\psi_Y"] \\ X \arrow[r, "g"] & Y. \end{tikzcd}$$

Par conséquent, $f = \psi_Y \circ GFf \circ \psi_X^{-1} = \psi_Y \circ GF(g) \circ \psi_X^{-1} = g$. Donc F est fidèle, et il en de même pour G. Enfin, pour tout morphisme $h : FX \to FY$ de $\mathcal{D}$, on a un morphisme $Gh : GFX \to GFY$ de $\mathcal{C}$. Or $h' = \psi_Y G(h)\psi_X^{-1}$ est un morphisme de $\mathcal{C}$ rendant commutatif les diagrammes

$$\begin{tikzcd} GF(X) \arrow[r, "Gh"] \arrow[d, "\psi_X"'] & GF(Y) \arrow[d, "\psi_Y"] \\ X \arrow[r, "h'"] & Y \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} GF(X) \arrow[r, "GFh'"] \arrow[d, "\psi_X"'] & GF(Y) \arrow[d, "\psi_Y"] \\ X \arrow[r, "h'"] & Y. \end{tikzcd}$$

Donc $GF(h') = \psi_Y^{-1} h' \psi_X = G(h)$. Ceci donne $F(h') = h$ comme G est fidèle. Ceci montre que F est plein.

Supposons réciproquement que F est fidèle, plein, et dense. On va construire un quasi-inverse $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ de F. Pour tout objet Y de $\mathcal{D}$, on choisit un objet X, noté GY, tel qu'il existe un isomorphisme $\phi_Y : Y \to FX$. Soit $f : Y \to Y'$ un morphisme de $\mathcal{D}$. Posons $X' = GY'$. Comme F est fidèle et plein, il existe unique morphisme $h' : X \to X'$, noté Gg, tel que $F(h') = \phi_{Y'}^{-1} \circ g \circ \phi_Y$. On a donc $F(Gg) = \phi_{FY'}^{-1} \circ g \circ \phi_{FY}$. Alors $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ est un foncteur covariant, et $\phi = \{\phi_Y \,|\, Y \in \mathcal{D}\}$ est un isomorphisme de GF vers $\mathbb{1}_{\mathcal{D}}$.

Soit X un objet de $\mathcal{C}$. L'objet GFX est tel qu'il existe un isomorphisme $\phi_{FX} : FX \to FGFX$. Comme F est fidèle et plein, il existe un isomorphisme $\psi_X : X \to GFX$ tel que $F(\psi_X) = \phi_{FX}$. On prétend que ψ_X est fonctoriel en X. En effet, si $f \in \mathcal{C}(X, X')$, alors $Ff \in \mathcal{D}(FX, FX')$. Ainsi $GFf \in \mathcal{C}(GFX, GFX')$ tel que $\phi_{FX} \circ F(GFf) = Ff \circ \phi_{FX'}$. Comme $F(\psi_X) = \phi_{FX}$ et $F(\psi_{X'}) = \phi_{FX'}$, on a $F(f \circ \psi_{X'}) = F(\psi_X \circ GFf)$. Ceci donne $f \circ \psi_{X'} = \psi_X \circ GFf$. Donc $\psi = \{\psi_X \mid X \in \mathrm{Obj}\, \mathcal{C}\}$ est un isomorphisme de GF vers $\mathbb{1}_{\mathcal{C}}$. La preuve se termine.

Remarque. Un isomorphisme (respectivement, anti-isomorphisme) de catégories est une équivalence (respectivement, anti-équivalence) de catégories, mais la réciproque n'est pas vraie.

Exemple. Soit K un corps et A une K-algèbre de dimension finie. Alors

$$D = \mathrm{Hom}_K(-, K) : \text{mod-}A \to A\text{-mod}$$

est un anti-équivalence qui n'est pas un isomorphisme de catégories.

Soient $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deux foncteurs tous covariants ou tous contravariants. Désignons par $\mathrm{Hom}(F, G)$ l'ensemble des transformation naturelles de F vers G.

3.1.14. Lemme de Yoneda. Soit $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$ un foncteur. Soit X un objet de $\mathcal{C}$.

(1) Si F est covariant, alors

$$\Phi : \mathrm{Hom}(\mathcal{C}(X,\ ), F) \to F(X) : \eta \mapsto \eta_X(\mathbb{1}_X)$$

est une bijection d'ensembles.

(2) Si F est contravariant, alors

$$\Psi : \mathrm{Hom}(\mathcal{C}(\ \ , X), F) \to F(X)$$

est une bijection d'ensembles.

Démonstration. Supposons que F est covariant. Soit $\eta : \mathcal{C}(X,\ ) \to F$ une transformation naturelle. Considérons l'application $\eta_Y : \mathcal{C}(X, Y) \to F(Y)$ avec Y un objet quelconque de $\mathcal{C}$. Pour tout $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, il existe un diagram commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(X,X) & \xrightarrow{\eta_X} & F(X) \\ {\scriptstyle \mathcal{C}(X,f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Ff} \\ \mathcal{C}(X,Y) & \xrightarrow{\eta_Y} & F(Y), \end{array}$$

d'où $\eta_Y(f) = \eta_Y(\mathcal{C}(X, f)(\mathbb{1}_X)) = F(f)(\eta_X(\mathbb{1}_X))$. Donc η est uniquement déterminé par l'élement $\eta_X(\mathbb{1}_X) \in F(X)$. Ceci implique que Φ_X est injective. Soit $x \in F(X)$. Pour tout objet Y de $\mathcal{C}$, définissons

$$\tau_Y : \mathcal{C}(X, Y) \to F(Y) : f \mapsto (Ff)(x).$$

Soit $g : Y \to Y'$ un morphisme de $\mathcal{C}$. Si $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, alors

$$Fg(\tau_Y(f)) = (Fg)(Ff)(x) = F(gf)(x) = \tau_{Y'}(gf) = \tau_{Y'}\mathcal{C}(X, g)(f),$$

c'est-à-dire, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(X,Y) & \xrightarrow{\tau_Y} & F(Y) \\ {\scriptstyle \mathcal{C}(X,g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Fg} \\ \mathcal{C}(X,Y') & \xrightarrow{\tau_{Y'}} & F(Y') \end{array}$$

est commutatif. Ceci montre que τ est une transformation naturelle. Comme $\tau_X(\mathbb{1}_X) = F(\mathbb{1}_X)(x) = \mathbb{1}_{FX}(x) = x$, on voit que Φ_X est une bijection. Ceci achève la démonstration.

3.2. Produits directs et sommes directes

On se fixe $\mathcal{C}$ une catégorie partout dans cette section.

3.2.1. Définition. Soit $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ une famille d'objets de $\mathcal{C}$. Un *produit direct* de la famille $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ est un objet X de $\mathcal{C}$ avec une famille $\{p_\lambda : X \to X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ de morphismes de $\mathcal{C}$ ayant la propriété universelle dans le sens suivant:

Si X' est un autre objet avec une autre famille $\{p'_\lambda : X' \to X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ de morphismes, alors il existe un unique morphisme $f : X' \to X$ telle que $p'_\lambda = p_\lambda f$, pour tout $\lambda \in \Lambda$.

Remarques. (1) Il est évident que $\mathbb{1}_X : X \to X$ est tel que $p_\lambda = p_\lambda \mathbb{1}_X$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Donc si $f : X \to X$ tels que $p_\lambda = p_\lambda f$, pour tout $\lambda \in \Lambda$, alors $f = \mathbb{1}_X$ par définition.

(2) Il est possible que $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ n'admet pas de produit direct.

3.2.2. Proposition. Soit $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ une famille d'objets de $\mathcal{C}$. Si X avec une famille $\{p_\lambda : X \to X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ de morphismes et X' avec une famille $\{p'_\lambda : X' \to X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ de morphismes sont des produits directs de la famille $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, alors il existe un unique isomorphisme $f : X' \to X$ telle que $p'_\lambda = p_\lambda f$, pour tout $\lambda \in \Lambda$.

Démonstration. Par définition, il existe des morphismes $f : X' \to X$ et $f' : X \to X'$ tels que $p'_\lambda = p_\lambda f$, $p_\lambda = p'_\lambda f'$, pour tout $\lambda \in \Lambda$. Donc $ff' : X \to X$ est tel que $p_\lambda = p_\lambda(ff')$, pour tout $\lambda \in \Lambda$ Ceci nous donne $ff' = \mathbb{1}_X$. De même $f'f = \mathbb{1}_{X'}$. Ceci achève la démonstration.

Remarque. Si X avec une famille $\{p_\lambda : X \to X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ de morphismes est un produit direct d'une famille $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, alors l'objet X s'appelle le *produit direct* de $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ et $\{p_\lambda : X \to X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ s'appellent les projections canoniques. On écrit $X = \Pi_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$.

Soit A une K-algèbre. Si $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ est une famille de A-modules à droite, alors

$$\Pi_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda = \{(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mid x_\lambda \in M_\lambda, \text{ pour tout } \lambda \in \Lambda\}$$

est un A-module à droite pour

$$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} + (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = (x_\lambda + y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, \quad (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} a = (x_\lambda a)_{\lambda\in\Lambda}.$$

3.2.3. Théorème. Soit $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ une famille de A-modules à droite. Alors $\Pi_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ avec les projections $\{p_\mu : \Pi_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to M_\mu : (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mapsto x_\mu \mid \mu \in \Lambda\}$ est le produit direct de $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ dans Mod-A.

Démonstration. Étant donnée M et $\{p'_\mu : M \to M_\mu \mid \mu \in \Lambda\}$ dans Mod-A, on a $f : M \to \Pi_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda : x \to (p'_\lambda(x))_{\lambda\in\Lambda} \in$Mod-$A$. Or pour tout $\mu \in \Lambda$, $x \in M, (p_\mu \circ f)(x) = p_\mu((p'_\lambda(x))_{\lambda\in\Lambda}) = p'_\mu(x)$. Donc $p_\mu \circ f = p'_\mu$, pour tout $\mu \in \Lambda$.

Si $g : M \to \Pi_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \in$Mod-$A$ est tel que $p_\mu \circ f = p'_\mu$, pour tout $\mu \in \Lambda$. Si $x \in M$, posons $g(x) = (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Or pour tout $\mu \in \Lambda$, $y_\mu = p_\mu(g(x)) = (p_\mu g)(x) = (p_\mu f)(x) = p'_\mu(x)$. Ainsi $g(x) = (y_\mu)_{\mu\in\Lambda} = (p'_\mu(x))_{\mu\in\Lambda} = f(x)$. Donc $g = f$. Ceci achève la démonstration.

Par la dualité, on a la notion de somme directe.

3.2.4. Définition. Soit $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ une famille d'objets de $\mathcal{C}$. Un *co-produit* de $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ est un objet X avec une famille $\{q_\lambda : X_\lambda \to X \mid \lambda \in \Lambda\}$ de morphismes ayant la propriété universelle dans le sens suivant:

Si X' est un autre objet avec une autre famille $\{q'_\lambda : X_\lambda \to X' \mid \lambda \in \Lambda\}$ de morphismes, alors il existe un unique morphisme $f : X \to X'$ telle que $q'_\lambda = fq_\lambda$, pour tout $\lambda \in \Lambda$.

Exemple. Soit $K[t]$ le K-module des polynômes sur K. Pour tout $n \geq 0$, posons $M_n = K$ et considérons le morphisme $q_n : M_n \to K[t] : a \mapsto at^n$. Alors $K[t]$ avec la famille $\{q_n \,|\, n \geq 0\}$ est le co-produit de la famille $\{M_n \,|\, n \geq 0\}$.

3.2.5. Proposition. Soit $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ une famille d'objets de $\mathcal{C}$. Si X avec une famille de morphismes $\{q_\lambda : X_\lambda \to X \mid \lambda \in \Lambda\}$ et X' avec une famille de morphismes $\{q'_\lambda : X_\lambda \to X' \mid \lambda \in \Lambda\}$ sont des co-produits de la famille $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, alors il existe un unique isomorphisme $f : X \to X'$ telle que $q'_\lambda = fq_\lambda$, pour tout $\lambda \in \Lambda$.

Remarque. Si X avec $\{q_\lambda : X_\lambda \to X \mid \lambda \in \Lambda\}$ est un co-produit de $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, alors l'objet X s'appelle *co-produit* de $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ et $\{q_\lambda : X_\lambda \to X \mid \lambda \in \Lambda\}$ s'appellent *injections canoniques*. On écrit $X = \amalg_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$.

3.2.6. Théorème. Soit $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ une famille de A-modules à droite. Alors le sous-module

$$\amalg_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda = \{(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mid x_\lambda \in M_\lambda \text{ et } x_\lambda = 0 \text{ pour presque tout } \lambda \in \Lambda\}$$

de $\Pi_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ avec la famille de morphismes $\{q_\mu : M_\mu \to \amalg_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda : x_\mu \mapsto (\delta_{\lambda,\mu} x_\mu)_{\lambda\in\Lambda} \mid \mu \in \Lambda\}$ est le co-produit de $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ dans Mod-A.

Démonstration. Étant donnée un A-module M et une famille $\{q'_\mu : M_\mu \to M \mid \mu \in \Lambda\}$ de morphismes dans Mod-A. Pour tout $x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \amalg_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$, on a $q'_\lambda(x_\lambda) = 0$ pour tout sauf qu'un nombre fini de $\lambda \in \Lambda$. Ainsi $\sum_{\lambda\in\Lambda} q'_\lambda(x_\lambda) \in M$, et

$$f : \amalg_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to M : (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mapsto \sum_{\lambda\in\Lambda} q'_\lambda(x_\lambda)$$

est un morphisme dans Mod-A. Or pour tous $\mu \in \Lambda$, $x_\mu \in M_\mu$, on a $q_\mu(x_\mu) = (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, où $y_\lambda = x_\mu$ si $\lambda = \mu$ et 0 sinon. Donc $f(q_\mu(x_\mu)) = \sum_{\lambda\in\Lambda} q'_\lambda(y_\lambda) = q'_\mu(x_\mu)$. Donc $fq_\mu = q'_\mu$, pour tout $\mu \in \Lambda$.

En outre, si $g : \amalg_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to M \in$Mod-$A$ est tel que $gq_\mu = q'_\mu$, pour tout $\mu \in \Lambda$, alors pour tout $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \amalg_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$, on a

$$g((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})) = g(\sum_{\lambda\in\Lambda} q_\lambda(x_\lambda)) = \sum_{\lambda\in\Lambda} gq_\lambda(x_\lambda) = \sum_{\lambda\in\Lambda} q'_\lambda(x_\lambda) = f((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})).$$

Ainsi $g = f$. Ceci achève la démonstration.

Remarque. Dans Mod-A, si Λ est fini, alors $\Pi_{\lambda\in\Lambda} M_{\lambda\in\Lambda} = \amalg_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$. Mais c'est pas vrai dans une catégorie générale. Par exemple, si $A_1, \ldots, A_n$ sont des K-algèbres, alors

$$\Pi_{i=1}^n A_i = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i\}$$

est le produit de $A_1, \ldots, A_n$. Mais $\amalg_{i=1}^n A_i$ n'existe pas dans la catégorie $\mathbf{Alg}(K)$.

Soient $M \in$Mod-A et $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ une famille de sous-modules de M. Alors

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda = \{\sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda \mid x_\lambda \in M_\lambda \text{ et } x_\lambda = 0 \text{ pour presque tout } \lambda \in \Lambda\}$$

est un sous-module de M. On voit aisément que

$$\phi : \amalg_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to \sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda : (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mapsto \sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda$$

est A-linéaire et surjective. Si ϕ est un isomorphisme, on dit que $\sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ est la *somme directe interne* de $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ et on note $\sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda = \oplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$.

3.2.7. Proposition. Soit $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ une famille de sous-modules de M. Soit $N = \sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(1) $N = \oplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$;

(2) $M_\mu \cap \sum_{\lambda\in\Lambda\backslash\{\mu\}} M_\lambda = 0$, pour tout $\mu \in \Lambda$;

(3) Tout $x \in N$ s'écrit d'une façon unique comme $x = \sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda$, où $x_\lambda \in M_\lambda$ tels que $x_\lambda = 0$ pour presque tout $\lambda \in \Lambda$.

Démonstration. Supposons que $N = \oplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$. Soit $-x_\mu = \sum_{\lambda\in\Lambda\backslash\{\mu\}} x_\lambda \in M_\mu \cap \sum_{\lambda\in\Lambda\backslash\{\mu\}} M_\lambda$, où $x_\lambda \in M_\lambda$ et $x_\lambda = 0$ pour presque tout $\lambda \in \Lambda\backslash\{\mu\}$. Alors $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \amalg_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ tel que $\phi((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) = \sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda = 0$. Comme ϕ est injectif, on a $x_\mu = 0$, et donc $-x_\mu = 0$. Ceci montre que $M_\mu \cap \sum_{\lambda\in\Lambda\backslash\{\mu\}} M_\lambda = 0$.

Supposons que la condition (2) est vérifiée. Soit $x = \sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda = \sum_{\lambda\in\Lambda} y_\lambda$, où $x_\lambda, y_\lambda \in M_\lambda$ et $x_\lambda = 0 = y_\lambda$ pour presque tout $\lambda \in \Lambda$. Alors $x_\mu - y_\mu \in M_\mu \cap \sum_{\lambda\in\Lambda\backslash\{\mu\}} M_\lambda$, pour tout $\mu \in \Lambda$. Ainsi $x_\mu = y_\mu$, pour tout $\mu \in \Lambda$. Cela veut dire que la condition (3) est vérifiée.

Supposons que la condition (2) est vérifiée. Si $x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \amalg_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ tel que $\phi(x) = 0$, alors $\sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda = 0 = \sum_{\lambda\in\Lambda} 0$. Par l'unicité, $x_\lambda = 0$, pour tout $\lambda \in \Lambda$. Ainsi ϕ est injective, et donc un isomorphisme. Ceci achève la démonstration.

Exemple. Considérons le K-module $K[t]$ des polynômes sur K. Pour tout $n \geq 0$, posons $M_n = \{at^n \mid a \in K\}$. Alors $M = \oplus_{n=0}^{\infty} M_n$.

Remarque. Si M_1 et M_2 sont des sous-modules de M, alors $M = M_1 \oplus M_2$ si et seulement si $M = M_1 + M_2$ et $M_1 \cap M_2 = 0$. Dans ce cas, on a $M_1 \cong M/M_2$ et $M_2 \cong M/M_1$; et on dit que M_1 est un *facteur direct* de M ayant pour complément M_2.

3.2.8. Théorème. Soient $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ et $\{N_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ des familles de modules dans Mod-A. Alors

$$\mathrm{Hom}_A(\amalg_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda,\ \Pi_{\omega\in\Omega} N_\omega) \cong \Pi_{(\lambda,\omega)\in\Lambda\times\Omega} \mathrm{Hom}_A(M_\lambda,\ N_\omega),$$

en tant que K-modules.

Démonstration. Soient $\{q_\mu : M_\mu \to \amalg_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \mid \mu \in \Lambda\}$ les injections canoniques et $\{p_\sigma : \Pi_{\omega\in\Omega} N_\omega \to N_\sigma \mid \sigma \in \Omega\}$ les projections canoniques. Si $f \in \mathrm{Hom}_A(\amalg_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda,\ \Pi_{\omega\in\Omega} N_\omega)$, alors $p_\sigma f q_\mu \in \mathrm{Hom}_A(M_\lambda,\ N_\omega)$, pour tout $(\mu, \sigma) \in \Lambda \times \Omega$. Définissons

$$\phi : \mathrm{Hom}_A(\amalg_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda,\ \Pi_{\omega\in\Omega} N_\omega) \to \Pi_{(\lambda,\omega)\in\Lambda\times\Omega} \mathrm{Hom}_A(M_\lambda,\ N_\omega) : f \mapsto (p_\sigma f q_\mu)_{(\mu,\sigma)\in\Lambda\times\Omega}.$$

On voit aisément que ϕ est K-linéaire.

Supposons que $f, g : \amalg_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to \Pi_{\omega\in\Omega} N_\omega$ sont des morphismes de Mod-A tels que $p_\sigma f q_\mu = p_\sigma g q_\mu$, pour tout $(\mu, \sigma) \in \Lambda \times \Omega$. On se fixe $\mu \in \Lambda$ et considère la famille $\{h_{\mu,\sigma} = p_\sigma(f q_\mu) : M_\mu \to N_\sigma \mid \sigma \in \Omega\}$. Remarquons que $f q_\mu, g q_\mu : M_\mu \to \Pi_{\omega\in\Omega} N_\omega$ sont tels que $h_{\mu,\sigma} = p_\sigma(f q_\mu) = p_\sigma(g q_\mu)$, pour tout $\sigma \in \Omega$. D'après la définition de produit direct, $f q_\mu = g q_\mu$, pour tout $\mu \in \Lambda$. Posons $h_\mu = f q_\mu$ et considérons la famille $\{h_\mu : M_\mu \to \Pi_{\omega\in\Omega} N_\omega\}$. Comme $f, g : \amalg_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to \Pi_{\omega\in\Omega} N_\omega$ sont tels que $h_\mu = f q_\mu = g q_\mu$, pour tout $\mu \in \Lambda$, on a $f = g$ d'après la définition de somme directe. Cela veut dire que ϕ est injective.

Enfin, soit $(f_{\lambda,\omega})_{(\lambda,\omega)\in\Lambda\times\Omega} \in \Pi_{(\lambda,\omega)\in\Lambda\times\Omega} \mathrm{Hom}_A(M_\lambda,\ N_\omega)$. On se fixe $\omega \in \Omega$ et considérons la famille $\{f_{\lambda,\omega} : M_\lambda \to N_\omega \mid \lambda \in \Lambda\}$. D'après la définition de somme directe, il existe $f_\omega : \amalg_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to N_\omega$ tel que $f_{\lambda,\omega} = f_\omega q_\lambda$, pour tout $\lambda \in \Lambda$. Considérons maintenant la famille $\{f_\omega : \amalg_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to N_\omega \mid \omega \in \Omega\}$. Il existe $f : \amalg_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to \Pi_{\omega\in\Omega} N_\omega$ tel que $f_\omega = p_\omega f$, pour tout $\omega \in \Omega$. Donc $p_\omega f q_\lambda = f_{\lambda,\omega}$, pour tout $(\lambda, \omega) \in \Lambda \times \Omega$. Ainsi $\phi(f) = (f_{\lambda,\omega})_{(\lambda,\omega)\in\Lambda\times\Omega}$. Cela veut dire que ϕ est surjectif. Ceci achève la démonstration.

3.2.9. Corollaire. Soient M un module et $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ une famille de modules dans Mod-A. On a des isomorphismes de K-modules suivants:

(1) $\mathrm{Hom}_A(M,\ \Pi_{\lambda\in\Lambda}M_\lambda) \cong \Pi_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Hom}_A(M,\ M_\lambda)$, et

(2) $\mathrm{Hom}_A(\amalg_{\lambda\in\Lambda}M_\lambda,\ M) \cong \Pi_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Hom}_A(M_\lambda,\ M)$.

Remarque. $\mathrm{Hom}_A(M,\ \amalg_{\lambda\in\Lambda}M_\lambda) \ncong \amalg_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Hom}_A(M,\ M_\lambda)$ et $\mathrm{Hom}_A(\Pi_{\lambda\in\Lambda}M_\lambda,\ M) \ncong \Pi_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Hom}_A(M_\lambda,\ M)$.

3.2.10. Théorème. Soit $M = \Pi_{i=1}^n M_i$ avec $M_i \in$ Mod-A. Alors

(1) $H = \{(f_{ij})_{n\times n} \mid f_{ij} : M_j \to M_i \in \text{Mod-}A\}$ est une K-algèbre pour la multiplication des matrices.

(2) $\mathrm{End}_A(M) \cong H$ en tant que K-algèbres.

Démonstration. (2) D'après le théorème 3.2.8, l'application

$$\phi : \mathrm{End}_A(M) \to H : f \mapsto (p_i f q_j)_{n\times n}$$

avec $q_j : M_j \to M$ les injections canoniques et $p_i : M \to M_i$ les projections canoniques, est un isomorphisme de K-modules. Comme $p_i q_j = 0$ si $j \neq i$ et $p_i q_i = \mathbb{1}_{M_i}$, on a $\phi(\mathbb{1}_M) = \mathrm{diag}\{\mathbb{1}_{M_1}, \ldots, \mathbb{1}_{M_n}\} = \mathbb{1}_H$. Soient $f, g \in \mathrm{End}(M)$. On a $\phi(fg) = (p_i(fg)q_j)_{n\times n}$. Or $\sum_{k=1} q_k p_k = \mathbb{1}_M$ entaîne que $p_i f g q_j = p_i f(\sum_{k=1}^n q_k p_k) g q_j = \sum_{k=1}^n (p_i f q_k)(p_k g q_j)$. Donc $\phi(fg) = \phi(f)\phi(g)$. Ceci achève la démonstration.

3.2.11. Corollaire. Soit $M = \Pi_{i=1}^n M_i$ avec $M_1, \ldots, M_n$ des modules dans Mod-A.

(1) Si $\mathrm{Hom}_A(M_i, M_j) = 0$ lorsque $i \neq j$, alors $\mathrm{End}_A(M) \cong \Pi_{i=1}^n \mathrm{End}_A(M_i)$.

(2) Si $M_i = N$ pour tout $1 \le i \le n$, alors $\mathrm{End}_A(M) \cong M_n(\mathrm{End}_A(N))$, l'algèbre des $n \times n$ matrices sur $\mathrm{End}_A(N)$.

3.3. Catégories linéaires

Soit K un anneau commutatif et soit A une K-algèbre.

3.3.1. Définition. On dit qu'une catégorie $\mathcal{C}$ est une K-*catégorie* si elle satisfait les axiomes suivants:

(1) Pour touts $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, $\mathcal{C}(X, Y)$ est un K-module dont le zero est noté $0_{X,Y}$.

(2) Pour tout $\alpha \in K$, $(fg)\alpha = f(g\alpha) = (f\alpha)g$ lorsque les compositions sont possibles.

(3) $f(g+h) = fg + fh$ et $(g+h)f = gf + gh$ lorsque les compositions sont possibles.

On dit qu'une K-catégorie $\mathcal{C}$ est *additive* ou K-*linéaire* si elle satisfait les axiomes suivants:

(4) Il existe un *objet zéro* 0 tel que pour tout $X \in \mathcal{C}$, les K-modules $\mathcal{C}(X, 0)$ et $\mathcal{C}(0, X)$ sont nuls.

(5) Une famille finie d'objets de $\mathcal{C}$ admet un produit direct.

En outre, une $\mathbb{Z}$-catégorie additive s'appelle simplement *catégorie additive.*

Exemples. (1) Les catégories A-Mod, A-mod, Mod-A, et mod-A sont des K-catégories additives.

(2) Soit K un corps. La catégorie des chemins d'un carquois Q sur K, notée $K[Q]$, est la K-catégorie telle que définie ci-dessous. Les objets sont les sommets de Q. Si x, y sont des sommets, alors $K[Q](x, y)$ est le K-espace vectoriel ayant pour base l'ensemble des chemins de x vers y. La composition est obtenue à partir de la composition des chemins par le prolongement bilinéaire. Remarquons que $K[Q]$ n'est pas additive.

(3) La catégorie $\mathrm{Alg}(K)$ n'est pas K-linéaire car $\mathrm{Hom}(A, B)$ n'est pas un K-module.

3.3.2. Lemme. Soit $\mathcal{C}$ une K-catégorie.

(1) Si f et g sont des morphismes composables, alors $gf = 0$ lorsque $f = 0$ ou $g = 0$.

(2) Un morphisme $f : X \to Y$ est un monomorphisme si, et seulement si, pour tout morphisme non nul $g : U \to X$, on a $fg \neq 0$.

(3) Un morphisme $f : X \to Y$ est un épimorphisme si, et seulement si, pour tout morphisme non nul $h : Y \to Z$, on a $hf \neq 0$.

(4) Pour tout objet X, $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X) = \mathcal{C}(X, X)$ est une K-algèbre.

(5) Si le nombre des objets de $\mathcal{C}$ est fini, alors

$$A(\mathcal{C}) = \oplus_{(x,y)\in \mathrm{Obj}\,\mathcal{C}\times \mathrm{Obj}\,\mathcal{C}}\, \mathcal{C}(x, y)$$

est une K-algèbre, appelée *algèbre associée* à $\mathcal{C}$, dont la multiplication est induite de la compositions des morphismes de $\mathcal{C}$ telle que le produit de deux morphismes non composables est nul.

(6) Si $\mathcal{C}$ admet un objet zéro, alors il est unique à isomorphisme près.

Exemple. Soient K un corps et Q un carquois fini. Alors l'algèbre associée à $K[Q]$ est l'algèbre des chemins KQ de Q sur K.

3.3.3. Théorème. Soit $\mathcal{C}$ une K-catégorie avec des objets $X, X_1, \ldots, X_n$. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(1) X est un produit de $X_1, \ldots, X_n$.

(2) Il existe des morphismes $p_i : X \to X_i$ et $q_i : X_i \to X$, $i = 1, \ldots, n$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} q_i p_i = \mathbb{1}_X \text{ et } p_i q_j = \begin{cases} \mathbb{1}_{X_i}, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

(3) X est un co-produit de $X_1, \ldots, X_n$.

Démonstration. Supposons que X est un produit de $X_1, \ldots, X_n$ ayant pour projections canoniques $p_i : X \to X_i, i = 1, \ldots, n$. Fixons un j avec $1 \leq j \leq n$, définissons $f_{ij} : X_j \to X_i$, pour $i = 1, \ldots, n$, par

$$f_{ij} = \begin{cases} \mathbb{1}_{X_j}, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après la définition du produit, il existe $q_j : X_j \to X$ tel que $p_i q_j = f_{ij}$, pour tout $1 \leq i \leq n$. En outre, $p_i(\sum_{j=1}^n p_j q_j) = p_i q_i p_i = p_i$, pour tout $1 \leq i \leq n$. D'après l'unicité, on a $\sum_{j=1}^n p_j q_j = \mathbb{1}_X$.

Supposons maintenant que (2) est valide. Si $u_i : Y \to X_i$, $i = 1, \ldots, n$, sont des morphismes de $\mathcal{C}$, alors $f = \sum_{i=1}^n q_i u_i$ est un morphisme de $\mathcal{C}$ tel que $p_j f = p_j q_j u_j = u_j$, pour tout $1 \leq j \leq n$. Si $g : Y \to X$ est un autre morphisme tel que $p_j g = u_j$, et donc $q_j u_j = q_j p_j g$, pour tout $1 \leq j \leq n$. Cela implique $g = (\sum_{j=1}^n q_j p_j) g = \sum_{j=1}^n q_j u_j = f$. Donc X est un produit de $X_1, \ldots, X_n$. Ceci montre l'équivalence de (1) et (2). De même, on peut montrer l'équivalence de (3) et (2). La preuve se termine.

3.3.4. Définition. Soit $\mathcal{C}$ une K-catégorie. Pour tout couple (X, Y) d'objets de $\mathcal{C}$, on prend un sous-module $\mathcal{I}(X, Y)$ du K-module $\mathcal{C}(X, Y)$. On dit que

$$\mathcal{I} = \{\mathcal{I}(X, Y) \mid (x, y) \in \operatorname{Obj} \mathcal{C} \times \operatorname{Obj} \mathcal{C}\}$$

est un *idéal bilatère* de $\mathcal{C}$ si pour tous $f \in \mathcal{I}(X, Y)$, $g \in \mathcal{C}(U, X)$ et $h \in \mathcal{C}(Y, Z)$, on a $hfg \in \mathcal{I}(U, Z)$.

3.3.5. Définition. Soit $\mathcal{C}$ une K-catégorie. Soit $\mathcal{F}$ une famille de morphismes de $\mathcal{C}$. On dit'un idéal bilatère $\mathcal{I}$ est *engendré par* $\mathcal{F}$, noté $\mathcal{I} =< \mathcal{F} >$, si pour tous objets X et Y, $\mathcal{I}(X, Y)$ est le sous-module du K-module $\mathcal{C}(X, Y)$ engendré par les morphismes de la forme hfg avec $f \in \mathcal{F}$.

Exemple. Soit K un corps. Considérons le carquois

$$Q: \quad a \xrightarrow{\alpha} b \xrightarrow{\beta} c \xrightarrow{\gamma} d.$$

Alors l'idéal bilatère $\mathcal{I}$ de $K[Q]$ engendré par $\beta\alpha$ est tel que

$$\mathcal{I}(a, c) = K < \beta\alpha >,\ \mathcal{I}(a, d) = K < \gamma\beta\alpha >,\ \mathcal{I}(x, y) = 0$$

pour tous les autres couples de sommets (x, y).

3.3.6. Définition. Soit $\mathcal{C}$ une K-catégorie avec $\mathcal{I}$ un idéal bilatère. On définit le *quotient* $\mathcal{C}/\mathcal{I}$ de $\mathcal{C}$ par I comme suit:

(1) $\operatorname{Obj} \mathcal{C}/\mathcal{I} = \operatorname{Obj} \mathcal{C}$.

(2) Pour tous objets X, Y, on a $(\mathcal{C}/\mathcal{I})(X, Y) = \mathcal{C}(X, Y)/\mathcal{I}(X, Y)$.

(3) La compositions des morphismes de $\mathcal{C}/\mathcal{I}$ est induite de celle de $\mathcal{C}$.

Exemples. (1) Dans le quotient de Mod-A par l'idéal bilatère des homomorphismes non inversibles, les morphismes non nuls sont tous isomorphismes.

(2) Soit K un corps. Considérons le carquois

$$Q: \quad a \xrightarrow{\alpha} b \xrightarrow{\beta} c \xrightarrow{\gamma} d.$$

Soit $\mathcal{C} = K[Q]/ < \beta\alpha >$. Alors $\mathcal{C}(a, c) = 0$, $\mathcal{C}(a, d) = 0$ et $\mathcal{C}(x, y) \cong K[Q](x, y)$ pour tous les autres couples de sommets (x, y).

3.3.7. Définition. Soit $\mathcal{C}$ une K-catégorie avec $f : X \to Y$ un morphisme.

(1) Un *noyau* de f est un morphisme $i : U \to X$ satisfaisant (i) $fi = 0$ (ii) pour tout $j : V \to X$ avec $fj = 0$, il existe un unique morphisme $g : V \to U$ tel que $j = ig$.

(2) Un *co-noyau* de f est un morphisme $p : Y \to Z$ satisfaisant (i) $pf = 0$ (ii) pour tout morphisme $q : Y \to W$ avec $qf = 0$, il existe un unique morphisme $h : Z \to W$ tel que $q = hp$.

Exemple. Soit $\mathcal{C}$ une K-catégorie admettant un objet zero 0. Pour tout objet X, $\operatorname{Ker}(\mathbb{1}_X) = 0_{0,X}$ et $\operatorname{Coker}(0_{0,X}) = \mathbb{1}_X$. En outre, $\operatorname{Coker}(\mathbb{1}_X) = 0_{X,0}$ et $\operatorname{Ker}(0_{X,0}) = \mathbb{1}_X$.

3.3.8. Lemme. Soit $\mathcal{C}$ une K-catégorie avec $f : X \to Y$ un morphisme.

(1) Si $i : U \to X$ et $j : V \to X$ sont des noyaux de f, alors il existe un unique isomorphisme $g : U \to V$ tel que $j = ig$. On note $\operatorname{Ker}(f) = (i : U \to X)$ et $\ker(f) = U$.

(1) Si $p : Y \to Z$ et $q : Y \to W$ sont des co-noyaux de f, alors il existe un unique isomorphisme $h : Z \to W$ tel que $q = hp$. On note $\operatorname{Coker}(f) = (p : Y \to Z)$ et $\operatorname{coker}(f) = Z$.

Exemple. Soit K un corps. Considérons le carquois

$$\begin{tikzcd} Q: & a \arrow[r, "\alpha"] & b \arrow[r, "\beta"] & c \arrow[r, bend left, "\gamma"] \arrow[r, bend right, "\delta"'] & d. \end{tikzcd}$$

(1) Soit $\mathcal{C} = K[Q]/ < \beta\alpha, \gamma\beta - \delta\beta >$. Alors $\operatorname{Ker}(\bar{\beta}) = \bar{\alpha}$, $\operatorname{Ker}(\bar{\beta}) = a$; et $\operatorname{Coker}(\bar{\beta}) = \bar{\gamma} - \bar{\delta}$, $\operatorname{coker}(\bar{\beta}) = d$.

(2) Soit $\mathcal{D} = K[Q]/ < \gamma\beta,\ \delta\beta >$. Alors le morphisme $\bar{\beta}$ n'a ni noyau ni co-noyau.

3.3.9. Proposition. Soit $\mathcal{C}$ une K-catégorie avec $f : X \to Y$ un morphisme.

(1) Un noyau (respectivement, co-noyau) de f est un monomorphisme (respectivement, épimorphisme) s'il existe.

(2) Supposons que $\mathcal{C}$ admet un objet zéro 0. Alors f est un monomorphisme (respectivement, épimorphisme) si, et seulement si, $\operatorname{Ker}(f) = 0_{0,X}$ (respectivement, $\operatorname{Coker}(f) = 0_{Y,0}$).

Démonstration. (1) Supposons que $i : U \to X$ est un noyau de f. Soit $g : V \to U$ un morphisme tel que $ig = 0$. Comme $f0_{V,Y} = 0$ et $0_{V,Y} = ig = i0_{V,U}$. Donc $g = 0_{V,U}$ d'après la définition du noyau. Ainsi i est un monomorphisme.

(2) Supposons que $0_{0,X} : 0 \to X$ est un noyau de f. Si $g : U \to X$ est tel que $fg = 0$, alors il existe $g' : U \to 0$ tel que $g = g'0 = 0$. Donc f est un monomorphisme.

Supposons réciproquement que f est un monomorphisme. D'abord $f0_{0,X} = 0$. Si $g : U \to X$ est tel que $fg = 0_{U,Y}$, alors $fg = f0_{U,X}$. Ainsi $g = 0_{U,X}$ comme f est un monomorphisme. Or 0_{U0} est le seul morphisme de U vers 0 tel que $g = 0_{0,X}0_{U,0}$. Ceci montre que $0_{0,X}$ est un noyau de f. La preuve se termine.

3.3.10. Définition. Soit $\mathcal{C}$ une K-catégorie avec f un morphisme.

(1) On définit l'*image* de f, noté $\mathrm{Im}(f)$, comme étant $\mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(f))$ s'il existe. Dans ce cas, on note $\mathrm{im}(f) = \ker(\mathrm{Coker}(f))$.

(2) On définit l'*co-image* de f, noté $\mathrm{Coim}(f)$, comme étant $\mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}(f))$ s'il existe. Dans ce cas, on note $\mathrm{coim}(f) = \mathrm{coker}(\mathrm{Ker}(f))$.

Exemples. (1) Si $\mathcal{C}$ est une K-catégorie admettant un objet zéro 0. Alors pour tout $X \in \mathcal{C}$, $\mathrm{Im}(0_{0,X}) = \mathrm{Ker}(\mathbb{1}_X) = 0_{0,X}$ et $\mathrm{im}(0_{0,X}) = 0$. En outre, $\mathrm{Coim}(0_{X,0}) = \mathrm{Coker}(\mathbb{1}_X) = 0_{X,0}$ et $\mathrm{Coim}(0_{0,X}) = 0$.

(2) Soit K un corps. Considérons le carquois

$$Q: \quad \begin{tikzcd} a \arrow[r, "\beta"] & b \arrow[r, bend left, "\gamma"] \arrow[r, bend right, "\delta"'] & d. \end{tikzcd}$$

Soit $\mathcal{C} = K[Q]/ < \gamma\beta - \delta\beta >$. Alors $\mathrm{Im}(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha}$ et $\mathrm{im}(\bar{\alpha}) = a$. En outre, $\mathrm{Coim}(\bar{\gamma} - \bar{\delta}) = \bar{\gamma} - \bar{\delta}$.

(3) Soit K un corps. Considérons le carquois

$$Q: \quad \begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "\alpha"] \arrow[r, bend right, "\beta"'] & b \arrow[r, bend left, "\gamma"] \arrow[r, bend right, "\delta"'] & c. \end{tikzcd}$$

Soit $\mathcal{D} = K[Q]/ < \gamma\alpha - \delta\alpha, \gamma\beta - \delta\beta >$. Alors $\bar{\alpha}$ a $\bar{\gamma} - \bar{\delta}$ pour co-noyau mais il n'a pas d'image.

3.3.11. Proposition. Soit $\mathcal{C}$ une K-catégorie. Si $f : X \to Y$ est un morphisme dont l'image et le co-image existent, alors il existe un unique morphisme $\bar{f} : \mathrm{coim}(f) \to \mathrm{im}(f)$, appelé le *morphisme associé à* f, rendant commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} \ker(f) \arrow[r, "u"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[r, "v"] & \mathrm{coker}(f) \\ & \mathrm{coim}(f) \arrow[r, "\bar{f}"] & \mathrm{im}(f), \arrow[u, "j"'] & \end{tikzcd}$$

où u et v sont noyau et co-noyau de f, respectivement; p est le co-noyau de u et j est le noyau de v.

Démonstration. Comme $j : \mathrm{im}(f) \to Y$ est le noyau de v et $vf = 0$, il existe un unique $g : X \to \mathrm{im}(f)$ tel que $f = jg$. Or $jgu = fu = 0$ entraîne que $gu = 0$ car j est un monomorphisme. Comme p est le co-noyau de u, il existe un unique morphisme $\bar{f} : \mathrm{coim}(f) \to \mathrm{im}(f)$ tel que $g = \bar{f}p$. Ainsi $f = jg = j\bar{f}p$. Ceci achève la démonstration.

3.3.12. Définition. Soit $\mathcal{C}$ une K-catégorie.

(1) Une suite $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ de morphismes de $\mathcal{C}$ est dite *exacte* si $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Coker}(f) = \mathrm{Coim}(g)$, c'est-à-dire, g admet un noyau $i : \ker(g) \to Y$ et f admet un co-noyau $p : Y \to \mathrm{coker}(f)$ tels que i est le noyau de p; et p est le co-noyau de i.

(2) Une suite

$$X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} X_n$$

de morphismes de $\mathcal{C}$ avec $n \geq 2$ est dite *exacte* si pour tout $1 \leq i \leq n-2$, la suite $X_i \xrightarrow{f_i} X_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} X_{i+2}$ est exacte.

3.3.13. Lemme. Soit $\mathcal{C}$ une K-catégorie avec $F : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ des morphismes.

(1) Si la suite $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ est exacte, alors $gf = 0$.

(2) Si f est le noyau de g et g est le co-noyau de f, alors $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ est exacte.

Démonstration. (1) Soient $p : Y \to V$ le co-noyau de f et $i : U \to Y$ le noyau de g. Alors $i = \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(f)) = \mathrm{Ker}(p)$. Comme p est le co-noyau de f, on a $pf = 0$. Ainsi il existe $f' : X \to U$ tel que $f = if'$. Ainsi $gf = gif' = 0$.

(2) On a $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(f)) = \mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Coim}(g) = \mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}(g)) = \mathrm{Coker}(f)$. Ainsi la suite est exacte.

Exemple. Soit K un corps. Considérons le carquois

$$Q : \quad a \xrightarrow{\alpha} b \xrightarrow{\beta} c \overset{\gamma}{\underset{\delta}{\rightrightarrows}} d.$$

Alors la catégorie $K[Q]/ < \beta\alpha, \gamma\beta - \delta\beta >$ admet une suite exacte

$$a \xrightarrow{\bar{\alpha}} b \xrightarrow{\bar{\beta}} c \xrightarrow{\bar{\gamma}-\bar{\delta}} d.$$

3.3.14. Proposition. Soit $\mathcal{C}$ une K-catégorie admettant un objet zéro.

(1) Une suite $0 \to X \xrightarrow{f} Y$ est exacte si, et seulement si, f est un monomorphisme.

(2) Une suite $X \xrightarrow{f} Y \to 0$ est exacte si, et seulement si, f est un épimorphisme.

(3) Si f est le noyau de g; et g est le co-noyau de f, alors la suite $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ est exacte.

Démonstration. (1) D'après la proposition 3.3.7(2), f est un monomorphisme si, et seulement si, $\mathrm{Ker}(f) = 0_{0,X} = \mathrm{Im}(0_{0,X})$ si, et seulement si, $\mathrm{Ker}(f) = 0_{0,X} = \mathrm{Im}(0_{0,X})$ et $\mathrm{Coim}(f) = \mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}(f)) = \mathrm{Coker}(0_{0,X})$ si, et seulement si, $0 \to X \xrightarrow{f} Y$ est exacte.

(3) Dans ce cas, f est un monomorphisme et g est un épimorphsime. L'énoncé suit de (1), (2), et le lemme 3.3.13(2). Ceci achève la démonstration.

Exemple. Soit $\mathcal{C}$ une K-catégorie additive. Soient X_1 et X_2 des objets de $\mathcal{C}$ avec les injections canoniques $q_i : X_i \to X_1 \amalg X_2$ et les projections canoniques $p_i : X_1 \amalg X_2 \to X_i$, $i = 1, 2$. D'après le théorème 3.3.3, on a $q_1p_1 + q_2p_2 = \mathbb{1}_{X_1 \amalg X_2}$ et $p_iq_j = \delta_{ij}\mathbb{1}_{X_i}, i = 1, 2$. Si $g : X \to X_1 \amalg X_2$ est tel que $p_2g = 0$, alors $g = \mathbb{1}_{X_1 \amalg X_2}g = (q_1p_1 + q_2p_2)g = q_1(p_1g)$. Si $h : X \to X_1$ est tel que $g = q_1h$, alors $h = \mathbb{1}_{X_1}h = p_1q_1h = p_1g$. Donc q_1 est un noyau de p_2. De même, p_2 est un co-noyau de q_1. Par conséquent, on a une suite exacte courte

$$0 \to X_1 \xrightarrow{q_1} X_1 \amalg X_2 \xrightarrow{p_2} X_2 \to 0.$$

3.4. Catégories abélinnes

Partout dans ce chapitre, on se fixe K un corps et A une K-algèbre.

3.4.1. Définition. Une K-catégorie additive $\mathcal{C}$ est dite *abélienne* si elle satisfait aux axiomes suivants:

(1) Tout morphisme admet un noyau et un co-noyau.

(2) Pour tout morphisme $f : X \to Y$, le morphisme associé $\bar{f} : \mathrm{coim}(f) \to \mathrm{coker}(f)$ est un isomorphisme.

Exemple. Les K-catégories A-Mod et A-mod sont abéliennes.

3.4.2. Proposition. Soit $\mathcal{C}$ une K-catégorie abéliennne avec $f : X \to Y$ un morphisme.

(1) f se décompose $f = ip$, où p est un épimorphisme et i est un monomorphisme. Dans ce cas, $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Coker}(f) = \mathrm{Coker}(i)$.

(2) Si f est un monomorphisme, alors $f = \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(f))$, c'est-à-dire, $f = \mathrm{Im}(f)$.

(3) Si f est un épimorphisme, alors $f = \mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}(f))$, c'est-à-dire, $f = \mathrm{Coim}(f)$.

(4) f est un isomorphisme si, et seulement si, f est un monomorphisme ainsi qu'un épimorphisme.

Démonstration. Considérons le diagram commutatif:

$$\begin{tikzcd}
\ker(f) \arrow[r, "u"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[r, "v"] & \mathrm{coker}(f) \\
& \mathrm{coim}(f) \arrow[r, "\bar{f}"] & \mathrm{im}(f), \arrow[u, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

où u et v sont noyau et co-noyau de f, respectivement; p est le co-noyau de u et j est le noyau de v.

(1) Remarquons que p est épimorphisme et j est un monomorphisme. Comme $\bar{f}$ est un isomorphisme, $i = \bar{f}j$ est un monomorphisme. On prétend $u = \mathrm{Ker}(p)$. En effet, comme $ipu = fu = 0$, on a $pu = 0$ car i est un monomorphisme. Si $g : V \to X$ est tel que $gp = 0$. Alors $gf = gpi = 0$. Ainsi il existe un unique morphisme $h : V \to \ker(f)$ tel que $g = uh$. Ceci montre que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(p)$. De même, $\mathrm{Coker}(f) = \mathrm{Coker}(i)$.

(2) Si f est un monomorphisme, alors $u = 0_{0,X}$, et donc $p = \mathbb{1}_X$. Comme $\bar{f}$ est un isomorphisme et j est le noyau de v, on voit que f est un noyau de $v = \mathrm{Coker}(f)$.

(4) Il suffit de montrer la suffisance. Comme f est un épimorphisme, $0_{Y,0} = \mathrm{Coker}(f)$, et donc $j = \mathbb{1}_Y$. Ainsi $f = \bar{f}$ est un isomorphisme. Ceci achève la démonstration.

Exemple. La catégorie des $\mathbb{Z}$-modules divisibles n'est par abélienne.

3.4.3. Proposition. Soit $\mathcal{C}$ une K-catégorie abélienne.

(1) Une suite $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ est exacte si, et seulement si, $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$ si, et seulement si, $\mathrm{Coker}(f) = \mathrm{Coim}(g)$.

(2) Une suite $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ est exacte si, et seulement si, $f = \mathrm{Ker}(g)$.

(3) Une suite $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ est exacte si, et seulement si, $g = \mathrm{Coker}(g)$.

(4) Une suite $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ est exacte si, et seulement si, f est le noyau de g et g est le co-noyau de f.

Démonstration. (1) Si $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(f)$, alors

$$\mathrm{Coim}(g) = \mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}(g)) = \mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(f))) = \mathrm{Coker}(f),$$

car $\mathrm{Coker}(f)$ est un épimorphisme. Réciproquement si $\mathrm{Coker}(f) = \mathrm{Coim}(g) = \mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}(g))$, alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(f)) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}(g))) = \mathrm{Ker}(g)$, car $\mathrm{Ker}(g)$ est un monomorphisme.

(2) Si $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ est exacte, alors $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(f)) = f$, comme f est un monomorphisme. Supposons réciproquement que $f = \mathrm{Ker}(g)$, alors f est un monomorphisme. Ainsi $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(f)) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}(g))) = \mathrm{Ker}(g)$, car $\mathrm{Ker}(g)$ est un monomorphisme. Donc la suite est exacte. La preuve se termine.

3.4.4. Lemme. Soit $\mathcal{C}$ une K-catégorie abélienne avec

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "w"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif à lignes exactes de morphismes de $\mathcal{C}$. Si u, w sont des monomorphismes (épimorphismes, isomorphismes, respectivement), alors v l'est aussi.

Démonstration. Supposons que u, w sont des monomorphismes. Soit $h : U \to Y$ tel que $vh = 0$. Alors $wgh = g'vh = 0$, et donc $gh = 0$ car w est un monomorphisme. Comme f est le noyau de g d'après la proposition 3.4.3(2), il existe $h' : U \to X$ tel que $h = fh'$. Or $f'uh' = vfh' = vh = 0$ entaîne que $h' = 0$ puisque f', u sont monomorphismes. Par conséquent $h = 0$. Donc v est un monomorphisme. Or le résulat se découle de la proposition 3.4.2(4).

3.4.5. Définition. Soit $\mathcal{C}$ une K-catégorie. Un morphisme $f : X \to Y$ de $\mathcal{C}$ s'appelle une *section* (respectivement, *rétraction*) s'il existe un morphisme $g : Y \to X$ tel que $gf = \mathbb{1}_X$ (respectivement, $fg = \mathbb{1}_Y$).

Remarques. (1) Une section (respectivement, rétraction) est un monomorphisme (respectivement, épimorphisme).

(2) Si $f : X \to Y$ est un isomorphisme, alors f est une section ainsi qu'une rétraction. La réciproque est vraie si $\mathcal{C}$ est abélienne.

3.4.6. Définition. Soit $\mathcal{C}$ une K-catégorie additive. Une suite exacte courte

$$0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$$

est dite *scindée* s'il existe un isomorphisme $h : Y \to X \amalg Z$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathbb{1}_X"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\mathbb{1}_Z"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "q"] & X \amalg Z \arrow[r, "p"] & Z \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

où q est l'injection canonique et p est la projection canonique. Dans ce cas, on voit aisément que f est un noyau de g et g est un co-noyau de f.

3.4.7. Proposition. Soit $\mathcal{C}$ une K-catégorie abélienne. Une suite exacte courte

$$0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$$

est scindée si, et seulement si f est une section si, et seulement si, g est une rétraction.

Démonstration. Soient $q_1 : X \to X \amalg Z$ et $q_2 : Z \to X \amalg Z$ les injections canoniques; et $p_1 : X \amalg Z \to X$ et $p_2 : X \amalg Z \to Z$ les projections canoniques. D'abord, supposons que $h : Y \to X \amalg Z$ est un isomorphisme rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathbb{1}_X"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\mathbb{1}_Z"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "q_1"] & X \amalg Z \arrow[r, "p_2"] & Z \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Comme $hf = q_1$, on a $\mathbb{1}_X = p_1 q_1 = (p_1 h)f$. Ainsi f est une section. De même, g est une rétraction.

Réciproquement, supposons que f est une section. Soit $f' : Y \to X$ tel que $f'f = \mathbb{1}_X$. Posons $h = q_1 f' + q_2 g$. Alors $hf = h(q_1 f' + q_2 g)f = q_1 f' f = q_1$ et $p_2 h = p_2(q_1 f' + q_2 g) = g$. Ainsi le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathbb{1}_X"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\mathbb{1}_Z"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "q_1"] & X \amalg Z \arrow[r, "p_2"] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

est commutatif. D'après le lemme 3.4.4, h est un isomorphisme. De même, la suite est scindée si g est une rétraction. Ceci achève la démonstration.

3.5. Exactitude de foncteurs

Partout dans ce chapitre, on se fixe K un anneau commutatif, et $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ des K-catégories.

3.5.1. Définition. Un foncteur covariant ou contravariant $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est dit *K-linéaire* si pour tous objets X et Y de $\mathcal{C}$, l'application $F : \mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{D}(FX, FY)$ ou $F : \mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{D}(FY, FX)$ est K-linéaire.

Exemples. Pour tout $M \in \text{Mod-}A$, les Hom-foncteurs $\text{Hom}_A(M, -)$ et $\text{Hom}_A(-, M)$ sont K-linéaires.

Des maintenant, un foncteur de K-catégories est toujours K-linéaire.

3.5.2. Proposition. Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ de K-catégories additives préserve les suites exactes courtes scindées.

Démonstration. Soient $q : X \to X \amalg Z$ et $q' : Z \to X \amalg Z$ les injections canoniques et $p : X \amalg Z \to X$ et $p' : X \amalg Z \to Z$ les projections canoniques satisfaisant les conditions énoncées dans le théorème 3.3.3. Alors les morphismes $F(q), F(q'), F(p), F(p')$ satisfont égelement ces conditions. En particulier, $F(X \amalg Z) = F(X) \amalg F(Z)$. Supposons maintenant qu'on a un diagramme commutatif à lignes exactes:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathbb{1}_X"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\mathbb{1}_Z"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "q"] & X \amalg Z \arrow[r, "p"] & Z \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

avec h un isomorphisme. Alors

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F(X) \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "\mathbb{1}_{F(X)}"'] & F(Y) \arrow[r, "Fg"] \arrow[d, "h"'] & F(Z) \arrow[r] \arrow[d, "\mathbb{1}_{F(Z)}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & F(X) \arrow[r, "Fq"] & F(X \amalg Z) \arrow[r, "Fp"] & F(Z) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif à lignes exactes avec Fh un isomorphisme. Ceci achève la démonstration.

Des maintenant, on suppose que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont abéliennes.

3.5.3. Définition. Un foncteur covariant (respectivement, contravariant) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est dit

(1) *exact* si, pour toute suite exacte $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ dans $\mathcal{C}$, la suite $FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FZ$ (respectivement, $FZ \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FX$) est exacte dans $\mathcal{D}$;

(2) *exact à gauche* si, pour toute suite exacte $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ (respectivement, $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$) dans $\mathcal{C}$, la suite $0 \to FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FZ$ (respectivement, $0 \to FZ \xrightarrow{Fg} FY \xrightarrow{Ff} FX$) est exacte dans $\mathcal{D}$;

(3) *exact à droite* si, pour toute suite exacte $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ (respectivement, $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$) dans $\mathcal{C}$, la suite $FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FZ \to 0$ (respectivement, $FZ \xrightarrow{Fg} FY \xrightarrow{Ff} FX \to 0$) est exacte dans $\mathcal{D}$.

Remarques. (1) Si F est covariant, alors F est exacte à gauche si, et seulement si, pour tout morphisme g de $\mathcal{C}$, $F(\mathrm{Ker}(g)) = \mathrm{Ker}(F(g))$; et F est exact à droite si, et seulement si, pour tout morphisme f de $\mathcal{C}$, $F(\mathrm{Coker}(f)) = \mathrm{Coker}(F(f)))$.

(2) Si F est contravariant, alors F est exacte à gauche si, et seulement si, pour tout morphisme f de $\mathcal{C}$, $F(\mathrm{Coker}(f)) = \mathrm{Ker}(F(f))$; et F est à exact à droite si, et seulement si, pour tout morphisme f de $\mathcal{C}$, $F(\mathrm{Ker}(f)) = \mathrm{Coker}(F(f)))$.

3.5.4. Proposition. Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur covariant ou contravariant. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(1) F est exact.

(2) F préserve les suites exactes courtes.

(3) F est exact à gauche et exact à droite.

Démonstration. Supposons que F est covariant. Il est trivial que (1) implique (2). Supposons que F préserve les suites exactes courtes. On prétend que F préserve les monomorphisme et les épimorphismes. En effet, tout monomorphisme $f : X \to Y$ se trouve sur une suite exacte courte $0 \to X \xrightarrow{f} Y \to Z \to 0$. D'après l'hypothèse sur F, la suite

$$0 \to FX \xrightarrow{Ff} FY \to FZ \to 0$$

est exacte. En particulier, $F(f)$ est un monomorphisme. De même, on montre que F préserve les épimorphismes.

Soit $0 \to M \xrightarrow{g} N \xrightarrow{h} L$ une suite exacte dans $\mathcal{C}$. Alors $h = ip$ avec $i : U \to L$ un monomorphisme et $p : N \to U$ un épimorphisme. En outre, $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(h) = g$. Ainsi $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{p} U \to 0$ est une suite exacte courte. Donc

$$0 \to FM \xrightarrow{Ff} FN \xrightarrow{Fp} FU \to 0$$

est exacte d'après l'hypothèse. Or $F(h) = F(ip) = F(i)F(p)$ avec $F(i)$ un monomorphisme et $F(p)$ un épimorphisme. Ainsi $\mathrm{Ker}F(h) = \mathrm{Ker}(F(p)) = F(f)$. Par conséquent,

$$0 \to FM \xrightarrow{Ff} FN \xrightarrow{Fh} FL$$

est une suite exacte. Ceci montre que F est exact à gauche. De même F est exact à droite.

Supposons enfin que F est exact à gauche et exact à droite. Alors $F(\mathrm{Ker}(f)) = \mathrm{Ker}(Ff)$ et $F(\mathrm{Coker}(f)) = \mathrm{Coker}(Ff))$ pour tout morphisme f de $\mathcal{C}$. Si $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ est une suite exacte dans $\mathcal{C}$, alors $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(f))$. Or

$$\mathrm{Ker}(Fg) = F(\mathrm{Ker}(g)) = F(\mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(f))) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(Ff)) = \mathrm{Im}(Ff),$$

c'est-à-dire, la suite $FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FZ$ est exacte dans $\mathcal{D}$. Ceci achève la démonstration.

3.5.5. Théorème. Soit $M \in \mathcal{C}$. Alors le foncteur covariant $\mathcal{C}(M, -) : \mathcal{C} \to \text{Mod-}K$ et le foncteur contravariant $\mathcal{C}(-, M) : \mathcal{C} \to \mathrm{Mod}{-}K$ sont tous exacts à gauche.

Démonstration. Soit $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ une suite exacte courte dans $\mathcal{C}$. Considérons la suite dans Mod-K suivante:

$$(*) \qquad 0 \to \mathcal{C}(M, X) \xrightarrow{\mathcal{C}(M,f)} \mathcal{C}(M, Y) \xrightarrow{\mathcal{C}(M,g)} \mathcal{C}(M, Z).$$

D'abord, si $\phi \in \mathcal{C}(M, X)$ est tel que $\mathcal{C}(M, f)(\phi) = f\phi = 0$, alors $\phi = 0$ puisque f est un monomorphisme. Donc $\mathcal{C}(M, f)$ est un monomorphisme. Ensuite pour tout $\phi \in \mathcal{C}(M, X)$, on a $\mathcal{C}(M, g)\mathcal{C}(M, f)(\phi) = gf\phi = 0$. Ainsi $\mathcal{C}(M, g)\mathcal{C}(M, f) = 0$. Enfin, soit $\psi \in \mathcal{C}(M, Y)$ est tel que $\mathcal{C}(M, g)(\psi) = g\psi = 0$. Comme f est le noyau de g, il existe $\psi' : M \to X$ tel que $\psi = f\psi' = \mathcal{C}(M, f)(\psi')$. Ceci montre que $(*)$ est exact, et donc $\mathcal{C}(M, -)$ est exact à gauche. De même, on peut montrer que $\mathcal{C}(-, M)$ est exact à gauche. La preuve se termine.

3.5.6. Théorème. Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est une équivalence ou anti-équivalence, alors F est exact.

Démonstration. Supposons que F est une équivalence. Soit $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ exacte dans $\mathcal{C}$. Alors $Fg \circ Ff = 0$. Soit $h : FY \to V$ tel que $h \circ Ff = 0$. Comme F est dense, il existe un isomorphisme $\phi : V \to FU$ dans $\mathcal{D}$ avec U on objet de $\mathcal{C}$. Comme F est fidèle et plein, il existe $\alpha \in \mathcal{C}(Y, U)$ tel que $F(\alpha) = \phi \circ h$ et $\alpha \circ f = 0$. Or $\alpha = \beta \circ g$ avec $\beta \in \mathcal{C}(Z, U)$. Ainsi $h = \phi^{-1} \circ F(\alpha) = \phi^{-1}F(\beta)Fg$. Supposons maintenant que $h = h' \circ Fg$. Alors $\phi \circ h' = F(\beta')$ avec $\beta' \in \mathcal{C}(Z, U)$. Or $F(\beta g) = F(\alpha) = \phi h = \phi h' Fg = F(\beta' g)$. Ainsi $\beta g = \beta' g$, et donc $\beta' = \beta$. Ainsi $\phi h' = F(\beta)$. Ceci donne $h' = \phi^{-1}F(\beta)$. Par conséquent, Fg est co-noyau de Ff. Donc F est exact à droite. De même, F est exact à gauche. Ceci achève la démonstration.

3.5.7. Définition. Soient $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ des foncteurs covariants. On dit que (F, G) est une *paire adjointe* si pour tout objet X de $\mathcal{C}$ et tout objet Y de $\mathcal{D}$, il existe un K-isomorphisme $\eta_{XY} : (X, GY) \to \mathcal{D}(FX, Y)$, qui est fonctoriel en X et en Y. Dans ce cas, on dit que F est un *adjoint à gauche* de G; et G est un *adjoint à droite* de F.

3.5.9. Théorème. Soient $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ des foncteurs covariants tels que (F, G) est une paire adjointe. Alors F est exact à droite et G est exact à gauche.

Démonstration. Soit $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ une exacte dans $\mathcal{C}$. Considérons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(Z, GV) \arrow[r, "{(g,GV)}"] \arrow[d, "\eta_{ZV}"'] & \mathcal{C}(Y, GV) \arrow[r, "{(f,GV)}"] \arrow[d, "\eta_{YV}"'] & \mathcal{C}(X, GV) \arrow[d, "\eta_{XV}"'] \\
\mathcal{D}(FZ, V) \arrow[r, "{(Fg,V)}"] & \mathcal{D}(FY, V) \arrow[r, "{(Ff,V)}"] & \mathcal{C}(FX, V).
\end{tikzcd}$$

On veut montrer que $Fg = \text{Coker}(Ff)$. D'abord, $Fg \circ Ff = 0$. Soit $h : FY \to V$ tel que $h \circ Ff = 0$. Posons $h' = \eta_{YV}^{-1}(h) : Y \to GV$. En vue du diagramme ci-dessus, on voit que

$$\eta_{Y,V}(h'f) = \eta_{Y,V}(h') \circ Ff = h \circ f = 0,$$

et donc $h'f = 0$. Donc il existe un unique $g' : Z \to GV$ tel que $h' = g' \circ g$. Par conséquent, $h = \eta_{Y,V}(g' \circ g) = \eta_{ZV}(g') \circ Fg$.

En outre, soit $u : FZ \to V$ tel que $h = u \circ Fg$. Posons $u' = \eta_{ZV}^{-1}(u) : Z \to GV$. Alors

$$\eta_{YV}(u'g) = \eta_{ZV}(u') \circ Fg = u \circ Fg = h.$$

Par conséquent, $u'g = \eta_{YV}^{-1}(h) = h' = g' \circ g$. Donc $u' = g'$, d'où, $u = \eta_{ZV}(g')$. Par conséquent, Fg est le co-noyau de Ff. Ceci montre que F est exact à droite. De même, on peut montrer que G est exact à gauche. La preuve se termine.

3.6. Produits fibres et sommes amalgamées

3.6.1. Définition. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie avec un diagramme commutatif de morphismes

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & X_2 \arrow[d, "g_2"] \\
X_1 \arrow[r, "g_1"'] & Y.
\end{tikzcd}$$

(1) Le diagramme s'appelle un *produit fibre* de g_1 et g_2 si pour tout diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "h_1"'] & X_2 \arrow[d, "g_2"] \\
X_1 \arrow[r, "g_1"'] & Y
\end{tikzcd}$$

de morphismes de $\mathcal{C}$, il existe un unique morphisme $h : Z \to X$ rendant commutatif le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[drr, bend left, "h_2"] \arrow[ddr, bend right, "h_1"'] \arrow[dr, dotted, "h"] & & \\
& X \arrow[r, "f_2"'] \arrow[d, "f_1"] & X_2 \arrow[d, "g_2"] \\
& X_1 \arrow[r, "g_1"'] & Y.
\end{tikzcd}$$

(2) Le diagramme s'appelle une *somme amalgamée* de f_1 et f_2 si pour tout diagramme commutatif de morphismes

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & X_2 \arrow[d, "h_2"] \\
X_1 \arrow[r, "h_1"'] & Z,
\end{tikzcd}$$

il existe un unique morphisme $h : Y \to Z$ rendant commutatif le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & X_2 \arrow[d, "g_2"'] \arrow[ddr, bend left, "h_2"] & \\
X_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[drr, bend right, "h_1"'] & Y \arrow[dr, dotted, "h"] & \\
& & Z.
\end{tikzcd}$$

Remarque. Le produit fibré et la somme amalgamée, s'ils existent, sont uniques à isomorphisme près.

On se fixe K un anneau commutatif.

3.6.2. Proposition. Soit $\mathcal{C}$ une K-catégorie avec un diagramme de morphismes

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & X_2 \arrow[d, "g_2"] \\ X_1 \arrow[r, "g_1"'] & Y. \end{tikzcd}$$

Supposons que le produit $X_1 \Pi X_2$ existe et posons

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} : X \to X_1 \Pi X_2; \text{ et } g = (g_1, \ -g_2) : X_1 \Pi X_2 \to Y.$$

(1) Le diagramme est un produit fibré de g_1 et g_2 si, et seulement si, f est le noyau de g.

(2) Le diagramme est une somme amalgamée de f_1 et f_2 si, et seulement si, g est le co-noyau de f.

Démonstration. On montre seulement (1). Supposons que le diagramme est un produit fibré de g_1 et g_2. D'abord, $gf = g_1 f_1 - g_2 f_2 = 0$. Si

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} : Z \to X_1 \Pi X_2$$

est un morphisme tel que $gh = g_1 h_1 - g_2 h_2 = 0$, alors il existe un unique morphisme $\phi : Z \to X$ tel que $h_i = f_i \phi$, c'est-à-dire, ϕ est l'unique morphisme tel que $h = f\phi$. Ceci montre que f est le noyau de g.

Supposons réciproquement que f est le noyau de g. Comme $gf = g_1 f_1 - g_2 f_2 = 0$, le diagramme est commutatif. Si $h_i : Z \to X_i$, $i = 1, 2$, sont tels que

$$0 = g_1 h_1 - g_2 h_2 = g \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.$$

Comme f est le noyau de g, il existe un unique morphisme $\phi : Z \to X$ tel que

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = f\phi = \begin{pmatrix} f_1 \phi \\ f_2 \phi \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire, ϕ est l'unique morphisme tel que $h_i = f_i \phi$, $i = 1, 2$. Ainsi le diagramme est un produit fibré de g_1 et g_2. Ceci achève la démonstration.

3.6.3. Corollaire. Soit $\mathcal{C}$ une K-catégorie abélienne. Alors le produit fibré de deux morphismes de même co-domaine ainsi que la somme amalgamée de deux morphismes de même domaine existe.

3.6.4. Proposition. Soit A une K-algèbre.

(1) Le produit fibré de deux homomorphismes $g_1 : M_1 \to M$ et $g_2 : M_2 \to M$ de A-modules est de la forme suivante:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & M_2 \arrow[d, "g_2"] \\ M_1 \arrow[r, "g_1"'] & M, \end{tikzcd}$$

où $P = \{(x_1, x_2) \in M_1 \Pi M_2 \mid g_1(x_1) = g_2(x_2)\}$ et p_i est la restriction à P de la projection canonique de $M_1 \Pi M_2$ sur M_i, $i = 1, 2$.

(2) La somme amalgamée de deux homomorphismes $f_1 : M \to M_1$ et $f_2 : M \to M_2$ de A-modules est de la forme suivante:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & M_2 \arrow[d, "s_2"] \\ M_1 \arrow[r, "s_1"'] & S, \end{tikzcd}$$

où $S = (M_1 \amalg M_2)/T$ avec $T = \{(f_1(x), f_2(x)) \mid x \in M\}$, et s_i est le composé de l'injection canonique de M_i dans $M_1 \amalg M_2$ et la projection canonique de $M_1 \amalg M_2$ sur S, $i = 1, 2$.

Démonstration. On montre seulement (1). Posons $g = (g_1, \ -g_2)$. Remarquons que

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} : P \to M_1 \Pi M_2$$

est l'inclusion. Pour tout $x = (x_1, x_2) \in M_1 \Pi M_2$, on a $x \in \ker(f)$ si, et seulement si, $g_1(x_1) - g_2(x_2) = 0$ si, et seulement si, $x \in P$ si, et seulement si, $x \in \mathrm{im}(p)$. Ainsi la suite

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{p} M_1 \Pi M_2 \xrightarrow{g} M$$

est exact. Donc diagramme est un produit fibré de g_1 et g_2. Ceci achè la démonstration.

3.6.5. Théorème. Soit $\mathcal{C}$ une K-catégorie abélienne avec un diagramme commutatif de morphismes

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & M_2 \arrow[d, "g_2"] \\ M_1 \arrow[r, "g_1"'] & N. \end{tikzcd}$$

(1) Si le diagramme est un produit fibré de g_1 et g_2, alors il existe un diagramme commutatif à lignes exactes:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_2 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & M \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & M_2 \arrow[d, "g_2"'] \\ 0 \arrow[r] & K_1 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "g_1"] & N. \end{tikzcd}$$

La réciproque est vraie si f_2 est un épimorphisme.

(2) Si le diagramme est une somme amalgamée de f_1 et f_2, alors il existe un diagramme commutatif à lignes exactes:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "g_2"'] & L_2 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & 0 \\
M_1 \arrow[r, "g_1"] & N \arrow[r] & L_1 \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

La réciproque est vraie si g_1 est un monomorphisme.

Démonstration. Supposons que le diagramme est un produit fibré de g_1 et g_2. Posons $i_1 : K_1 \to M_1$ le noyau de g_1 et $i_2 : K_2 \to M$ celui de f_2. Comme $g_1(f_1 i_2) = g_2 f_2 i_2 = 0$, il existe un morphisme $h : K_2 \to K_1$ rendant commutatif le diagramme à lignes exactes:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_2 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "h"'] & M \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & M_2 \arrow[d, "g_2"'] \\
0 \arrow[r] & K_1 \arrow[r, "i_1"] & M_1 \arrow[r, "g_1"] & N.
\end{tikzcd}$$

Remarquons qu'il existe un morphisme $j : K_1 \to M$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
K_1 \arrow[dr, "j"] \arrow[drr, bend left, "0"] \arrow[ddr, bend right, "i_1"'] & & \\
& M \arrow[r, "f_2"'] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[d, "g_2"] \\
& M_1 \arrow[r, "g_1"'] & N.
\end{tikzcd}$$

Comme $f_2 j = 0$, il existe $j_1 : K_1 \to K_2$ tel que $j = i_2 j_1$. Alors $i_1 = f_1 j = g_1 i_2 j_1 = i_1 h j_1$, et donc $h j_1 = \mathbb{1}_{K_1}$ car i_1 est un monomorphisme. Maintenant, on a un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
K_2 \arrow[dr, bend left, "i_2"] \arrow[dr, bend right, "jh"'] \arrow[drr, bend left, "0"] \arrow[ddr, bend right, "i_1 h"'] & & \\
& M \arrow[r, "f_2"'] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[d, "g_2"'] \\
& M_1 \arrow[r, "g_1"] & N.
\end{tikzcd}$$

Par l'unicité, $i_2 = jh = i_2(j_1 h)$, et donc $j_1 h = \mathbb{1}_{K_2}$ car i_2 est un monomorphisme. Ceci implique que h est un isomorphisme.

Supposons réciproquement qu'on a un diagramme commutatif à lignes exactes:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_2 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "h_1"'] & M \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "g_2"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_1 \arrow[r, "i_1"] & M_1 \arrow[r, "g_1"] & N, &
\end{tikzcd}$$

où h_1 est un isomorphisme. Comme $\mathcal{C}$ est abélienne, le produit fibré de g_1 et g_2 existe. En vue qu'on a prouve, il existe un diagramme commutatif à lignes exactes:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_3 \arrow[r, "i_3"] \arrow[d, "h_2"'] & P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & M_2 \arrow[d, "g_2"'] \\ 0 \arrow[r] & K_1 \arrow[r, "i_1"] & M_1 \arrow[r, "g_1"] & N, \end{tikzcd}$$

où h_2 est un isomorphisme et le premier carré est un produit fibré de g_1 et g_2. Or il existe un morphisme $\phi : M \to P$ tel que $f_2 = p_2\phi$ et $f_1 = p_1\phi$. Remarquons que p_2 est un épimorphisme car f_2 l'est. En outre, il existe un morphisme $\psi : K_2 \to K_3$ rendant commutatif le diagramme à lignes exactes:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_2 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "\psi"] & M \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\phi"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K_3 \arrow[r, "i_3"] \arrow[d, "h_2"] & P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K_1 \arrow[r, "i_1"] & M_1 \arrow[r, "g_1"] & N, & \end{tikzcd}$$

d'où $i_1h_2\psi = p_1\phi i_2 = f_1i_2 = i_1h_1$. Comme i_1 est un monomorphisme, $h_2\psi = h_1$. Comme h_1 et h_2 sont des isomorphisme, ψ l'est aussi. D'après le lemme 3.4.4, ϕ est un isomorphisme. Ceci achève la démonstration.

3.6.6. Corollaire. Soit $\mathcal{C}$ une K-catégorie abélienne avec un diagramme de morphismes

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & M_2 \arrow[d, "g_2"] \\ M_1 \arrow[r, "g_1"'] & N. \end{tikzcd}$$

(1) Si le diagramme est un produit fibré de g_1 et g_2, alors g_1 (respectivement, g_2) est un monomorphisme si et seulement si f_2 (respectivement, f_1) l'est.

(2) Si le diagramme est une somme amalgamée de f_1 et f_2, alors f_1 (respectivement, f_2) est un épimorphisme si et seulement si g_2 (respectivement, g_2) l'est.

(3) Le diagramme est un produit fibré de g_1 et g_2 ainsi qu'une somme amalgamée de f_1 et f_2 si, et seulement si, la suite suivante est exacte:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}} M_1 \amalg M_2 \xrightarrow{(g_1,\, -g_2)} N \longrightarrow 0.$$

Chapitre IV: Modules projectifs et injectifs

4.1. Modules libres

Soit A une algèbre sur un anneau commutatif K.

4.1.1. Définition. Soit $M \in$ Mod-A. Une famille X d'éléments de M s'appelle une A-*base* si elle satisfait aux conditions suivantes:

(1) Tout $y \in M$ s'écrit $y = x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n$ avec $x_i \in X, a_i \in A$.

(2) Si $x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n = 0$ avec $x_i \in X, a_i \in A$, alors $a_i = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Dans ce cas, on dit que M est *libre*.

Exemple. (1) Le module nul est *libre* ayant pour A-base l'ensemble vide.

(2) Soit Λ un ensemble d'indice. Posons $M_\lambda = A_A$. Alors le co-produit $\amalg_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ est libre ayant pour A-base $\{x_\lambda = (\delta_{\lambda,\mu})_{\mu\in\Lambda} \mid \lambda \in \Lambda\}$, où $\delta_{\lambda,\lambda} = 1_A$ et $\delta_{\lambda,\mu} = 0$ pour tout $\mu \neq \lambda$.

(3) Le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}_n$ avec $n > 1$ n'est pas libre.

4.1.2. Théorème. Soit M un A-module avec X une famille non vide d'éléments de M. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(1) X est une A-base de M.

(2) $M = \oplus_{x\in X} xA$.

(3) Pour toute fonction f de X dans un A-module N, il existe un unique homomorphisme $\phi : M \to N$ tel que $f = \phi i$, où $i : X \to M$ est l'inclusion.

Démonstration. Il est évident que (1) implique (2).

Supposons que $M = \oplus_{x\in X} xA$. Étant donnée une fonction $f : X \to N$, l'application $\phi : \sum_{x\in X} xa_x \mapsto \sum_{x\in X} f(x)a_x$ est le seul homomorphisme tel que $f = \phi i$.

Supposons que la condition en (3) est satisfaite. Posons $N = \sum_{x\in X} xA$ et considérons l'inclusion $j : X \to N$. D'après l'hypothèse, il existe un homomorphisme $\phi : M \to N$ tel que $j = \phi i$. Or l'inclusion $l : N \to M$ est tel que $i = lj = l\phi i$. D'après l'unicité pour l'inclusion $i : X \to M$, on a $l\phi = \mathbb{1}_M$. Par conséquent, l est surjectif, c'est-à-dire, $M = \sum_{x\in X} xA$.

Soient $x_1, \ldots, x_n \in X$ deux à deux distincts. Supposons que $x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n = 0$ avec $a_k \in A$. On se fixe un k avec $1 \leq k \leq n$. Soit $f_k : X \to A$ la fonction définie par

$$f_k(y) = \begin{cases} 1_A, & \text{si } y = x_k; \\ 0_A, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors il existe un homomorphisme $\phi_k : M \to A$ tel que $f_k = \phi_k i$. Donc

$$0 = \phi_k(\sum_{r=1}^n x_ra_r) = \sum_{r=1}^n \phi_k(x_r)a_r = \sum_{r=1}^n f_k(x_r)a_r = 1_Aa_k = a_k.$$

Donc X est une A-base de M. Ceci achève la démonstration.

4.1.3. Corollaire. Un A-module M est libre si et seulement si $M \cong \amalg_{\lambda\in\Lambda} A_A$ pour un ensemble d'indice Λ.

4.1.4. Théorème. Soient $M, N \in$ Mod-A libres ayant pour bases X, Y respectivement. Si X et Y ont le même cardinal, alors $M \cong N$.

Démonstration. Supposons que X et Y ont le même cardinal. Alors il existe des fonctions $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ telles que $fg = \mathbb{1}_X$ et $gf = \mathbb{1}_Y$. Soient $i : X \to M$ et $j : Y \to N$ les inclusions. Alors il existe des homomorphismes $\phi : M \to N$ et $\psi : N \to M$ tels que $jf = \phi i$ et $ig = \psi j$. Donc $i = igf = \psi jf = \psi\phi i = \mathbb{1}_M i$. Par conséquent, $\psi\phi = \mathbb{1}_M$. De même $\phi\psi = \mathbb{1}_N$. Ceci achève la démonstration.

Remarque. La réciproque du théorème 4.1.4 n'est pas vraie. Soit V un espace vectoriel de dimension infinie sur un corps K et considérons la K-algèbre $A = \mathrm{End}_K(V)$. On voit aisément $V \cong_K V \amalg V$. Donc $\mathrm{Hom}_K(V,V) \cong_K \mathrm{Hom}_K(V,V) \amalg \mathrm{Hom}_K(V,V)$. Ainsi $A \cong_K A \amalg A$. En fait, il s'agit d'un isomorphisme de A-modules. Par conséquent, $A \cong_A A \amalg A$. Or A_A a pour base $\{1_A\}$, mais $A_A \amalg A_A$ a pour base $\{(1_A, 0), (0, 1_A)\}$.

4.1.5. Théorème. Soit X un ensemble. Il existe un A-module libre $L(X)$, unique à isomorphisme près, ayant pour base X.

Démonstration. Posons $L(X)$ l'ensemble des combinaisons linéaires formelles

$$x_1a_1 + \cdots + x_na_n;\ n \geq 1, x_i \in X, a_i \in A.$$

On voit aisément que $L(X)$ est un A-module à droite pour les opérations naturelles, et X est une A-base de $L(X)$.

Remarque. On a $L(X) \cong \amalg_{\lambda\in\Lambda} A_A \cong \{$ les fonctions $f : X \to A\}$.

4.1.6. Théorème. Supposons que K est un corps et A est un sur-corps de K. Alors tout A-module est libre.

Démonstration. Soit $M \in$Mod-A non nul. Prenons $0 \neq x \in M$. Comme A est un corps gauche, $\{x\}$ est A-libre. Donc la classe Σ des familles A-libres X de M est non vide. Il est claire que la réunion d'une chaîne de familles A-libres est A-libre. D'après le lemme de Zorn, Σ admet un élément maximal X_0. Alors pour tout $y \in M$, la famille $X_0 \cup \{y\}$ est A-liée. Comme X_0 est A-libre et A est un corps gauche, on voit que $y \in \sum_{x\in X_0} xA$. Ceci montre que X_0 est une base de M. La preuve se termine.

4.1.7. Proposition. Soit M un A-module. Il existe un A-module libre L et un épimorphisme $f : L \to M$ dans Mod-A. En outre, si M est de type fini, alors L peut être choisi de type fini.

Démonstration. On choisit une famille X d'éléments de M tel que $M =< X >$. Si M est de type fini, on peut choisir une famille finie X. Soit $L(X)$ un A-module libre ayant pour A-base X. Soit $j : X \to M$ l'inclusion. Alors il existe une application A-linéaire $\phi : L(X) \to M$ tel que $\phi_X = j$. Comme $M =< X >$, on voit que ϕ est surjectif. Ceci achève la démonstration.

4.2. Modules projectifs

Soient K un anneau commutatif et A une K-algèbre.

4.2.1. Définition. Un A-module P est dit *projectif* si tout diagramme à ligne exacte

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\phi"] & \\ M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

d'homomorphismes de A-modules peut être complété en un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\phi"] \arrow[dl, dotted, "\psi"'] & \\ M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire, $\mathrm{Hom}_A(P, f)$ est surjectif lorsque f est surjectif.

4.2.2. Proposition. Tout A-module libre est projectif. En particulier, A_A est projectif.

Démonstration. Soit X une A-base de L. Soient $f : M \to N$ et $\phi : L \to N$ des homomorphismes de A-modules avec f un épimorphisme. Alors pour tout $x \in X$, il existe $u_x \in M$ tel que $f(u_x) = \phi(x)$. Pour la fonction $j : X \to M : x \mapsto u_x$, il existe un homomorphisme $\psi : L \to M$ de A-modules tel que $\psi|_X = j$. Pour tout $x \in X$, on a $(f\psi)(x) = f(u_x) = \phi(x)$. Ceci donne $f\psi = \phi$. La preuve se termine.

Exemple. Si D est un sur corps de K, alors tout D-module est libre, et donc projectif.

4.2.3. Théorème. Soient $\{P_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ une famille de A-modules et $P = \amalg_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$. Alors P est projectif si, et seulement si, P_λ est projectif pour tout $\lambda \in \Lambda$.

Démonstration. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, soient $q_\lambda : P_\lambda \to P$ l'injection canonique et $p_\lambda : P \to P_\lambda$ la projection. Remarquons que $p_\lambda q_\lambda = \mathbb{1}_{P_\lambda}$.

Supposons que P est projectif. Soit $f : M \to N$ un épimorphisme de A-modules. Si $\phi : P_\lambda \to N$ est un homomorphisme, alors il existe un homomorphisme $\psi : P \to M$ tel que $\phi p_\lambda = f\psi$. Donc $\phi = \phi\mathbb{1}_{P_\lambda} = \phi p_\lambda q_\lambda = f(\psi q_\lambda)$. Donc P_λ est projectif.

Supposons réciproquement que P_λ est projectif pour tout $\lambda \in \Lambda$. Soit $f : M \to N$ un épimorphisme de A-modules. Si $\phi : P \to N$ est un homomorphisme, alors il existe $\psi_\lambda : P_\lambda \to M$ tel que $\phi q_\lambda = f\psi_\lambda$ puisque P_λ est projectif. D'après la définition du coproduit, il existe $\psi : P \to M$ tel que $\psi_\lambda = \psi q_\lambda$, pour tout $\lambda \in \Lambda$. Donc $\phi q_\lambda = (f\psi)q_\lambda$, pour tout $\lambda \in \Lambda$. Il s'en suit que $\phi = f\psi$. Donc P est projectif. La preuve se termine.

Remarque. En général, le produit d'une famille de modules projectifs n'est pas projectif.

4.2.4. Théorème. Soit P un A-module. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(1) P est projectif.

(2) Le foncteur covariant $\mathrm{Hom}_A(P, -)$ est exact.

(3) Toute suite exacte courte $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ d'homomorphismes de A-modules est scindée.

(4) Tout épimorphime $g : M \to P$ de A-modules est une rétraction.

(5) P est un facteur d'un A-module libre.

Démonstration. On sait que $\mathrm{Hom}_A(P, -)$ est exact à gauche. Si P est projectif, alors $\mathrm{Hom}_A(P, f)$ est un épimorphisme pour tout épimorphisme f dans Mod-A. Ainsi $\mathrm{Hom}_A(P, -)$ est exact.

Si $\mathrm{Hom}_A(P, -)$ est exact, alors $\mathrm{Hom}_A(P, g)$ est surjectif. Donc il existe $h \in \mathrm{Hom}_A(P, N)$ tel que $\mathbb{1}_N = \mathrm{Hom}_A(P, g)(h) = hg$, c'est-à-dire, la suite est scindée.

Supposons que (3) est valide. Si $g : M \to P$ est un épimorphisme, alors la suite exacte courte $0 \to \ker g \to M \xrightarrow{g} P \to 0$ est scindée. Donc g est une rétraction.

Supposons que (4) est valide. On a toujours un épimorphisme $g : L \to P$ avec L libre. Comme g est une rétraction, on a que P est un facteur direct de L.

Supposons enfin qu'il existe un module Q tel que $P \amalg Q = L$ est libre. Ainsi L est projectif. Par conséquent, P l'est. Ceci achève la démonstration.

4.2.5. Corollaire. Soit A une K-algèbre. Si e est un idempotent (c'est-à-dire, $e^2 = e$) de A, alors eA est un A-module projectif à droite et Ae est un A-module projectif à gauche.

Démonstration. Posons $f = 1 - e$. Comme $e^2 = e$, on a $f^2 = f$ et $ef = fe = 0$. Il est claire que $A_A = eA + fA$. Si $x \in eA \cap fA$, alors $x = ex = fx$, et donc $x = ex = e(fx) = 0$. Donc $A_A = eA \oplus fA$. Par conséquent, eA est projectif.

Exemple. Soit $A = KQ$ l'algèbre des chemins d'un carquois fini Q sur un corps K. Si a est un sommet de Q, alors a est un idempotent de A. Donc Aa est un A-module projectif à gauche, qui est composé des combinaisons linéaires des chemins de source a.

4.2.6. Proposition. Pour tout A-module M, il existe une suite exacte

$$\cdots \to P_n \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0,$$

avec les P_j projectifs, appelée une *résolution projective* de M.

Démonstration. D'abord, il existe une suite exacte $P_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0$ avec P_0 projective. Supposons que $n \geq 0$ et on a une suite exacte $P_n \xrightarrow{f_n} \cdots \to P_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0$ avec les P_j projectifs. Posons $K_n = \ker(f_n)$ et $i_n : K_n \to P_n$ l'inclusion. Or il existe un épimorphisme $g_{n+1} : P_{n+1} \to K_n$ avec P_{n+1} projective. Posons $f_{n+1} = i_n g_n$. Alors $\operatorname{im}(f_{n+1}) = K_n = \ker(f_n)$. Par conséquent,

$$P_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} P_n \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0$$

est exacte. D'où le résultat.

4.2.7. Définition. Soit M un A-module. Une suite exacte

$$P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0$$

avec les P_j projectifs s'appelle *présentation projective* de M. En outre, M est dite de *présentation finie* si P_1 et P_0 sont de type fini.

4.2.8. Lemme de Schanuel. Si l'on a deux suites exactes courtes de A-homomorphismes

$$0 \to K \to P \to M \to 0 \quad \text{et} \quad 0 \to L \to Q \to M \to 0$$

avec P et Q projectifs, alors $P \amalg L \cong Q \amalg K$.

Démonstration. La projectivité de P donne un diagramme commutatif à lignes exactes:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & P \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "\mathbb{1}_M"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "j"] & Q \arrow[r] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

En vue du théorème 3.6.5(2), le premier carré est une somme amalgamée de i et f. Ainsi on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\begin{pmatrix} i \\ f \end{pmatrix}} P \amalg L \xrightarrow{(g,-j)} Q \longrightarrow 0.$$

Ici on a l'exactitude en K car i est injective. Comme Q est projectif, la suite est scindée. Ceci donne $P \amalg L \cong Q \amalg K$. La preuve se termine.

4.3. Couvertures projectives

Soient K un anneau commutatif et A une K-algèbre.

4.3.1. Définition. (1) Soit M un A-module. Un sous-module N de M est dit *superflu* si pour tout sous-module L avec $L \neq M$, on a $N + L = M$.

Exemples. (1) Le sous-module nul 0 de M est superflu.

(2) Le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}$ n'a pas de sous-module non nul superflu. En effet, si N est un sous-module non nul, alors il existe un entier non nul n tel que $N = n\,\mathbb{Z}$. Prenons m un entier tels que m, n sont co-premiers. Alors $L = m\,\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} = N + L$.

4.3.2. Proposition. Soit M un A-module de type fini non nul. Alors un sous-module N est superflu si, et seulement si, N est contenu dans l'intersection des sous-modules maximaux de M.

Démonstration. S'il existe un sous-module maximal L de M tel que $N \not\subseteq M$, alors $N + L = M$ avec $L \neq M$. Donc N n'est pas superflu.

Supposons maintenant que N est contenu dans l'intersection des sous-modules maximaux de M. Si L est un sous-module de M avec $L \neq M$, alors $L \subseteq L_0$ avec L_0 un sous-module maximal de M. Comme $N \subseteq L_0$, on a $N + L \subseteq L_0 \neq M$. Ainsi N est superflu dans M. Ceci achève la démonstration.

4.3.3. Définition. Soit $f : M \to N$ un épimorphisme de A-modules.

(1) On dit que f est dit *superflu* si $\ker(f)$ est superflu dans M.

(2) On dit que f est *minimal* si pour tout homomorphisme $g : L \to M$ de A-modules, fg est surjectif si et seulement si g est surjectif.

Remarques. (1) Un isomorphisme est un épimorphisme superflu.

(2) Si $f : M_1 \oplus \cdots \oplus M_n \to N$ est un épimorphisme minimal avec les M_i tous non nuls, alors $f|_{M_i} \neq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. En effet, si $f|_{M_1} = 0$, alors l'inclusion $j : M_2 \oplus \cdots \oplus M_n \to N$ est non surjectif tel que fj est surjectif.

4.3.4. Lemme. Soit $f : M \to N$ un épimorphisme de A-modules. Alors f est superflu si, et seulement si, f est minimal.

Démonstration. Supposons que f est superflu. Soit $g : L \to M$ tel que fg est un épimorphisme. Pour tout $x \in M$, $f(x) = (fg)(y)$ avec $y \in L$. Ainsi $z = x - g(y) \in \ker(f)$. Ceci implique $M = \mathrm{im}(g) + \ker(f)$. Donc $\mathrm{im}(f) = M$ car $\ker(f)$ est superflu dans M. Ainsi f est minimal.

Supposons réciproqument que f est minimal. Soit L un sous-module de M tel que $\ker(f) + L = M$. Considérons l'inclusion $i : L \to M$. Soit $y \in N$. Comme f est surjectif, il existe $x_1 \in \ker(f)$ et $x_2 \in L$ tels que $y = f(x_1 + x_2) = f(x_2) = (fi)(x_2)$. Ainsi fi est surjectif. Comme f est minimal, i est surjectif, c'est-à-dire, $L = M$. D'ou, $\ker(f)$ est superflu dans M. Ceci achève la démonstration.

4.3.5. Définition. Soit M un A-module. Une *couverture projective* de M est un épimorphisme minimal $\varepsilon : P \to M$ avec P projectif. Dans ce cas, on dit aussi que P est une *couverture projective* de M.

Le résultat suivant dit qu'un module admet au plus une couverture projective à isomorphisme près.

4.3.6. Théorème. Soit $\varepsilon : P \to M$ une couverture projective d'un A-module M. Si $\varepsilon' : P' \to M$ est un épimorphisme avec P' projectif, alors il existe une rétraction $g : P' \to P$ tel que $\varepsilon' = \varepsilon g$. En outre, g est un isomorphisme si $\varepsilon' : P' \to M$ est également une couverture projective de M.

Démonstration. Comme P' est projectif, il existe $g : P' \to P$ tel que $\varepsilon' = \varepsilon g$. La minimalité de f entraîne que g est un épimorphisme. Et la projectivité de P entraîne que g est une rétraction. Soit $g' : P \to P'$ tel que $gg' = \mathbb{1}_P$. Alors $\varepsilon' g' = \varepsilon g g' = \varepsilon$. Si ε' est également minimal, alors g' est surjectif, et donc un isomorphisme. Par conséquent, g est un isomorphisme. Ceci achève la démonstration.

Remarque. Si M est projectif, alors $\mathbb{1}_M : M \to M$ est une couverture projective. Donc un épimorphisme $\varepsilon : P \to M$ avec P projectif est une couverture projective de M si, et seulement si, ε est un isomorphisme.

Remarquons qu'un module n'a pas nécessairment de couverture projective.

Exemple. Le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}_2$ n'a pas de couverture projective. En effet, la projection canonique $p : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$ est un épimorphisme non minimal. Supposons au contraire que $\varepsilon : P \to \mathbb{Z}_2$ est une couverture projective de $\mathbb{Z}_2$. Alors il existe une rétraction $g : \mathbb{Z} \to P$ telle que $p = \varepsilon g$. Étant un facteur direct de $\mathbb{Z}$, $\ker(g) = 0$. Donc g est un isomorphisme. Ceci implique que p est une couverture projective, une contradiction.

4.3.7. Définition. Soit M un A-module. Une résolution projective

$$\cdots \to P_n \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0,$$

de M est dite *minimale* si $\ker(f_n)$ est superflu dans P_n, pour tout $n \geq 0$. Dans ce cas,

$$P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0$$

s'appelle une *présentation projective minimale* de M.

Il suit du théorème 4.3.6 que la résolution projective minimale d'un module, si elle existe, est unique à isomorphisme près. Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la proposition 4.3.2 et le lemme 4.3.4.

4.3.8. Lemme. Soit P un A-module projectif de type fini. Alors un épimorphisme $f : P \to M$ est une couverture projective de M si, et seulement si, $\ker(\varepsilon)$ est contenu dans l'intersection des sous-modules maximaux de P.

Exemple. Soient K un corps avec $\lambda \in K$ non nul et Q le carquois suivant:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$

Soit $A = KQ/I$, où $I =< \beta\alpha + \lambda\alpha\beta, \alpha^2, \beta^2 >$. Alors $A = K < \bar{a}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\alpha}\bar{\beta} >$ et $L = K < \bar{\alpha}, \bar{\beta} >$ est le seul sous-module maximal de A_A. Posons $M_n = (\bar{\alpha} + \lambda^n\bar{\beta})A$ et $\varepsilon_n : A \to M_n$ la multiplication par $(\bar{\alpha} + \lambda^n\bar{\beta})$ à gauche. Comme $\ker(\varepsilon_n) = M_{n+1} \subseteq L$, on voit que ε_n est la couverture projective de M_n. Par conséquent, M_0 admet une résolution projective minimale suivante:

$$\cdots \to A \xrightarrow{\phi_n} A \to \cdots \to A \xrightarrow{\phi_1} A \xrightarrow{\phi_0} M_0 \to 0,$$

où ϕ_n est la multiplication par $(\bar{\alpha} + \lambda^n\bar{\beta})$ à gauche.

4.4. Modules injectifs

Soient K un anneau commutatif et A une K-algèbre.

4.4.1. Définition. Un A-module I est dit *injectif* si tout diagramme à ligne exacte

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"] & N \\ & I & \end{tikzcd}$$

d'homomorphismes de A-modules peut être complété en un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"] & N \arrow[dl, dotted, "\psi"] \\ & I, & \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire, $\mathrm{Hom}_A(f, I)$ est surjectif lorsque f est injectif.

Exemple. Le module 0 est injectif.

4.4.2. Théorème. Soient $\{I_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ une famille de A-modules.

(1) Le produit $\Pi_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ est injectif si, et seulement si, I_λ est injectif pour tout $\lambda \in \Lambda$.

(2) Si le co-produit $\amalg_{\lambda\in\Lambda}$ est injectif, alors I_λ est injectif pour tout $\lambda \in \Lambda$. La réciproque n'est pas vraie en générale.

Démonstration. Posons $I = \amalg_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, soient $p_\lambda : I \to I_\lambda$ la projection canonique et $q_\lambda : I_\lambda \to I$ l'injection. Remarquons que $p_\lambda q_\lambda = \mathbb{1}_{I_\lambda}$. Soit $f : M \to N$ un monomorphisme de A-modules.

Supposons que I est injectif. Soit $f : M \to N$ un monomorphisme de A-modules. Si $\phi : M \to I_\lambda$ est un homomorphisme, alors il existe un homomorphisme $\psi : N \to I$ tel que $q_\lambda\phi = \psi f$. Donc $\phi = p_\lambda q_\lambda \phi = (p_\lambda\psi)f$. Donc I_λ est injectif, pour tout $\lambda \in \Lambda$. De même, on peut montrer que si $\amalg_{\lambda\in\Lambda}$ est injectif, alors I_λ est injectif pour tout $\lambda \in \Lambda$.

Supposons réciproquement que I_λ est injectif pour tout $\lambda \in \Lambda$. Soit $f : M \to N$ un monomorphisme de A-modules. Si $\phi : M \to I$ est un homomorphisme, alors pour tout $\lambda \in \Lambda$, il existe $\psi_\lambda : N \to I_\lambda$ tel que $p_\lambda\phi = \psi_\lambda f$. D'après la définition du produit, il existe $\psi : N \to I$ tel que $\psi_\lambda = p_\lambda\psi$, pour tout $\lambda \in \Lambda$. Donc $p_\lambda\phi = \psi_\lambda f = p_\lambda\psi f$, pour tout $\lambda \in \Lambda$. Il s'en suit que $\phi = \psi f$. Donc I est injectif. La preuve se termine.

4.4.3. Théorème. Soit I un A-module. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(1) I est injectif.

(2) Le foncteur contravariant $\mathrm{Hom}_A(-, I)$ est exact.

(3) Toute suite exacte courte $0 \to I \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ d'homomorphismes de A-modules est scindée.

(4) Tout monomorphisme $g : I \to N$ de A-modules est une section.

Démonstration. On sait que $\mathrm{Hom}_A(-, I)$ est exact à gauche. Si I est injectif, alors $\mathrm{Hom}_A(-, I)$ est exact à droite, et donc exact.

Supposons que $\mathrm{Hom}_A(-, I)$ est exact. Si $0 \to I \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ est exact, alors $\mathrm{Hom}_A(f, I) : \mathrm{Hom}_A(M, I) \to \mathrm{Hom}_A(I, I)$ est exact. Ainsi il existe $h : M \to I$ tel que $\mathbb{1}_I = \mathrm{Hom}_A(f, I)(h) = hf$, c'est-à-dire, f est une section. Ainsi la suite exacte courte est scindée.

Il est trivial que (3) implique (4). Supposons que (4) est valide. Soient $f : M \to N$ un monomorphisme et $\phi : M \to I$ un homomorphisme de A-modules. Soit

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & N \arrow[d, "\psi"] \\ I \arrow[r, "h"] & U. \end{tikzcd}$$

la somme amalgamée de f et ϕ. Comme f est un monomorphisme, on a une suite exacte:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\begin{pmatrix} f \\ \phi \end{pmatrix}} N \amalg I \xrightarrow{(\psi,\, -h)} U \longrightarrow 0.$$

Ceci signifie que le diagramme est aussi un produit fibré de ψ et h. Par conséquent, h est un monomorphisme car f l'est. D'après (4), il existe $g : U \to I$ tel que $gh = \mathbb{1}_I$. Donc $\phi = (g\psi)f$. Ceci montre que I est injectif. La preuve se termine.

Remarque. Tout A-module est projectif si, et seulement si, tout A-module est injectif. En particulier, si D est un sur corps de K, alors tout D-module est injectif.

4.4.4. Critère de Baer. Soit I un A-module à droite. Les conditions suivantes sont éqivalentes:

(1) Le module I est injectif.

(2) Si J est un idéal à droite de A, alors tout A-homomorphisme $\phi : J \to I$ est donné par $\phi(a) = xa$ pour un élément $x \in I$.

(3) Si J est un idéal à droite de A, tout A-homomorphisme $\phi : J \to I$ se prolonge en une application A-linéaire $\psi : A \to I$.

Démonstration. Supposons que I est injectif. Si $\phi : J \to I$ est A-linéaire, alors il existe une application A-linéaire $\psi : A \to I$ telle que $\psi|_J = \phi$. Or $x = \phi(1_A) \in I$ est tel que pour tout $a \in J$, $\phi(a) = \psi(a) = \psi(1)a = xa$.

Il est triviale que (2) implique (3). Supposons enfin que (3) est valide. Soit M un sous-module d'un A-module N, et soit $\phi : M \to I$ un homomorphisme. Posons Σ l'ensemble des couples (Q, ψ), où Q est un sous-module de N contenant M et $\psi : Q \to I$ est un homomorphisme tel que $\psi|_M = \phi$. On définit un ordre $\leq$ sur Σ par $(Q_1, \psi_1) \leq (Q, \psi)$ si $Q_1 \subseteq Q$ et $\psi|_{Q_1} = \psi$. Il est évident que toute chaîne d'éléments de Σ admet une borne supérieure. D'après le lemme de Zorn, Σ admet un élément maximal (Q_0, ψ_0). Supposons au contraire que $Q_0 \neq N$. Prenons $x \in N$ tel que $x \notin Q_0$. Alors $J = \{a \in A \mid xa \in Q_0\}$ est un idéal à droite de A. Remarquons que l'application

$$g : J \to I : a \mapsto \psi_0(xa)$$

est A-linéaire. D'après (3), il existe un homomorphisme $h : A \to I$ tel que $h_J = g$. Définissons $\psi_1 : Q_0 + xA \to I$ par $\psi_1(y + xa) = \psi_0(y) + h(a)$, pour tous $y \in Q_0,\ a \in A$. Ceci est correctement défini. En effet, si $y + xa = y' + xa'$ avec $y, y' \in Q_0,\ a, a' \in A$, alors $x(a' - a) = y - y' \in Q_0$. Donc $a - a' \in J$. Or

$$h(a' - a) = g(a' - a) = \psi_0(x(a' - a)) = \psi_0(y - y'),$$

d'où, $\psi_0(y) + h(a) = \psi_0(y') + h(a')$. On voit aisément que ψ_1 est A-linéaire telle que $\psi_1|_{Q_0} = \psi_0$, une contradiction. Donc $Q_0 = N$, et donc ϕ se prolonge en N. Par conséquent, I est injectif. Ceci achève la démonstration.

4.4.5. Lemme. Un $\mathbb{Z}$-module M est injectif si, et seulement si, M est divisible.

Démonstration. Supposons que M est injectif. Si $n \in \mathbb{Z}$ est non nul et $x \in M$, alors $\phi : n\,\mathbb{Z} \to M : na \mapsto xa$ est $\mathbb{Z}$-linéaire. Or ϕ se prolonge en une application $\mathbb{Z}$-linéaire $\psi : \mathbb{Z} \to M$. Ainsi $x = \phi(n) = \psi(n) = \psi(1)n$. Ceci montre que M est divisible.

Réciproquement, supposons que M est divisible. Soient $n \in \mathbb{Z}$ non nul et $\phi : n\mathbb{Z} \to M$ une application $\mathbb{Z}$-linéaire. Or $\phi(n) = yn$ pour un $y \in M$. Pour tout $na \in n\mathbb{Z}, \phi(na) = \phi(n)a = y(na)$. D'après 4.4.4(2), M est injectif. Ceci achève la démonstration.

Remarque. Comme un quotient d'un $\mathbb{Z}$-module divisible est divisible, un quotient d'un $\mathbb{Z}$-module injectif est injectif.

Exemples. On voit que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sont des $\mathbb{Z}$-modules injectifs, mais que $\mathbb{Z}$ est non injectif.

4.4.6. Corollaire. Tout $\mathbb{Z}$-module M est un sous-module d'un $\mathbb{Z}$-module injectif.

Démonstration. On a un épimorphisme $f : \amalg_{\lambda\in\Lambda} \mathbb{Z} \to M$ de $\mathbb{Z}$-modules. Donc $M \cong (\amalg_{\lambda\in\Lambda} \mathbb{Z})/\ker(f)$, qui est un sous-module de $(\amalg_{\lambda\in\Lambda} \mathbb{Q})/\ker(f)$. Ce dernier est divisible, et donc injectif. Ceci achève la démonstration.

4.4.7. Lemme. Si I est un $\mathbb{Z}$-module injectif, alors $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}({}_AA, I)$ est un A-module à droite injectif.

Démonstration. Soient J un idéal à droite de A et $\phi : J \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}({}_AA, I)$ un homomorphisme de A-modules. Considérons le $\mathbb{Z}$-homomorphisme $\gamma : J \to I : b \mapsto \phi(b)(1_A)$. Comme I est $\mathbb{Z}$-injectif, il existe $\delta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, I)$ tel que $\delta|_J = \gamma$. Or pour tous $b \in J,\ a \in A$, on a $(\delta b)(a) = \delta(ba) = \gamma(ba) = \phi(ba)(1_A) = (\phi(b)a)(1) = \phi(b)(a \cdot 1_A) = \phi(b)(a)$. Donc $\phi(b) = \delta b$, pour tout $b \in J$. Donc $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}({}_AA, I)$ est injectif d'après 4.4.4(2). Ceci achève la démonstration.

4.4.8. Théorème. Pour tout A-module M, il existe un A-monomorphisme $f : M \to I$ avec I injective.

Démonstration. Comme M est un $\mathbb{Z}$-module, il existe une suite exacte $0 \to M \to Q$ de $\mathbb{Z}$-modules avec Q injectif. En appliquant le foncteur exact à gauche $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}({}_AA, -)$, on a une suite exacte $0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}({}_AA, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}({}_AA, Q)$ dans Mod-A. Or $M \cong_A \mathrm{Hom}_A({}_AA, M)$, un sous-module de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}({}_AA, M)$. Donc on a une suite exacte $0 \to M \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}({}_AA, Q)$ dans Mod-A avec $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}({}_AA, Q)$ injectif. Ceci achève la démonstration.

4.4.9. Corollaire. Pour tout A-module, il existe une suite exacte

$$0 \to M \xrightarrow{f_0} I_0 \xrightarrow{f_1} I_1 \to \cdots \to I_{n-1} \xrightarrow{f_n} I_n \to \cdots$$

de A-homomorphismes avec les I_j injectifs, appelée une *co-résolution injective* de M. En outre, on appelle

$$0 \to M \xrightarrow{f_0} I_0 \xrightarrow{f_1} I_1$$

une *co-présentation injective* de M.

4.4.10. Définition. Un module injectif I de Mod-A s'appelle un *co-générateur injectif* de Mod-A si $\mathrm{Hom}_A(M, I) \neq 0$, pour tout module non nul M de Mod-A.

Exemple. Le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est un co-générateur injectif de Mod- $\mathbb{Z}$. En effet, soit M un $\mathbb{Z}$-module non nul. Prenons $x \in M$ non nul. On définit un $\mathbb{Z}$-homomorphisme $\phi : \mathbb{Z}x \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ par $\phi(x) = \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ si x est d'ordre infini et par $\phi(x) = \frac{1}{n} + \mathbb{Z}$ si x est d'ordre n. Comme $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est injectif, ϕ se prolonge en $\mathbb{Z}$-homomorphisme $\psi : M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ qui est non nul car ϕ est non nul.

4.4.11. Proposition. Il existe un co-générateur injectif de Mod-A.

Démonstration. Soit $\{I_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ l'ensemble des idéaux à droite de A. Posons $N = \amalg_{\lambda\in\Lambda} A/I_\lambda$. D'après le lemme 4.4.8, il existe un monomorphisme $f : N \to Q$ avec Q injectif. Soit M un A-module ayant un élément non nul x. Comme $xA \cong A/I_0$ avec I_0 un idéal à droite, il existe un monomorphisme $g : xA \to N$. Comme Q est injectif, le monomorphisme $fg : xA \to Q$ se prolonge en un homomorphisme non nul $h : M \to Q$. Ceci achève la démonstration.

4.4.12. Théorème. Soit I un co-générateur injectif de Mod-A. Une suite de A-homomorphismes $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ est exacte si, et seulement si, la suite suivante est exacte:

$$\mathrm{Hom}_A(N, I) \xrightarrow{(g,I)} \mathrm{Hom}_A(M, I) \xrightarrow{(f,I)} \mathrm{Hom}_A(L, I).$$

Démonstration. Il suffit de montrer la suffisance. Si $gf \neq 0$, alors il existe $x \in L$ tel que $y = (gf)(x) \neq 0$. Comme I est un co-générateur injectif, il existe un A-homomorphisme non nul $yA \to I$, qui se prolonge en un A-homomorphisme $h : N \to I$. Ceci donne $0 \neq h(gf) = (f, I)(g, I)(h)$, une contradiction. Ainsi $gf = 0$.

Supposons qu'il existe $x \in \ker(g)$ et $x \notin \mathrm{im}(f)$. Soit $p : M \to C$ le co-noyau de f. Alors $p(x) \neq 0$. Comme I est un co-générateur injectif, il existe un A-homomorphisme $q : C \to I$ tel que $q(p(x)) \neq 0$. Comme $qpf = 0$, on a $qp \in \ker(f, I) = \mathrm{im}(g, I)$. C'est-à-dire, il existe $h : N \to I$ tel que $qp = hg$. Par conséquent, $q(p(x)) = h(g(x)) = h(0) = 0$, une contradiction. Ceci achève la démonstation.

4.5. Enveloppes injectives

Soient K un anneau commutatif et A une K-algèbre.

4.5.1. Définition. Soit N un A-module. Un sous-module M de N est dit *essentiel* dans N si $M \cap L \neq 0$ pour tout sous-module non nul L de N.

Exemples. (1) Tout module est essentiel dans lui-même.

(2) Un facteur direct propre d'un module M n'est pas essentiel.

(3) $\mathbb{Z}$ est essentiel dans $\mathbb{Q}$.

(4) Les sous-modules non nuls de $\mathbb{Z}$ sont tous essentiels dans $\mathbb{Z}$.

4.5.2. Définition. Soit $f : M \to N$ un monomorphisme de A-modules.

(1) On dit que f est *essentiel* si $\mathrm{im}(f)$ est essentiel dans N (c'est-à-dire, le pré-image d'un sous-module non nul par f est non nul).

(2) On dit que f est *minimal* si pour tout homomorphisme $g : N \to L$ de A-modules, gf est injectif si et seulement si g est injectif.

Remarque. Un isomorphisme est un monomorphisme essentiel.

4.5.3. Lemme. (1) Un monomorphisme $f : M \to N$ de A-module est essentiel si, et seulement si, il est minimal.

(2) Si $f : M \to N$ et $g : N \to U$ sont des monomorphismes essentiels, alors gf l'est.

Démonstration. (1) Supposons que f est essentiel. Si $g : N \to L$ est tel que gf est injectif, alors $\mathrm{im}(f) \cap \ker(g) = 0$. Ceci donne $\ker(g) = 0$. Donc f est minimal. Réciproquement, soit L un sous-module de N tel que $\mathrm{im}(f) \cap L = 0$. Considérons la projection $p : \mathrm{im}(f) + L \to \mathrm{im}(f) + L/L : x \mapsto x + L$. Alors $\ker(pf) = \mathrm{im}(f) \cap L = 0$. Si f est minimal, alors p est injectif. D'où $L = 0$. Ceci montre que $\mathrm{im}(f)$ est essentiel dans N.

(2) Soit W un sous-module non nul de U. Alors $g^{-1}(W)$ est un sous-module non nul de N, et donc $f^{-1}(g^{-1}(W)) = (gf)^{-1}(W) \neq 0$. Ainsi gf est essentiel. La preuve se termine.

Remarque. Si $f : M \to N_1 \oplus \cdots \oplus N_m$ est un monomorphisme minimal avec les N_i tous non nuls, alors la co-restriction de f à M_i est non nul pour tout $1 \leq i \leq m$.

4.5.4. Définition. Soit M un A-module. Une *enveloppe injective* de M est un monomorphisme minimal $\pi : M \to I$ avec I injectif. Dans ce cas, on dit aussi I est une *enveloppe injective* de M.

Remarque. Une enveloppe injective $\pi : M \to I$ d'un module injectif M est un isomorphisme.

Exemple. L'inclusion $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ est une enveloppe injective de $\mathbb{Z}$.

4.5.5. Proposition. Soient M un A-module et $\pi : M \to I$ une enveloppe injective de M. Si $\pi' : M \to I'$ est un monomorphisme avec I' injectif, alors il existe une section $g : I \to I'$ tel que $\pi' = g\pi$. En outre, g est un isomorphisme si $\pi' : M \to I'$ est aussi une enveloppe injective de M.

Démonstration. Comme I' est injectif, il existe $g : I \to I'$ tel que $\pi' = g\pi$. La minimalité de π implique que g est un monomorphisme. Comme I est injectif, g est une section. Soit $g' : I' \to I$ tel que $g'g = \mathbb{1}_I$. Alors $g'\pi' = \pi$. Si π' est également minimal, alors g' est injectif, et donc un isomorphisme. Par conséquent, g est un isomorphisme. Ceci achève la démonstration.

4.5.6. Lemme. Un A-module I est injectif si, et seulement si, tout monomorphisme essentiel $f : I \to N$ est un isomorphisme.

Démonstration. Supposons que I est injectif. Soit $f : I \to N$ un monomorphisme essentiel. Alors il existe $g : N \to I$ tel que $gf = \mathbb{1}_I$. D'où, $N = \text{im}(f) \oplus \ker(g)$. En particulier, $\text{im}(f) \cap \ker(g) = 0$, et donc $\ker(g) = 0$ car $\text{im}(f)$ est essentiel. Ceci donne à lieu $\text{im}(f) = N$, Par conséquent, f est un isomorphisme.

Supposons que tout monomorphisme essentiel de domaine I est un isomorphisme. D'après le théorème 4.4.8, il existe un monomorphisme $f : I \to J$ avec J injectif. D'après le lemme de Zorn, il existe un sous-module M de J qui est maximal pour la proprété que $f(I) \cap M = 0$. Considérons le monomorphisme $h : I \to J/M : x \mapsto f(x) + M$ dont l'image est $f(I) + M/M$. Si L/M avec $M \subset L$ est un sous-module non nul de J/M, alors $f(I) \cap L \neq 0$, et donc $(f(I) + M/M) \cap (L/M) \neq 0$. Ceci implique que h est essentiel, et donc un isomorphisme. En particulier, $J = f(I) + M = f(I) \oplus M$. Ceci montre que $f(I)$, ainsi que I, est injectif. La preuve se termine.

4.5.7. Théorème. Tout A-module admet une enveloppe injective.

Démonstration. Il existe un monomorphisme $f : M \to I$ avec I injectif. D'après le lemme de Zorn, il existe un sous-module Q de I qui est maximal pour la propriété que $f(M)$ est essentiel dans Q. Soit $g : Q \to N$ un monomorphisme essentiel. Comme I est injectif, il existe $h : N \to I$ tel que $hg = j$, l'inclusion. La minimalité de g entraîne que h est injectif. Posons $L = h(N)$. Alors $f(M) \subseteq Q \subseteq L$. La co-restriction l de h sur L est un isomorphisme et donc essentiel. Par conséquent, $lg = j'$, l'inclusion Q dans L est essentiel. Cela veut dire que Q est essentiel dans L. Ainsi $f(M)$ est essentiel dans L. La maximalité de Q implique $Q = L$. Donc g est surjectif, et donc un isomorphisme. Ceci montre que Q est injectif et la co-restriction $f' : M \to Q$ est le monomorphisme cherché. La preuve se termine.

4.5.8. Corollaire. Tout A-module M admet une co-resolution injective, unique à isomorphisme près,

$$0 \to M \xrightarrow{f_0} I_0 \xrightarrow{f_1} I_1 \to \cdots \to I_{n-1} \xrightarrow{f_n} I_n \to \cdots$$

telle que $\text{im}(f_n)$ est essentiel dans I_n pour tout $n \geq 0$, appelée la *co-résolution injective minimale* de M. Dans ce cas, $0 \to M \xrightarrow{f_0} I_0 \xrightarrow{f_1} I_1$ s'appelle la *co-présentation injective minimale* de M.

Chapitre V: Produit tensoriel de modules et d'algèbres

Soient K un anneau commutatif et A, B, et C des K-algèbres.

5.1. Définition. Soient M_A et ${}_AN$ deux A-modules et U un K-module. Une application $f : M \times N \to U$ est dite A-*bilinéaire* si pour tout $x, x_1, x_2 \in M$, $y, y_1, y_2 \in N$, $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ et $a \in A$,

(1) $f(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 f(x, y_1) + \alpha_2 f(x, y_2)$.

(2) $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 f(x_1, y) + \alpha_2 f(x_2, y)$.

(3) $f(xa, y) = f(x, ay)$.

5.2. Définition. Soient M_A et ${}_AN$ deux A-modules. Un *produit tensoriel* de M et N sur A est un K-module T avec une application A-bilinéaire $t : M \times N \to T$ ayant la propriété universelle: pour toute application A-bilinéaire $f : M \times N \to S$, il existe un unique K-homomorphisme $\phi : T \to S$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "t"] \arrow[dr, "f"'] & T \arrow[d, "\phi"] \\ & S. \end{tikzcd}$$

5.3. Théorème. Tous A-modules M_A et ${}_AN$ admet un produit tensoriel, qui est unique à isomorphisme près.

Démonstration. It suffit de montrer l'existence. Soit L le K-module libre ayant pour base l'ensemble $M \times N$. Soit R le sous-module de L engendré par les éléments des formes

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,\ \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) - \alpha_1\beta_1(x_1, y_1) - \alpha_1\beta_2(x_1, y_2) - \alpha_2\beta_1(x_2, y_1) - \alpha_2\beta_2(x_2, y_2)$$

et $(xa, y) - (x, ay)$, où $x, x_1, x_2 \in M$, $y, y_1, y_2 \in N$, et $a \in A$. Posons $T = L/R$. Alors l'application

$$t : M \times N \to T : (x, y) \mapsto (x, y) + R$$

est clairement A-bilinéaire. Soit $f : M \times N \to U$ une application A-bilinéaire. Comme L est K-libre ayant pour base $M \times N$, il existe un unique K-homomorphisme $\psi : L \to U$ tel que $\psi|_{M\times N} = f$. Or la A-bilinéarité de f entraîne que $R \subseteq \ker(\psi)$. Donc il existe un unique K-homomorphisme $\phi : T \to U$ tel que $\psi = \phi \circ p$ avec p la projection canonique de L sur T. Pour tout $(x, y) \in M \times N$, on a

$$(\phi \circ t)(x, y) = \phi((x, y) + R) = \psi(x, y) = f(x, y).$$

Donc $f = \phi \circ t$. Ceci achève la démonstration.

Remarque. Si T avec $t : M \times N \to T$ est un produit tensoriel de M_A et ${}_AN$ sur A, on écrit $T = M \otimes_A N$ et $t(x, y) = x \otimes y$, pout tout $(x, y) \in M \times N$. Dans cette notation, on a

(1) $x \otimes (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1(x \otimes y_1) + \alpha_2(x \otimes y_2)$.

(2) $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \otimes y = \alpha_1(x_1 \otimes y) + \alpha_2(x_2 \otimes y)$.

(3) $(xa) \otimes y = x \otimes (ay)$.

En particulier, $x \otimes y = 0_T$ si $x = 0_M$ ou $y = 0_N$.

5.4. Proposition. Pour tous A-modules M_A et ${}_AN$, on a

$$M \otimes_A N = \{\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \mid n \geq 1, x_i \in M, y_i \in N\}.$$

Démonstration. Posons $U = \{\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \mid n \geq 1, x_i \in M, y_i \in N\}$. Alors U est un sous-module du K-module $M \otimes_A N$ et l'application

$$f : M \times N \to U : (x, y) \mapsto x \otimes y$$

est A-bilinéaire. Donc il existe un K-homomorphisme $\phi : M \otimes_A N \to U$ tel que $f = \phi t$. Comme $t = if$ avec i l'inclusion de U dans $M \otimes_A N$, $t = (i\phi)t$. D'après l'unicité, $i\phi = \mathbb{1}_{M \otimes_A N}$. Par consequent, $M \otimes_A N = U$. Ceci achève la démonstration.

Remarque. En générale, l'expression $z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ n'est pas unique.

Exemples. (1) Si $m, n \in \mathbb{Z}$ avec $(m, n) = 1$, alors $\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n = 0$. En effet, il existe $s, t \in \mathbb{Z}$ tels que $mr + ns = 1$. Pour tout $(\bar{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$,

$$\bar{x} \otimes \tilde{y} = \overline{xmr + xns} \otimes \tilde{y} = \overline{xs}n \otimes \tilde{y} = \overline{xs} \otimes n\tilde{y} = \bar{x} \otimes \tilde{0} = 0.$$

Par conséquent, $\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n = 0$.

(2) Soit M un groupe abélien. Alors $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M = 0$ si, et seulement si, M est de torsion (c'est-à-dire, tout élément de M est d'ordre fini). En effet, M est de torsion, alors pour tout $y \in M$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $ny = 0$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{Q}$, on a $x \otimes y = \frac{x}{n} \otimes ny = 0$. Donc $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M = 0$. Sinon, prenons un sous-module N de M engendré par un élément z d'ordre infini. Alors il existe un $\mathbb{Z}$-monomorphisme $\phi : N \to \mathbb{Q}$ tel que $\phi(z) = 1$. Comme $\mathbb{Q}$ est injectif, ϕ se prolonge en un $\mathbb{Z}$-homomorphisme $\psi : M \to \mathbb{Q}$. Comme l'application

$$f : \mathbb{Q} \times M \to \mathbb{Q} : (q, y) \mapsto q\psi(y)$$

est $\mathbb{Z}$-bilinéaire, il existe un $\mathbb{Z}$-homomorphisme $g : \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M \to \mathbb{Q}$ tel que $g(q \otimes y) = f(q, y) = q\psi(y)$. En particulier, $g(1 \otimes z) = f(1, z) = 1\psi(z) = \phi(z) = 1$. D'où $1 \otimes z \neq 0$. Par conséquent, $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M \neq 0$.

5.5. Proposition. Si M et N sont des K-modules libres ayant pour bases $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ respectivement, alors $M \otimes_K N$ est un K-module libre dont $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V} = \{u \otimes v \mid u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{V}\}$ est une base.

Démonstration. D'abord, $M \otimes_K N$ est engendré par $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$. Soit L le K-module libre ayant pour base $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$. Comme la fonction

$$f : M \times N \to L : (\sum_{u \in \mathcal{U}} \alpha_u u, \sum_{v \in \mathcal{V}} \beta_v v) \mapsto \sum_{(u,v) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}} \alpha_u \beta_v (u, v)$$

est K-bilinéaire, il existe un K-homomorphisme $\phi : M \otimes_K N \to L$ tel que $\phi(u \otimes v) = f(u, v) = (u, v)$ pour tout $(u, v) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$. Par conséquent, $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ est libre, et donc une base de $M \otimes_K N$. Ceci achève la démonstration.

5.6. Proposition. Si $\phi : M_A \to M'_A$ et $\psi :_A N \to_A N'$ sont des homomorphismes de A-modules, alors il existe un unique K-homomorphisme $\phi \otimes \psi : M \otimes_A N \to M' \otimes_A N'$ tel que $(\phi \otimes \psi)(x \otimes y) = \phi(x) \otimes \psi(y)$, pout tous $x \in M, y \in N$.

Démonstration. Comme l'application

$$f : M \times N \to M' \otimes_A N' : (x, y) \mapsto \phi(x) \otimes \psi(y)$$

est A-bilinéaire, on a l'existence de $\phi \otimes \psi$. Ceci achève la démonstration.

Remarque. On voit aisément $\mathbb{1}_M \otimes \mathbb{1}_N = \mathbb{1}_{M \otimes_A N}$ et $(\phi \otimes \psi)(\phi' \otimes \psi') = (\phi\phi') \otimes (\psi\psi')$.

5.7. Proposition. Étant donnés des bimodules ${}_BM_A$ et ${}_AN_C$, il existe une structure de B-C-bimodule sur $M \otimes_A N$ telle que $b(x \otimes y)c = (bx) \otimes (yc)$.

Démonstration. On se fixe $b \in B$. L'application $f_b : M \times N \to M \otimes_A N : (x, y) \mapsto bx \otimes y$ est A-bilinéaire. Ainsi il existe un K-homomorphisme $\phi(b) : M \otimes_A N \to M \otimes_A N$ tel que $\phi(b)(x \otimes y) = bx \otimes y$. Or il est facile de vérifier que

$$\phi : B \to \mathrm{End}_K(M \otimes_A N) : b \mapsto \phi(b)$$

est une représentation de B sur $M \otimes_A N$. Par conséquent, $M \otimes_A N$ est un B-module à gauche tel que $b(x \otimes y) = (bx) \otimes y$. De même, $M \otimes_A N$ est un C-module à droite tel que $(x \otimes y)c = x \otimes (yc)$. Comme $(b(x \times y))c = (bx) \otimes (yc) = b((x \times y)c)$. Ainsi $M \otimes_A N$ est B-C-module. Ceci achève la démonstration.

Remarques. (1) Un A-B-bimodule M détemrine un foncteur covariant

$$- \otimes_A M : \quad \text{Mod-}A \to \text{Mod-}B : X \mapsto X \otimes_A M,\ f \mapsto f \otimes \mathbb{1}_M.$$

(2) Un B-A-bimodule M détemrine un foncteur covariant

$$M \otimes_A - : \quad A\text{-Mod} \to B\text{-Mod} : X \mapsto M \otimes_A X,\ f \mapsto \mathbb{1}_M \otimes f.$$

(3) Soit A une sous-algèbre de B. Alors B est un A-B-bimodule. Si M est un A-module à droite, alors $M \otimes_A B$ est un B-module à droite, qui est le B-module obtenu à partir de M_A par *prolongement des coefficients*.

5.8. Proposition. (1) Pour un module M_A, on a un isomorphisme $\phi_M : M \otimes_A A \to M$ de A-modules à droite, fonctoriel en M, tel que $\phi_M(x \otimes a) = xa$.

(2) Pour un module ${}_AN$, on a un isomorphisme $\phi_N : A \otimes_A N \to N$ de A-modules à gauche, fonctoriel en N, tel que $\phi_N(a \otimes x) = ax$.

(3) En somme, $- \otimes_A A \cong \mathbb{1}_{\text{Mod-}A}$ et $A \otimes_A - \cong \mathbb{1}_{A\text{-Mod}}$.

Démonstration. (1) L'application $f : M \times A \to M : (x, a) \mapsto xa$ est A-bilinéaire. Donc il existe un A-homomorphisme $\phi_M : M \otimes_A A \to M$ tel que $\phi_M(x \otimes a) = xa$. Or $\psi_M : M \to M \otimes_A A : x \mapsto x \otimes 1_A$ est un A-homomorphisme tel que $\psi_M \phi_M = \mathbb{1}_M$ et $\phi_M \psi_M = \mathbb{1}_{M \otimes_A A}$. En outre, il est facile de vérifier que pour tout $f : M \to L$, on a $f\phi_M = \phi_L(f \otimes A)$. Ceci achève la démonstration.

5.9. Proposition. (1) Pour tous modules M_A, ${}_AN_B$, et ${}_BL$, on a

$$(M \otimes_A N) \otimes_B L \cong_K M \otimes_A (N \otimes_B L).$$

(2) Si A est commutative, alors $M \otimes_A N \cong_A N \otimes_A M$, pour tous A-modules M et N.

Démonstartion. (1) Pour tout $z \in L$, on a un A-homomorphisme:

$$f_z : N \to N \otimes_B L : y \mapsto y \otimes z,$$

d'où un K-homomorphisme $\mathbb{1}_M \otimes f_z$. Comme l'application

$$g : (M \otimes_A N) \times L \to M \otimes_A (N \otimes_B L) : (w, z) \mapsto (\mathbb{1}_M \otimes f_z)(w)$$

est B-bilinéaire, il existe un K-homomorphisme $\phi : (M \otimes_A N) \otimes_B L \to M \otimes_A (N \otimes_B L)$ tel que $\phi((x \otimes y) \otimes z) = g(x \otimes y, z) = (\mathbb{1}_M \otimes f_z)(x \otimes y) = x \otimes (y \otimes z)$. De même, il existe un K-homomorphisme $\psi : M \otimes_A (N \otimes_B L) \to (M \otimes_A N) \otimes_B L$ tel que $h(x \otimes (y \otimes z)) = (x \otimes y) \otimes z$. On voit aisément que $\phi\psi = \mathbb{1}_{M \otimes_A (N \otimes_B L)}$ et $\psi\phi = \mathbb{1}_{(M \otimes_A N) \otimes_B L}$.

(2) Supposons que A est commutative. Alors M et N sont des A-A-bimodules. Ainsi $M \otimes_A N$ est un A-module. Or $f : M \times N \to N \otimes_A M : (x, y) \mapsto y \otimes x$ est A-bilinéaire. Donc il existe un K-homomorphisme $\phi : M \otimes_A N \to N \otimes M$ tel que $\phi(x \otimes y) = f(x, y) = y \otimes x$. On voit aisément que ϕ est A-linéaire. De même, il existe un A-homomorphismes $\psi : N \otimes_A M \to M \otimes N$ tel que $\phi(y \otimes x) = x \otimes y$. Or $\phi\psi = \mathbb{1}_{N \otimes_A M}$ et $\psi\phi = \mathbb{1}_{M \otimes_A N}$. Ceci achève la démonstration.

Remarquons qu'une K-algèbre est un K-module E et un K-homomorphisme $\phi : E \otimes_K E$ tel que $\phi \circ \phi \otimes \mathbb{1}_E = \phi \circ \mathbb{1}_E \otimes \phi$ et un élément 1 tel que $\phi(1 \otimes x) = \phi(x \otimes 1) = x$ pour tout $x \in E$.

5.10. Proposition. Soient A et B deux K-algèbres. Alors $A \otimes_K B$ est une K-algèbre dont la multiplication est telle que $(a \otimes b)(a' \otimes b') = (aa') \otimes (bb')$.

Démonstration. D'abord, $A \otimes_K B$ est un K-module. Comme l'application

$$A \times A \to A : (a, a') \mapsto aa'$$

est K-bilinéaire, il existe un K-homomorphisme $\phi : A \otimes_K A \to A$ tel que $\phi(a \otimes a') = aa'$. De même, il existe K-homomorphisme $\psi : B \otimes_K B \to B$ tel que $\phi(b \otimes b') = bb'$. En outre, on a un K-isomorphisme $\tau : B \otimes_K A \to A \otimes_K B$ tel que $\tau(b \times a) = a \otimes b$. Soit $\gamma : (A \otimes_K B) \otimes_K (A \otimes_K B) \to A \otimes_K B$ le composé des K-homomorphismes suivants:

$$(A \otimes B) \otimes (A \otimes B) \tilde{\to} A \otimes (B \otimes A) \otimes B \stackrel{\mathbb{1} \otimes \tau \otimes \mathbb{1}}{\to} A \otimes (A \otimes B) \otimes B \tilde{\to} (A \otimes A) \otimes (B \otimes B) \stackrel{\phi \otimes \psi}{\to} A \otimes B.$$

Alors $A \otimes_K B$ est une K-algèbre pour la multiplication $u \cdot v = \gamma(u \otimes v)$, pour tout $u, v \in A \otimes B$. Ceci achève la démonstration.

5.11. Théorème. Il existe un isomorphisme de K-algèbres

$$\phi : M_m(K) \otimes_K M_n(K) \to M_{mn}(K) : (a_{ij}) \otimes (b_{ij}) \mapsto (a_{rs}(b_{ij}))_{1 \le r,s \le n}.$$

Démonstration. D'abord, $M_m(K)$, $M_n(K)$ et $M_{mn}(K)$ sont des K-modules libres ayant pour bases canoniques $\{e_{ij} \mid 1 \le i, j \le n\}$, $\{f_{ij} \mid 1 \le i, j \le n\}$, et $\{g_{ij} \mid 1 \le i, j \le mn\}$. On voit que $\phi(e_{ij} \otimes f_{kl}) = g_{(i-1)m+k, (j-1)m+l}$. Ainsi ϕ est un isomorphisme de K-modules. Or

$$(e_{ij} \otimes f_{kl})(e_{i'j'} \otimes f_{k'l'}) = e_{ij}e_{i'j'} \otimes f_{kl}f_{k'l'} = \begin{cases} e_{ij'} \otimes f_{kl'}, & \text{si } i' = j \text{ et } k' = l; \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$g_{(i-1)m+k,\,(j-1)m+l}\; g_{(i'-1)m+k',\,(j'-1)m+l'} = \begin{cases} g_{(i-1)m+k,\,(j'-1)m+l'}, & \text{si } i' = j \text{ et } k' = l; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent, ϕ est un isomorphisme de K-algèbres. Ceci achève la démonstration.

Le résultat est très important.

5.12. Théorème. Soit M un A-B-bimodule. Alors les foncteurs

$$- \otimes_A M : \text{Mod-}A \to \text{Mod-}B \quad \text{et} \quad \text{Hom}_B(M, -) : \text{ Mod-}B \to \text{Mod-}A$$

forment une paire adjointe $(- \otimes_A M,\ \text{Hom}_B(M, -))$. Et les foncteurs

$$M \otimes_B - : B\text{-Mod} \to A\text{-Mod} \quad \text{et} \quad \text{Hom}_A(M, -) : \ A\text{-Mod} \to B\text{-Mod}$$

forment une paire adjointe $(M \otimes_B -,\ \mathrm{Hom}_A(M,-))$.

Démonstration. Soient X_A et Y_B des modules. Tout $\phi \in \mathrm{Hom}_A(X, \mathrm{Hom}_B(M,Y))$ donne lieu à une application A-bilinéaire: $X \times M \to Y : (x,m) \mapsto \phi(x)(m)$, et donc à un unique B-homomorphisme $\rho(\phi) : X \otimes_A M \to Y$ tel que $\rho(\phi)(x \otimes m) = \phi(x)(m)$. Ainsi on a un K-homomorphisme:

$$\rho_{X,Y} : \mathrm{Hom}_A(X, \mathrm{Hom}_B(M,Y)) \to \mathrm{Hom}_B(X \otimes_A M,\ Y) : \phi \mapsto \rho(\phi).$$

Si $\rho(\phi_1) = \rho(\phi_2)$, alors $\phi_1(x)(m) = \phi_2(x)(m)$, pour tous $x \in X$ et $m \in M$. Ainsi $\phi_1(x) = \phi_2(x)$ pour tout $x \in X$. Par conséquent, $\rho_{X,Y}$ est injectif.

Soit $\psi \in \mathrm{Hom}_B(X \otimes_A M,\ Y)$. Pour tout $x \in X$, on a un B-homomorphisme

$$\phi(x) : M \to Y : m \mapsto \psi(x \otimes m).$$

Ceci donne lieu à un A-homomorphisme:

$$\phi : X \to \mathrm{Hom}_B(M,Y) : x \mapsto \phi(x).$$

Pour tous $x \in X, m \in M$, on a $\rho(\phi)(x \otimes m) = \phi(x)(m) = \psi(x \otimes m)$. Par consequent, $\rho(\phi) = \psi$. Donc $\rho_{X,Y}$ est surjectif, et donc un isomorphisme. Enfin, on peut vérifier que $\rho_{X,Y}$ est fonctoriel en X et en Y. La preuve se termine.

5.13. Théorème. Soit M un A-B-bimodule. Les foncteurs

$$- \otimes_A M : \text{ Mod-}A \to \text{Mod-}B \quad \text{et} \quad M \otimes_B - : B\text{-Mod} \to A\text{-Mod}$$

sont exacts à droite.

Exemple. On a que $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : n \mapsto 2n$ est un monomorphisme, mais que $f \otimes \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_2} : \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2$ ne l'est pas. En fait, $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2 \neq 0$, et pour tous $n \in \mathbb{Z}, \bar{m} \in \mathbb{Z}_2$,

$$(f \otimes \mathbb{1})(n \otimes \overline{m}) = f(n) \otimes \overline{m} = (2n) \otimes \overline{m} = n \otimes 2\overline{m} = 0.$$

Remarque. Comme le foncteur $M \otimes_A -$ n'est pas exact à gauche, si X est un sous-module de Y, alors pour $m \in M$ et $x \in X$, le produit $m \otimes x \in M \otimes_A X$ est différent du produit $m \otimes x \in M \otimes_A Y$.

5.14. Corollaire. Si P est un K-module projectif, alors le A-module à droite $P \otimes_K A$ est projectif.

Démonstraton. Soit $f : M \to N$ un A-épimorphisme. Comme A est projectif, $\mathrm{Hom}_A(A, f) : \mathrm{Hom}_A(A, M) \to \mathrm{Hom}_A(A, N)$ est un épimorphisme de K-modules. Comme $(- \otimes_K A,\ \mathrm{Hom}_A(A, -))$ est une paire adjointe, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_K(P, \mathrm{Hom}_A(A, M)) \arrow[r, "{(P,(A,f))}"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_K(P, \mathrm{Hom}_A(A, N)) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & 0 \\
\mathrm{Hom}_A(P \otimes_K A, M)) \arrow[r, "{(P\otimes A,f)}"] & \mathrm{Hom}_A(P \otimes_K A, N) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

de K-homomorphismes. Remarquons que la ligne en haut est exacte car P est un K-module projectif. Ainsi la ligne en bas est également exacte. Ceci montre que $P \otimes_K A$ est un A-module projectif. La preuve se termine.

5.15. Proposition. Soit I un idéal bilatère de A. Pour tous A-modules M_A et ${}_AN$,

$$M \otimes_A A/I \cong M/MI, \quad A/I \otimes_A N \cong N/IN.$$

Démonstation. Appliquant $M \otimes_A -$ à la suite exacte $0 \to I \to A \to A/I \to 0$ de A-A-bimodules, on obtient une suite exacte $M \otimes_A I \to M \otimes_A A \to M \otimes_A A/I \to 0$ de A-modules à droite. Or le A-isomorphisme $\phi : M \otimes_A A \to M$ tel que $\phi(x \otimes a) = xa$ et le A-épimorphisme $\pi : M \otimes_A I \to MI$ tel que $\pi(x \otimes r) = xr$ induisent un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
 & M \otimes_A I \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & M \otimes_A A \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & M \otimes A/I \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & MI \arrow[r] & M \arrow[r] & M/MI \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

En vue du lemme du serpent, on voit que ψ est un isomorphisme. Ceci achève la démonstration.

5.16. Théorème. (1) Si M est un A-module à droite et $\{N_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ est une famille de A-modules à gauche, alors il existe un K-isomorphisme

$$f_M : M \otimes_A \amalg_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda \to \amalg_{\lambda\in\Lambda}(M \otimes_A N_\lambda) : x \otimes (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mapsto (x \otimes y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda},$$

qui est fonctoriel en M.

(2) Si N est un A-module à gauche et $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ est une famille de A-modules à droite, alors il existe un K-isomorphisme

$$g_N : (\amalg_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda) \otimes_A N \to \amalg_{\lambda\in\Lambda}(M_\lambda \otimes_A N) : (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \otimes y \mapsto (x_\lambda \otimes y)_{\lambda\in\Lambda},$$

qui est fonctoriel en N.

Démonstration. (1) D'abord, comme l'application

$$M \times \amalg_{\mu\in\Lambda} N_\mu \to \amalg_{\mu\in\Lambda}(M \otimes_A N_\mu) : (x,\ (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) \mapsto (x \otimes y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

est A-bilinéaire, il existe un K-homomorphisme

$$f_M : M \otimes_A \amalg_{\mu\in\Lambda} N_\mu \to \amalg_{\mu\in\Lambda}(M \otimes_A N_\mu) : x \otimes (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mapsto (x \otimes y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}.$$

Considérons maintenant les injections canoniques $q'_\lambda : M \otimes_A N_\lambda \to \amalg_{\mu\in\Lambda}(M \otimes_A N_\mu)$ et $q_\lambda : N_\lambda \to \amalg_{\mu\in\Lambda} N_\mu$. Par rapport à la famille $\{\mathbb{1}_M \otimes q_\lambda : M \otimes_A N_\lambda \to M \otimes_A \amalg_{\mu\in\Lambda} N_\mu \mid \lambda \in \Lambda\}$, il existe un K-homomorphisme $g_M : \amalg_{\mu\in\Lambda}(M \otimes_A N_\mu) \to M \otimes_A \amalg_{\mu\in\Lambda} N_\mu$ tel que $g_M q'_\lambda = \mathbb{1} \otimes q_\lambda$, pour tout $\lambda \in \Lambda$. On a alors $fg = \mathbb{1}$ et $gf = \mathbb{1}$. Ceci achève la dḿonstration.

Remarque. En général, $M \otimes (\Pi N_\lambda) \ncong \Pi(M \otimes N_\lambda)$.

5.17. Théorème. Soit M un B-A-bimodule. Pour tous modules X_A et ${}_BY$, il existe un K-homomorphisme

$$\begin{array}{rccc} \eta_{XY} : & X \otimes_A \mathrm{Hom}_B(M, Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(X, M), Y) \\ & x \otimes f & \mapsto & (g \mapsto f(g(x)), \end{array}$$

qui est fonctoriel en X et en Y. En outre, η_{XY} est un isomorphisme dans chacun des cas suivants:

(1) X_A est projectif de type fini.

(2) X_A est de présentation finie et ${}_BY$ est injectif.

Démonstration. La première partie du théorème est facile à vérifier. De plus, η_{AY} est un isomorphisme. Il suit du théorème 5.16 que η_{LY} est un isomorphisme si L est libre de type fini.

(1) Supposons que X_A est projectif de type fini. Alors il existe une suite exacte scindée

$$0 \longrightarrow Q \xrightarrow{q} L \xrightarrow{p} X \longrightarrow 0$$

où L est libre de type fini. En appliquant à cette suite les foncteurs $- \otimes_A \mathrm{Hom}_B(M, Y)$ et $\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(-, M), Y)$, on obtient un diagramme commutatif exact à lignes exactes:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Q \otimes \mathrm{Hom}(M,Y) \arrow[r, "\tilde{q}"] \arrow[d, "\eta_{QY}"] & L \otimes \mathrm{Hom}(M,Y) \arrow[r, "\tilde{p}"] \arrow[d, "\eta_{LY}"] & X \otimes \mathrm{Hom}(M,Y) \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{XY}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(Q,M),Y) \arrow[r, "q^*"] & \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(L,M),Y) \arrow[r, "p^*"] & \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(X,M),Y) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

En vue du lemme du serpent, on voit que η_{QY} est un monomorphisme et η_{XY} est un épimorphisme. Remarquons Q est projectif de type fini. En échangeant les roles de X et Q, on voit que η_{XY} est un monomorphisme, et donc un isomorphisme.

(2) Supposons que Y est injectif. Alors le foncteur $\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(-, M), Y)$ est exact à droite. Supposons qu'il existe une suit exacte

$$P \xrightarrow{q} Q \xrightarrow{p} X \longrightarrow 0$$

de A-homomorphismes avec P et Q projectifs de type fini. En appliquant à cette suite les foncteurs exacts à droite $- \otimes_A \mathrm{Hom}_B(M,Y)$ et $\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(-,M),Y)$, on obtient un diagramme commutatif exact à lignes:

$$\begin{tikzcd}
P \otimes \mathrm{Hom}_B(M,Y) \arrow[r, "\tilde{q}"] \arrow[d, "\eta_{PY}"] & Q \otimes \mathrm{Hom}_B(M,Y) \arrow[r, "\tilde{p}"] \arrow[d, "\eta_{QY}"] & X \otimes \mathrm{Hom}_B(M,Y) \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{XY}"] & 0 \\
\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(P,M),Y) \arrow[r, "q^*"] & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(Q,M),Y) \arrow[r, "p^*"] & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(X,M),Y) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

de K-homomorphismes. Ainsi η_{XY} est un isomorphisme car η_{PY} et η_{QY} le sont. Ceci achève la démonstration.

De même, on a le résultat suivant.

5.18. Théorème. Soient M un B-A-bimodule et P un A-module à droite projectif de type fini. Pour tout B-module à droite X, on a

$$X \otimes_B \mathrm{Hom}_A(P,M) \cong \mathrm{Hom}_A(P, X \otimes_B M).$$

Démonstration. L'isomorphisme ϕ est tel que $\phi(x \otimes f)(y) = x \otimes f(y)$, pour tous $x \in X$, $y \in P$ et $f \in \mathrm{Hom}_A(P,M)$.

5.19. Définition. Un A-module à droite M est dit *plat* si le foncteur suivant est exact:

$$M \otimes_A - : \ A\text{-Mod} \to K\text{-Mod}.$$

Exemples. (1) Le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}_2$ n'est pas plat.
(2) On accepte sans preuve le fait que $\mathbb{Q}$ est un $\mathbb{Z}$-module plat.

5.20. Théorème. Soit $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ une famille de A-modules à droite. Alors $\amalg_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ est plat si, et seulement si, M_λ est plat pour tout $\lambda \in \Lambda$.

Démonstration. Soit $\phi : N \to L$ un homomorphisme de A-modules à gauche. On a un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
(\amalg_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda) \otimes_A N \arrow[r, "\mathbb{1}\otimes\phi"] \arrow[d, "g_N"'] & (\amalg_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda) \otimes_A L \arrow[d, "g_L"] \\
\amalg_{\lambda\in\Lambda} (M_\lambda \otimes_A N) \arrow[r, "(\mathbb{1}\otimes\phi)_{\lambda\in\Lambda}"] & \amalg_{\lambda\in\Lambda} (M_\lambda \otimes_A L)
\end{tikzcd}$$

où g_N et g_L sont des isomorphismes. Or $\amalg M_\lambda$ est plat si, et seulement si $\mathbb{1}_{\amalg M_\lambda} \otimes \phi$ est un monomorphisme pour tout monomorphisme ϕ dans A-Mod si, et seulement si $(\mathbb{1}_{M_\lambda} \otimes \phi)_{\lambda\in\Lambda}$ est un monomorphisme pour tout monomorphisme ϕ dans A-Mod si, et seulement si $\mathbb{1}_{M_\lambda} \otimes \phi$

est un monomorphisme pour tout $\lambda \in \Lambda$ et pour tout monomorphisme ϕ dans A-Mod si, et seulement si M_λ est plat pour tout $\lambda \in \Lambda$. Ceci achève la démonstration.

5.21. Théorème. (1) Un A-module projectif est plat.

(2) Un A-module plat de présentation finie est projectif.

Démonstration. (1) D'abord, A_A est plat. En effet, si $f : M \to N$ est un monomorphisme de A-modules à gauche, alors on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_A M \arrow[r, "\mathbb{1}\otimes f"] \arrow[d, "\phi_M"'] & A \otimes N \arrow[d, "\phi_N"] \\
M \arrow[r, "f"] & N
\end{tikzcd}$$

avec ϕ_M et ϕ_M des isomorphismes. Ainsi $\mathbb{1} \otimes f = \phi_N^{-1} f \phi_M$ est un monomorphisme. D'après le théorème 5.20, tout module projectif est plat.

(2) Supposons maintenant que P est plat de présentation finie. Soit $g : M \to N$ un A-épimorphisme. On veut montrer que

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P, M) \xrightarrow{(P,f)} \mathrm{Hom}_A(P, N) \qquad (*)$$

est une suite de K-homomorphismes. Il suffit de montrer qu'il s'agit d'une suite exacte de $\mathbb{Z}$-homomorphismes. Soit I un co-générateur injectif de Mod- $\mathbb{Z}$. Comme P est de présentation finie, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P \otimes_A \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, I) \arrow[r, "P\otimes(f,I)"] \arrow[d, "\cong"'] & P \otimes_A \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, I) \arrow[d, "\cong"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_A(P, N), I) \arrow[r, "((P,f),I)"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_A(P, M), I)
\end{tikzcd}$$

Comme P est plat et $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, I)$ est exact à gauche, la ligne en haut est exacte. Donc il en de même pour la ligne en bas. Comme I est co-génératuer injectif de mod- $\mathbb{Z}$, la suite est exacte dans Mod- $\mathbb{Z}$. Ceci achève la démonstation.

Chapitre VI: Conditions de finitude

6.1. Modules artiniens et noethériens

Soit A une K-algèbre.

6.1.1. Définition. Soit M un A-module.

(1) On dit que M est *artinien* s'il satisfait à la *condition des chaînes décroissantes* disant que toute chaîne décroissante infinie

$$M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots \supseteq M_n \supseteq \cdots$$

de sous-modules de M est *stationnaire*, c'est-à-dire, il existe $n_0 \geq 1$ tel que $M_n = M_{n_0}$ pour tout $n \geq n_0$.

(2) On dit que M est *noethérien* s'il satisfait à la *condition des chaînes croissantes* disant que toute chaîne croissante infinie

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n \subseteq \cdots$$

de sous-modules de M est *stationnaire*, c'est-à-dire, il existe $n_0 \geq 1$ tel que $M_n = M_{n_0}$ pour tout $n \geq n_0$.

Exemple. Le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}$ est noethérien, mais pas artinien. En fait, on a une chaîne décroissante non-stationnaire

$$\mathbb{Z} \supset 2\,\mathbb{Z} \supset 2^2\,\mathbb{Z} \supset \cdots \supset 2^n\,\mathbb{Z} \supset \cdots$$

de sous-modules de $\mathbb{Z}$. D'autre part, toute chaîne croissante de sous-modules de $\mathbb{Z}$ est de la forme:

$$a_0\,\mathbb{Z} \subseteq a_1\,\mathbb{Z} \subseteq \cdots \subseteq a_n\,\mathbb{Z} \subseteq \cdots,$$

où $a_n \in \mathbb{N}$. On peut supposer que $a_0 \neq 0$. Alors $a_n | a_{n-1}$, pour tout $n \geq 0$. Ainsi

$$a_0 \geq a_1 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots.$$

Donc il existe $n_0 \geq 0$ tel que $a_n = a_{n_0}$, pour tout $n \geq n_0$. Par consequent, $\mathbb{Z}$ est noethérien.

6.1.2. Proposition. Soit M un A-module.

(1) M est artinien si, et seulement si, tout ensemble non vide de sous-modules de M admet un élément minimal.

(2) M est noethérien si, et seulement si, tout ensemble non vide de sous-modules de M admet un élément maximal.

Démonstration. On ne montrera que la partie (1). Supposons que M satisfait à la condition énoncée. Si

$$M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots \supseteq M_n \supseteq \cdots$$

est une chaîne décroissante de sous-modules de M, alors $\{M_n \mid n \geq 0\}$ admet un élément minimal M_{n_0}. Pour tout $n \geq n_0$, on a $M_{n_0} \subseteq M_n$. D'où $M_{n_0} = M_n$. Donc M est artinien.

Supposons réciproquement qu'il existe un ensemble non vide Σ de sous-modules de M qui n'a pas d'élément minimal. Prenons $M_0 \in \Sigma$. Comme M_0 n'est pas minimal, il existe $M_1 \in \Sigma$ tel que $M_0 \subset M_1$. Supposons $n \geq 1$ et on a une chaîne

$$M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_n, \quad M_i \in \Sigma.$$

Comme M_n n'est pas minimal, il existe $M_{n+1} \in \Sigma$ tel que $M_n \supset M_{n+1}$. Par récurrence, on a une chaîne décroissante infinie

$$M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_n \supset \cdots$$

qui est non stationnaire. Donc M n'est pas artinien. Ceci achève la démonstration.

6.1.3. Proposition. Soit N un sous-module d'un A-module M. Alors M est noethérien (respectivement, artinien) si, et seulement si, N et M/N le sont.

Démonstration. Supposons que M est noethérien. D'après la définition, N est noethérien. Si

$$M_0/N \subseteq M_1/N \subseteq \cdots \subseteq M_n/N \subseteq \cdots$$

est une chaîne croissante de sous-modules de M/N avec M_i un sous-module de A contenant N. Alors

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n \subseteq \cdots$$

est une chaîne croissante de sous-modules de M. Donc il existe $n_0 \geq 0$ tel que $M_n = M_{n_0}$, pour tout $n \geq n_0$. Par conséquent, $M_n/N = M_{n_0}/N$, pour tout $n \geq n_0$. Donc M/N est noethérien.

Supposons réciproquement que N et M/N sont noethériens. Soit

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n \subseteq \cdots$$

une chaîne croissante de sous-modules de M. Alors

$$M_0 \cap N \subseteq M_1 \cap N \subseteq \cdots \subseteq M_n \cap N \subseteq \cdots$$

est une chaîne croissante de sous-modules de N et

$$(M_0 + N)/N \subseteq (M_1 + N)/N \subseteq \cdots \subseteq (M_n + N)/N \subseteq \cdots$$

est une chaîne croissante de sous-modules de M/N. Il existe $n_0 \geq 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $M_n \cap N = M_{n_0} \cap N$ et $(M_{n_0} + N)/N = (M_n + N)/N$ et donc $M_{n_0} + N = M_n + N$. Par conséquent, pour tout $n \geq n_0$,

$$M_n = M_n \cap (M_n + N) = M_n \cap (M_{n_0} + N) = M_{n_0} + M_n \cap N = M_{n_0} + M_{n_0} \cap N = M_{n_0}.$$

Donc M est noethérien. Ceci achève la démonstration.

6.1.4. Corollaire. Soient $M, M_1, \ldots, M_n$ des A-modules.

(1) Si $N_1, \ldots, N_n$ sont des sous-modules artiniens (respectivement, noethériens) de M, alors $N_1 + \cdots + N_n$ est artinien (respectivement, noethériens).

(2) Le co-produit $\amalg_{i=1}^{n} M_i$ est artinien (respectivement, noethérien) si, et seulement si, M_i est. artinien (respectivement, noethérien) pour tout $1 \leq i \leq n$.

6.1.5. Théorème. Un A-module M est noethérien si, et seulement si, tout sous-module N de M est de type fini. En particulier, un module noethérien est de type fini.

Démonstration. Supposons que M admet un sous-module N qui n'est pas de type fini. Prenons $x_1 \in N$. Alors $< x_1 > \subset N$. Supposons, pour $n \geq 1$, qu'il existe $x_1, \ldots, x_n \in N$ tels que $< x_1 > \subset \cdots \subset < x_1, \ldots, x_n > \subset N$. Prenons $x_{n+1} \in N$ et $x_{n+1} \notin < x_1, \ldots, x_n >$. Donc $< x_1, \ldots, x_n > \subset < x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} >$. Par récurrence, on a une chaîne strictement croissante

$$< x_1 > \subset \cdots \subset < x_1, \ldots, x_n > \subset < x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} > \subset \cdots$$

de sous-modules de M. Donc M n'est pas noethérien.

Supposons maintenant que tout sous-module de M est de type fini. Soit

$$M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n \subset \cdots$$

une chaîne croissante de sous-modules de M. Alors $N = \cup_{n=1}^{\infty} M_n$ est un sous-module. D'après l'hypothèse, $N = < x_1, \ldots, x_r >$. Or il existe $n_0 \geq 0$ tel que $x_1, \ldots, x_r \in M_{n_0}$. Pour tout $n \geq n_0$, on a $M_n \subseteq N \subseteq M_{n_0} \subseteq M_n$, et donc $M_n = M_{n_0}$. Ceci montre que M est noethérien. La preuve se termine.

Exemple. Si A est un domaine d'intégrité principal, alors A_A est noéthérien.

On énonce sans preuve le résultat suivant.

6.1.6. Théorème de Bass. Les conditions suivantes sont équivalentes:
(1) Tout A-module à gauche plat est projectif.
(2) Tout A-module à gauche admet une couverture projective.
(3) Les idéaux à droite principaux de A satisfont à la conditions de chaînes décroissantes.

Dans ce cas, on dit que A est *parfaite à gauche.*

6.2. Algèbres artiniennes et noethériennes

Soient K un anneau commutatif et A une K-algèbre.

6.2.1. Définition. (1) On dit que A est *artinienne à droite* (respectivement, *à gauche*) si A_A (respectivement, ${}_AA$) est un A-module artinien.

(2) On dit A est *noethérienne à droite* (respectivement, *à gauche*) si A_A (respectivement, ${}_AA$) est un module noethérien.

Remarque. On verra plus tard qu'une algèbre artinienne est noethérienne.

Exemples. (1) La $\mathbb{Z}$-algèbre $\mathbb{Z}$ est noethérienne, mais non artinienne.

(2) Tout domaine d'intégrité principal est noethérien.

(3) Tout sur-corps de K est noethérien et artinien (à droite et à gauche).

(4) Toute K-algèbre finie est noethérienne et artinienne (à droite et à gauche).

(5) Si K est un corps, alors une K-algèbre de dimension finie est noethérienne et artinienne.

(6) Considérons la $\mathbb{Q}$-algèbre

$$A = \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}.$$

On peut vérifer que A n'a que les idéaux à gauche suivantes:

$$0,\ A,\ \begin{pmatrix} \mathbb{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{R} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \mathbb{R} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, A est artinienne et noethérienne à gauche. Par contre, il existe une strictement croissante

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Q}\pi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subset \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Q}\pi + \mathbb{Q}\pi^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subset \cdots \subset \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Q}\pi + \cdots + \mathbb{Q}\pi^n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subset \cdots$$

et une chaîne strictement décroissante

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Q}[\pi] \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \supset \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Q}[\pi^2] \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \supset \cdots \supset \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Q}[\pi^n] \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \supset \cdots,$$

où $\mathbb{Q}[\pi^n]$ désigne l'ensemble des polynômes rationnels de π^n, d'idéaux à droite de A. Ainsi A n'est ni artinienne ni noethérienne à droite.

6.2.2. Proposition. Si A est noethérien (respectivement, artinien) à droite, alors tout A-module M à droite de type fini est noethérien (respectivement, artinien).

Démonstration. Supposons que A est artinien et $M = x_1A+\cdots+x_nA$ avec $x_1, \ldots, x_n \in M$. Pour $1 \le i \le n$, on a x_iA est isomorphe à A/I_i avec $I_i = \{a \in A \mid x_ia = 0\}$, et donc artinien. Ainsi M est artinien. Ceci achève la démonstration.

Exemple. Si K est un corps et A est de dimension finie sur K, alors tout A-module de dimension finie est noethérien et artinien.

6.2.3. Théorème. Supposons que A est noethérienne à droite. Soit M un A-module à droite de type fini.

(1) Tout sous-module de M est de type fini.

(2) M est plat si, et seulement si, M est projectif.

(3) M admet une résolution projective dont tous les modules sont de type fini. En particulier, M est de présentation finie.

(4) Pour toute famille $\{I_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ de A-modules à droite, le co-produit $\amalg_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ est injectif si, et seulement si, I_λ est injectif pour tout $\lambda \in \Lambda$.

Démonstration. (1) Comme A est noethérienne et M est de type fini, M est noethérien. Par conséquent, tout sous-module de M est de type fini.

(2) Il suit du théorème 5.21 et la partie (3).

(3) Comme M est de type fini, il existe un épimorphisme $d_0 : P_0 \to M$ avec P_0 projectif de type fini. D'après la partie (1), $K_1 = \ker(d_0)$ est de type fini. Donc il existe un épimorphisme $d_1' : P_1 \to K_1$ avec P_1 projectif de type fini. Posant d_1 le composé de d_1' et l'inclusion $K_1 \to P_0$, on obtient une suite exacte $P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$ avec P_0, P_1 de type fini. Par récurrence, on construire une résolution projective de M désirée.

(4) La nécessité suit du théorème 4.4.2(2). Supposons que I_λ est injectif pour tout $\lambda \in \Lambda$. Soit $f : J \to \amalg_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ un A-homomorphisme avec J un idéal à droite de A. Comme A est noethérienne, $J = a_1A+\cdots+a_rA$ avec $a_i \in J$. Évidemment il existe $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_t\} \subseteq \Lambda$ tel que $f(a_i) \in \amalg_{j=1}^t I_{\lambda_j}$, pour tout $1 \le i \le r$. Donc $f(J) \subseteq \amalg_{j=1}^t I_{\lambda_j}$. Comme $\amalg_{j=1}^t I_{\lambda_j} = \Pi_{j=1}^t I_{\lambda_j}$ est injectif, il existe un A-homomorphisme $\phi : A_A \to \amalg_{j=1}^t I_{\lambda_j}$ tel que $\phi(a) = f(a)$, pour tout $a \in J$. Donc $\amalg_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ est injectif par le critère de Baer. Ceci achève la démonstration.

Exemple. On sait que $\mathbb{Z}$ est noethérienne. Le $\mathbb{Z}$-module plat $\mathbb{Q}$ n'est pas projective.

6.3. Modules de longueur finie

Soient K un anneau commutatif et A une K-algèbre.

6.3.1. Définition. Un A-module non nul S est dit *simple* si 0 et S sont les seuls sous-modules de S.

Exemples. (1) Un $\mathbb{Z}$-module M est simple si, et seulement si, M est d'ordre premier.

(2) Un sous-module I de A_A est simple si, et seulement si, I est un idéal à droite minimal de A.

(3) Supposons K est un corps. Alors un K-espace E est un K-module simple si, et seulement si, E est de dimension 1.

Remarques. (1) Soit N un sous-module de M. Alors M/N est simple si, et seulement si, N est un sous-module maximal de M.

(2) Toute algèbre admet un module simple.

6.3.2. Proposition. Soit S un A-module à droite non nul. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(1) S est simple.

(2) $S = xA$, pour tout $x \in S$ non nul.

(3) Il existe un idéal à droite maximal I de A tel que $S \cong A/I$.

Démonstration. Il suffit de montrer que (2) implique (3). Prenons $0 \neq x \in S$. Alors $S = xA \cong A/I$, où $I = \{a \in A \mid xa = 0\}$. Soit J un idéal à droite de A tel que $I \subset J$. Prenons $a \in J\backslash I$. Alors $xa \neq 0$, et donc $xA = S = (xa)A = xJ$. En particulier, $x = xb$ avec $b \in J$. D'où $1 - b \in I$. Donc $1 \in J$, d'où $J = A$. Ceci achève la démonatration.

Exemples. Soient D un sur-corps de K.

(1) Soit V un D-module à gauche non nul. Considérons la K-algèbre $A = \operatorname{End}_D(V)$. Muni de la multiplication externe $f \cdot x = f(x)$, V est un A-module à gauche simple. En effet, si $x \in V$ est non nul, alors la famille D-libre $\{x\}$ se prolonge en une D-base $\mathcal{B}$ de V. Pour tout $y \in V$, il existe un D-homomorphisme tel que $f(x) = y$, c'est-à-dire, il existe $f \in A$ tel que $y = f \cdot x$. Ainsi V est un A-module simple.

(2) Considérons la K-algèbre $M_n(D)$ des matrices de type $n \times n$ sur D. Pour la multiplication matricielle, l'ensemble $D^{(n)}$ des matrices-colonne de type $n \times 1$ sur D est un $M_n(D)$-module à gauche simple, et l'ensemble D^n des matrices-ligne de type $1 \times n$ sur D est un $M_n(D)$-module à droite simple,

6.3.3. Lemme de Schur. Si S est un A-module simple, alors $\operatorname{End}_A(S)$ est un sur-corps de K.

Démonstration. Soit $f : S \to S$ un A-homomorphisme non nul. Alors $\ker(f)$ et $\operatorname{im}(f)$ sont des sous-modules de S avec $\ker(f) \neq S$ et $\operatorname{im}(f) \neq 0$. Ainsi $\ker(f) = 0$ et $\operatorname{im}(f) = S$. Donc f est bijectif, et donc un isomorphisme. Ceci achève la démonstration.

6.3.4. Définition. Soit M $\in$Mod-A non nul. Une suite

$$0 = M_n \subset M_{n-1} \subset \cdots \subset M_1 \subset M_0 = M$$

avec $M_0/M_1, \ldots, M_{n-1}/M_n$ simples s'appelle une *suite de composition* de longueur n de M.

Exemple. (1) Considérer le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}_6$. Alors

$$0 \subset 2\,\mathbb{Z}_6 \subset \mathbb{Z}_6 \quad \text{et} \quad 0 \subset 3\,\mathbb{Z}_6 \subset \mathbb{Z}_6$$

sont deux suites de composition de $\mathbb{Z}_6$.

(2) Supposons que K est un corps. Soit E un K-espace avec base $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Alors

$$0 \subset < v_1 > \subset < v_1, v_2 > \subset \cdots \subset < v_1, \ldots, v_{n-1} > \subset < v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n >= E$$

est une suite de composition de E.

(3) Soient p un premier et $n \geq 1$. Alors $\mathbb{Z}_{p^n}$ a une seule suite de composition:

$$0 \subset p^{n-1}\,\mathbb{Z}_{p^n} \subset \cdots \subset p\,\mathbb{Z}_{p^n} \subset \mathbb{Z}_{p^n}.$$

(4) Si S est simple, alors $0 \subset S$ est la seule suite de composition de S.

6.3.5. Théorème. Soit M un A-module non nul. Alors M a une suite de composition si, et seulement si, M est artinien et noethérien en même temps.

Démonstration. Supposons que M est noethérien et artinien. Alors il existe un sous-module maximal M_1 de M. On a $M_1 \subset M_0 = M$ avec M/M_1 simple. Remarquons que M_1 est noethérien. Si $M_1 \neq 0$, alors M_1 admet un sous-module maximal M_2. D'où on a $M_2 \subset M_1 \subset M_0 = M$ avec M_0/M_1 et M_1/M_2 simples. Ce procédé se termine parce qu'il n'existe pas de suite décroissante infinie de sous-modules de M. Donc on a une suite

$$0 = M_n \subset M_{n-1} \subset \cdots \subset M_1 \subset M_0 = M$$

avec $M_0/M_1, M_1/M_2, \ldots, M_{n-1}/M_n$ simples. Ceci est une suite de composition de M.

Supposons réciproquement que M admet une suit de composition

$$0 = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_{m-1} \subset N_m = M.$$

Alors N_1 est simple, et donc artinien et noethérien. Supposons que N_i avec $1 \leq i < m$ est artinien et noethérien. Comme N_{i+1}/N_i est artinien et noethérien, on voit que N_{i+1} est artinien et noethérien. Par récurrence, $M = N_m$ est artinien et noethérien. Ceci achève la démonstration.

Il suit du résultat précédant que si M a une suite de composition, alors tout sous-module non nul de M a une suite de composition.

6.3.6. Théorème de Jordan-Hölder. Soit M un A-module non nul ayant deux suites de composition

$$0 = M_n \subset M_{n-1} \subset \cdots \subset M_1 \subset M_0 = M \quad \text{et} \quad 0 = N_m \subset N_{m-1} \subset \cdots \subset N_1 \subset N_0 = M.$$

Posons $S_i = M_{i-1}/M_i$, $i = 1, \ldots, n$; et $T_j = N_{j-1}/N_j$, $j = 1, \ldots, m$. Alors $m = n$ et il existe une n-permutation σ telle que $T_i \cong S_{\sigma(i)}$, $i = 1, \ldots, n$. Dans ce cas, on dit que $M_0/M_1, \cdots, M_{n-1}/M_n$ sont les *facteurs de composition* de M.

Démonstration. On procède par récurrence sur n. Si $n = 1$, alors M est simple. Ainsi $m = 1$ et $M_0/M_1 = N_0/N_1$. Supposons que $n > 1$ et l'énoncé est vraie pour $n - 1$. Si $M_1 = N_1$, alors l'énoncé suit de l'hypothèse de récurrence. Supposons $M_1 \neq N_1$. Alors $M_1 + N_1 = M$ car M_1 est un sous-module maximal de M. En outre,

$$(*) \qquad M/M_1 \cong N_1/(M_1 \cap N_1) \quad \text{et} \quad M/N_1 \cong M_1/(M_1 \cap N_1).$$

Donc $M_1 \cap N_1$ est un sous-module maximal de M_1 et de N_1. Or $M_1 \cap N_1$ a une suite de composition $0 = L_t \subset \cdots \subset L_1 \subset L_0 = M_1 \cap N_1$, et ainsi $0 = L_t \subset \cdots \subset L_1 \subset L_0 \subset M_1$ est une suite de composition de M_1. D'après l'hypothèse de récurrence, $n - 1 = t + 1$ et

$$\{M_1/M_2, \cdots, M_{n-1}/M_n\} \cong \{M_1/L_0, L_0/L_1, \cdots, L_{t-1}/L_t\}.$$

En outre, $0 = L_t \subset \cdots \subset L_1 \subset L_0 \subset N_1$ est une suite de composition de N_1. Il suit encore de l'hypothèse de récurrence que $m - 1 = n - 1$, et donc $n = m$, et en outre,

$$\{N_1/N_2, \cdots, N_{n-1}/N_n\} \cong \{N_1/L_0, L_0/L_1, \cdots, L_{t-1}/L_t\}.$$

Par conséquent,

$$\{M_0/M_1, M_1/M_2, \cdots, M_{n-1}/M_n\} \cong \{M_0/M_1, M_1/L_0, L_0/L_1, \cdots, L_{t-1}/L_t\}$$

et

$$\{N_0/N_1, N_1/N_2, \cdots, N_{n-1}/N_n\} \cong \{N_0/N_1, N_1/L_0, L_0/L_1, \cdots, L_{t-1}/L_t\}.$$

D'après $(*)$, on a $M_0/M_1 \cong N_1/L_0$ et $N_0/N_1 \cong M_1/L_0$. Donc

$$\{M_0/M_1, M_1/M_2, \cdots, M_{n-1}/M_n\} \cong \{N_0/N_1, N_1/N_2, \cdots, N_{n-1}/N_n\}.$$

Ceci achève la démonstration.

6.3.7. Définition. Soit M un A-module. On définit la *longueur de composition* de M, notée $\ell(M)$, par

$$\ell(M) = \begin{cases} 0, & \text{si } M = 0; \\ n, & \text{si } M \text{ admet une suite de composition de longueur } n; \\ \infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarques. (1) M est simple si et seulement, si $\ell(M) = 1$.

(2) M est de longueur finie si, et seulement si, M est artinien et noethérien.

(3) Si K est un corps, alors la longueur d'un K-espace vectoriel est égale à sa dimension.

6.3.8. Corollaire. Tout A-module de longueur finie est de type fini. La réciproque est vraie si A est artinienne et noethérienne.

6.3.9. Proposition. Soit $0 \to L \to M \to N \to 0$ une suite exacte courte de A-modules. Alors M est de longueur finie si, et seulement si, L et N sont de longueur finie. Dans ce cas, $\ell(M) = \ell(L) + \ell(N)$.

Démonstration. On peut supposer que L est un sous-module de M et $N = M/L$. La première partie suit de la proposition 6.1.3 et le théorème 6.3.5. Supposons que L et M/L sont de longueur finie. Si $L = 0$ ou $N = 0$, on voit aisément que $\ell(M) = \ell(L) + \ell(N)$. Sinon, L a une suite de composition $0 = L_s \subset L_{s-1} \subset \cdots \subset L_1 \subset L_0 = L$, et M/L en a une

$$0 = M_t/L \subset M_{t-1}/L \subset \cdots \subset M_1/L \subset M_0/L = M/L$$

avec $L \subsetneq M_i$. Alors M admet une suite de composition comme suit:

$$0 = L_s \subset L_{s-1} \subset \cdots \subset L_1 \subset M_t \subset M_{t-1} \subset \cdots \subset M_1 \subset M_0 = M,$$

puisque $M_{i-1}/M_i \cong (M_{i-1}/L)/(M_i/L)$. Ceci achève la démonstration.

6.3.10. Corollaire. Soit M un A-module de longueur finie. Soient f, g deux endomorphismes de E.

(1) Pour tout sous-module N de M, $\ell(M) = \ell(N)$ si, et seulement si, $M = N$.

(2) f est un automorphisme si, et seulement si, il est un épimorphisme si, et seulement si, il est un monomorphisme.

(3) fg est un automorphisme si, et seulement si, f et g le sont.

Démonstration. (1) On a $\ell(M) = \ell(N) + \ell(M/N)$. Si $\ell(M) = \ell(N)$, alors $\ell(M/N) = 0$. Donc $M/N = 0$, c'est-à-dire, $M = N$.

(2) Comme $\mathrm{im}(f) \cong M/\mathrm{ker}(f)$, on a $\ell(M) = \ell(\mathrm{im} f) + \ell(\mathrm{ker} f)$. Or f est surjectif si, et seulement si, $\ell(M) = \ell(\mathrm{im} f)$ si, et seulement si, $\ell(\mathrm{ker} f) = 0$ si, et seulement si, f est un monomorphisme. Ceci achève la démonstration.

(3) Si fg est bijectif, alors f est surjectif. Ainsi f est bijectif, et donc g est bijectif. Ceci achève la démonstration.

6.4. Modules semi-simples

Soient K un anneau commutatif et A une K-algèbre.

6.4.1. Définition. Un A-module M est dit *semi-simple* si $M = 0$ ou $M = \oplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ avec M_λ simple.

Exemples. (1) Le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}_n$ est semi-simple lorsque $n = p_1 \cdots p_r$ avec les p_i des premiers deux à deux distincts. En effet, posons $n_i = p_1 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_r$, et $M_i = n_i\, \mathbb{Z}_n$. Alors les M_i sont simples tels que $\mathbb{Z}_n = M_1 \oplus \cdots \oplus M_r$.

(2) Le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}$ n'est pas semi-simple, et $\mathbb{Z}_{p^n}$ avec p un premier et $n \geq 2$ ne l'est non plus.

Remarques. (1) Tout A-module simple est semi-simple.

(2) Le co-produit de modules semi-simples est semi-simple.

6.4.2. Proposition. Soit $A \to B$ un épimorphisme de K-algèbres. Soit M un B-module.

(1) M est un A-module.

(2) N est un sous-module du B-module M si et seulement si N est un sous-module du A-module M.

(3) M est simple en tant que B-module si, et seulement si, M est simple en tant que A-module.

(4) M est semi-simple en tant que B-module si, et seulement si, M est semi-simple en tant que A-module.

6.4.3. Proposition. Les conditions suivantes sont équivalentes pour un A-module semi-simple M:

(1) M est de type fini.

(2) M est artinien.

(3) M est noethérien.

Démonstration. On a $M = \oplus_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$, où S_λ est simple pour tout $\lambda \in \Lambda$. Il est évident que si Λ est infini, alors aucun des trois conditions n'est satisfaite. Supposons que Λ est fini, disons $M = S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_n$. Alors il est évident que M est de type fini. En outre,

$$0 \subset S_1 \subset S_1 \oplus S_2 \subset \cdots \subset S_1 \oplus \cdots \oplus S_{n-1} \subset M$$

est une suite de composition de M. Ainsi M est nothérien et artinien. Ceci achève la démonstration.

6.4.4. Proposition. Soit M un A-module tel que $M = \sum_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ avec S_λ des sous-modules simples de M. Alors pour tout sous-module N de M, il existe $\Omega \subseteq \Lambda$ tel que $M = N \oplus (\oplus_{\lambda\in\Omega} S_\lambda)$. En particulier, M est semi-simple.

Démonstration. Si $N = M$, on prend $\Omega = \emptyset$. Supposons que $N \neq M$. Alors il existe un $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que $S_{\lambda_0} \nsubseteq N$, et donc $N \cap S_{\lambda_0} = 0$. D'après le lemme de Zorn, il existe un sous-ensemble Ω de Λ maximal pour la condition que $\sum_{\lambda\in\Omega} S_\lambda = \oplus_{\lambda\in\Omega} S_\lambda$ et $N \cap \oplus_{\lambda\in\Omega} S_\lambda = 0$. Supposons que $M \neq N + (\oplus_{\lambda\in\Omega} S_\lambda)$. Alors il existe λ_1 tel que $S_{\lambda_1} \nsubseteq N + (\oplus_{\lambda\in\Omega} S_\lambda)$, et donc $S_{\lambda_1} \cap (N + (\oplus_{\lambda\in\Omega} S_\lambda)) = 0$. En particulier, $\lambda_1 \notin \Omega$. Posons $\Omega_1 = \Omega \cup \{\lambda_1\}$. Alors $\sum_{\lambda\in\Omega_1} S_\lambda = \oplus_{\lambda\in\Omega_1} S_\lambda$ et $N \cap \oplus_{\lambda\in\Omega_1} S_{\lambda_1} = 0$, une contradiction. Donc

$$M = N + (\oplus_{\lambda\in\Omega} S_\lambda) = N \oplus (\oplus_{\lambda\in\Omega} S_\lambda).$$

Ceci achève la démonstration.

6.4.5. Théorème. Soit M un A-module. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:
(1) M est semi-simple.
(2) M est une somme de sous-modules simples.
(3) Tout sous-module de M est un facteur direct.

Démonstration. Il suffit de montrer que (3) implique (1). Supposons que M est non nul satisfaisant à (3). Alors tout sous-module de M satisfait à (3). Prenons $x \in M$ non nul. Étant de type fini, xA contient un sous-module maximal N. Or il existe un sous-module T de xA tel que $xA = N \oplus T$. Donc $T \cong (xA)/N$ est un sous-module simple de M. De même, tout sous-module non nul de M contient un sous-module simple. Soit $\{S_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ l'ensemble des sous-modules simples de M. Posons $M_0 = \sum_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$. Alors $M = M_0 \oplus M_1$. Si $M_1 \neq 0$, alors M_1 contient un sous-simple S. Or $S \subseteq M_0 \cap M_1$, une contradiction. Donc $M = M_0$ est semi-simple. Ceci achève la démonstration.

Exemple. Soit $n > 1$. Alors le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}_n$ est semi-simple si, et seulement si, $n = p_1 \cdots p_r$ avec $p_1, \ldots, p_r$ premiers 2 à 2 distincts.

6.4.6. Corollaire. Soit $0 \to L \to M \to N \to 0$ une suite exacte courte de A-modules. Si M est semi-simple, alors L et N sont semi-simples.

Démonstration. On peut supposer que L est un sous-module de M et $N = M/L$. Comme M est sémi-simple, L est semi-simple. En outre, $M = L \oplus L_0$. Ainsi $N \cong M/L$ est semi-simple. Ceci achève la démonstration.

Remarque. La réciproque du corollaire 6.4.6 n'est pas vraie.

Le résultat suivant est évident.

6.4.7. Lemme. Soient S et T des A-modules simples. Alors $\mathrm{Hom}_A(S,T) \neq 0$ si, et seulement si, $S \cong T$. Dans ce cas, $\mathrm{Hom}_A(S,T) \cong \mathrm{End}_A(S)$.

6.4.8. Proposition. Soit M un A-module semi-simple de type fini. Alors

$$\mathrm{End}_A(M) \cong \Pi_{i=1}^t M_{n_i}(D_i),$$

où D_i est un sur-corps de K et $M_{n_i}(D_i)$ la K-algèbre des matrices de type $n_i \times n_i$ sur D_i.

Démonstration. Par hypothèse $M = S_1 \oplus \cdots \oplus S_r$ avec S_i simple. Supposons que $S_1, \ldots, S_t$ sont deux à deux non isomorphes tels que pour tout $i > t$, il existe $1 \leq j \leq t$ tel que $S_i \cong S_j$. Alors $M \cong \amalg_{i=1}^t M_i$, où $M_i = S^{n_i}$, le co-produit de n_i copies de S_i. Comme $\mathrm{Hom}_A(S_i, S_j) = 0$, on a $\mathrm{Hom}_A(M_i, M_j) = 0$, pour tous i, j distincts avec $1 \leq i, j \leq t$. En outre, $\mathrm{End}_A(M_i) \cong M_n(D_i)$, où $D_i = \mathrm{End}_A(S_i)$ est un sur-corps de K d'après le lemme de Schur. Par conséquent, on a $\mathrm{End}_A(M) = \Pi_{i=1}^t M_{n_i}(D_i)$. Ceci achève la démonstration.

6.5. Algèbres semi-simples

Soient K un anneau commutatif et A une K-algèbre.

6.5.1. Définition. On dit que A est une K-algèbre *semi-simple à gauche* (respectivement, *à droite*) si le module ${}_AA$ (respectivement, A_A) est semi-simple.

Remarque. Si A est semi-simple à gauche, alors A est artinienne et noethérienne à gauche.

Exemples. (1) Un sur-corps de K est une K-algèbre semi-simple à gauche et à droite.

(2) Supposons que K est un corps et V est un K-espace vectoriel de dimension infinie dénombrable. Soit B la K-algèbre des endomorphismes de V. Alors

(a) $M = \{f \in B \mid \dim f(V) < \infty\}$ est un idéal bilatère maximal de B.

(b) $A = B/M$ est une algèbre simple mais non semi-simple à gauche.

Démonstration. (a) Il est claire que M est un idéal bilatère de B. Soit I un idéal bilatère de B tel que $M \subset I$. Prenons $f \in I$ dont l'image a une base infinie $\{v_1, \ldots, v_n, \ldots, \}$. Soit U le noyau de f et W le complémentaire de U dans V. Alors $V = U \oplus W$ et $W \cong f(V)$. Soit $w_i \in W$ tel que $f(w_i) = v_i$. Alors $\{w_1, \ldots, w_n, \ldots, \}$ est une base de W. Supposons que U est de dimension finie. Or il existe $f' \in B$ tel que $f'(v_i) = w_i$ pour tout $i \geq 1$. Donc $f'f(w_i) = w_i$ pour tout $i \geq 1$. Ainsi $(\mathbb{1} - f'f)(V) = (\mathbb{1} - f'f)(U)$ est de dimension finie, c'est-à-dire, $\mathbb{1} - f'f \in M$. D'òu $\mathbb{1} \in I$. Supposons que U est de dimension infinie. Prenons une base $\{u_1, \ldots, u_n, \ldots, \}$ de U. Alors les u_i et les w_j forment une base de V. Il existe $g \in B$ tel que $g(u_i) = v_{2i}$ et $g(w_i) = v_{2i-1}$ pour tout $i \geq 1$, et $h \in B$ tel que $h(v_{2i}) = u_i$ et $h(v_{2i-1}) = w_i$ pour tout $i \geq 1$. Donc $hfg = \mathbb{1} \in I$. Ceci montre que M est un idéal bilatère maximal de B.

(b) Comme M est un idéal bilatère maximal, $A = B/M$ est une algèbre simple. Prenons une base $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots, \}$ de V. Posons $I_n = \{f \in B \mid f(x_i) = 0,\ i = 1, \ldots, n\}$, qui est un idéal à gauche de B. Donc $J_n = (I_n + M)/M$ est un idéal à gauche de A, pour tout $n \geq 1$. Or il existe $f_n \in B$ tel que $f_n(x_i) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et $f(x_j) = x_j$ pour tout $j > n$. Alors $f_n \in I_n$ mais $f_n \notin I_{n+1} + M$. Ainsi $f_n \in J_n$ mais $f_n \notin J_{n+1}$. Donc A admet une suite décroissante non stationnaire

$$J_1 \supset J_2 \supset \cdots \supset J_n \supset J_{n+1} \supset \cdots.$$

Par conséquent, A n'est pas artinien à gauche, et donc non semi-simple.

6.5.2. Lemme. Soit D un sur-corps de K. Pour tout $n \geq 1$, la K-algèbre $M_n(D)$ est semi-simple à gauche et à droite.

Démonstration. En tant que $M_n(D)$-module à gauche, $M_n(D) = J_1 \oplus J_2 \oplus \cdots \oplus J_n$ avec J_i l'idéal à gauche de $M_n(D)$ des matrices dont les colonnes sont toutes nulles sauf que la i-ième colonne. Pour tout $1 \leq i \leq n$, $J_i \cong_{M_n(D)} V$, le $M_n(D)$-module à gauche simple des matrices de type $n \times 1$. Ainsi $M_n(D)$ est semi-simple à gauche. De même, $M_n(D)$ est semi-simple à droite. Ceci achève la démonstration.

6.5.3. Lemme. Si B et C sont des K-algèbres semi-simples à gauche (respectivement, à droite), alors $A = B \Pi C$ est une K-algèbre semi-simple à gauche (respectivement, à droite).

Démonstration. Supposons que ${}_BB = S_1 \oplus \cdots \oplus S_r$ avec S_i simples et ${}_CC = T_1 \oplus \cdots \oplus T_s$ avec T_j simples. À l'aide des projections canoniques, B et C sont des A-modules à gauche semi-simples. Comme ${}_AA \cong_A B \amalg_A C$ est semi-simple, A est une K-algèbre semi-simple à gauche. Ceci achève la démonstration.

6.5.4. Théorème de Wedderburn-Artin. Les conditions suivantes sont équivalentes pour une K-algèbre A:

(1) A est semi-simple à gauche.

(2) $A \cong \Pi_{i=1}^t M_{n_i}(D_i)$ avec D_i un sur-corps de K pour tout $1 \leq i \leq t$.

(3) A est semi-simple à droite.

Démonstration. Il suit des lemmes 6.5.3 et 6.5.4 que (2) implique (1). Supposons que le A-module ${}_AA$ est semi-simple. D'après la proposition 6.4.8, il existe un isomorphisme de K-algèbres $\theta : \Pi_{i=1}^t M_{n_i}(D_i) \to \mathrm{End}_A({}_AA)$, où D_i est un sur-corps de K pour tout $1 \leq i \leq t$. Remarquons que $\phi : \mathrm{End}_A({}_AA) \to A : f \mapsto f(1)$ et

$$\psi : \Pi_{i=1}^t M_{n_i}(D_i) \to \Pi_{i=1}^t M_{n_i}(D_i) : (M_1, \ldots, M_t) \mapsto (M_1^T, \ldots, M_t^T)$$

sont des anti-isomorphismes de K-algèbres. Par conséquent, $\phi\theta\psi : \Pi_{i=1}^t M_{n_i}(D_i) \to A$ est un isomorphisme de K-algèbres. Ceci montre l'équivalence de (1) et (2). De même, on a l'équivalence de (2) et (3). Ceci achève la démonstration.

On dit alors que A est semi-simple si A est semi-simple à gauche ou à droite.

6.5.5. Théorème. Les conditions suivantes sont équivalentes pour une K-algèbre A:
(1) A est semi-simple.
(2) Tout A-module est semi-simple.
(3) Tout A-module est projectif.
(4) Toute suite exacte courte de A-modules est scindée.
(5) Tout A-module est injectif.

Démonstration. Il est évident que les trois dernières conditions sont équivalentes.

Supposons que ${}_AA$ est un A-module semi-simple. Alors tous A-modules libres sont semi-simples. Comme tout A-module est un quotient d'un A-module libre, on voit que tout A-module est semi-simple.

Supposons que tout A-module est semi-simple. Si M est un A-module, alors M est un sous-module d'un A-module injectif I. Comme I est semi-simple, M est un facteur direct de I. Donc M est injectif.

Supposons que tout A-module est injectif. Alors tout sous-module de ${}_AA$ est un facteur direct de ${}_AA$. Ainsi ${}_AA$ est semi-simple, c'est-à-dire, A est semi-simple. Ceci achève la démonstration.

6.5.6. Théorème. Supposons que A est semi-simple. Si $A_A = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$ avec les S_i simples, alors $S_1, \ldots, S_n$ sont les A-modules simples à isomorphismes près.

Démonstration. Si S est un A-module simple, alors il existe un épimorphisme $f : A \to S$. Or il existe un i tel que $f|_{S_i}$ est non nul, et donc un isomorphisme. Ceci achève la démonstration.

6.5.7. Théorème. Soit A artinienne à gauche ou à droite. Alors A est simple si, et seulement si, $A \cong M_n(D)$ avec D un sur-corps de K.

Démonstration. Il suffit de montrer la necessité. Supposons que A est simple et artinienne à droite. Alors A admet un idéal à droite minimal I. Comme AI est un idéal bilatère non nul de A, on a $A = AI = \sum_{a\in A} aI$. Si $aI \neq 0$, alors $I \to aI : x \mapsto ax$ est un épimorphisme, et donc un isomorphisme. Donc le A-module A_A est semi-simple. D'après le théorème de Wedderburn-Artin, $A \cong \Pi_{i=1}^t M_{n_i}(D_i)$ avec D_i un sur-corps de K pour tout $1 \leq i \leq t$. Comme A est simple, on a $t = 1$. Ceci achève la démonstration.

Chapitre VII: Radical

7.1. Radical et socle de modules

Soient K un anneau commutatif et A une K-algèbre.

7.1.1. Définition. Soit M un A-module.
(1) Le *radical* de M, noté rad$M$, est un sous-module de M défini par

$$\mathrm{rad}M = \begin{cases} M, & \text{si } M \text{ n'a pas de sous-module maximal;} \\ \cap M_\lambda, & M_\lambda \ \text{ parcourt les sous-modules maximaux de } M. \end{cases}$$

(2) On appelle *coiffe* de M le quotient $M/\mathrm{rad}M$.

Exemple. Si S est simple, alors rad$S = 0$ et $S \cong \mathrm{top}S$.

Remarque. Si M est non nul de type fini, alors rad$M \neq M$.

7.1.2. Proposition. Soit $f : M \to N$ un homomorphisme de A-modules.
(1) $f(\mathrm{rad}M) \subseteq \mathrm{rad}N$. En particulier, si f est un isomorphisme, alors $f(\mathrm{rad}M) = \mathrm{rad}N$.
(2) f induit un unique A-homomorphisme

$$\bar{f} : \mathrm{top}M \to \mathrm{top}N : x + \mathrm{rad}M \mapsto f(x) + \mathrm{rad}N.$$

Démonstration. Il suffit de montrer la première partie de (1). Supposons que rad$N \neq N$. Soit N_0 un sous-module maximal de N. Considérons la projection $p : N \to N/N_0$. Comme N/N_0 est simple, on voit que $\mathrm{Ker}(pf) = M$ si $pf = 0$; et sinon, $\mathrm{Ker}(pf)$ est un sous-module maximal de M. Donc $\mathrm{rad}M \subseteq \mathrm{Ker}(pf)$, c'est-à-dire, $f(\mathrm{rad}M) \subseteq N_0$. Donc $f(\mathrm{rad}M) \subseteq \mathrm{rad}N$. Ceci achève la démonstration.

Remarque. Si N est un sous-module d'un A-module M, alors rad$N \subseteq$ rad$M$.

7.1.3. Proposition. Soit M un A-module. Si $M = \oplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$, alors $\mathrm{rad}M = \oplus_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{rad}M_\lambda$.

Démonstration. D'abord, $\mathrm{rad}M_\lambda \subseteq \mathrm{rad}M$, pour tout $\lambda \in \Lambda$. Ainsi $\sum_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{rad}M_\lambda \subseteq \mathrm{rad}M$. D'autre part, si $p_\lambda : M \to M_\lambda$ est la projection, alors $p_\lambda(\mathrm{rad}M) \subseteq \mathrm{rad}M_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Donc $\mathrm{rad}M = \sum_{\lambda\in\Lambda} p_\lambda(\mathrm{rad}M) \subseteq \sum_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{rad}M_\lambda$. Ainsi $\mathrm{rad}M = \sum_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{rad}M_\lambda = \oplus_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{rad}M_\lambda$. Ceci achève la démonstration.

Remarque. Si M est semi-simple, alors rad$M = 0$.

7.1.4. Proposition. Pour tout A-module M, rad$M$ est le plus petit sous-module de M tel que $\mathrm{rad}(M/\mathrm{rad}M) = 0$.

Démonstration. Supposons que rad$M \neq M$. Si $\{M_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ est la famille des sous-modules maximaux de M, alors $\{M_\lambda/\mathrm{rad}M | \lambda \in \Lambda\}$ sont les sous-modules maximaux de $M/\mathrm{rad}M$. Donc $\mathrm{rad}(M/\mathrm{rad}M) = \cap_{\lambda\in\Lambda}(M_\lambda/\mathrm{rad}M) = (\cap_{\lambda\in\Lambda}M_\lambda)/\mathrm{rad}M = \mathrm{rad}M/\mathrm{rad}M = 0$. Enfin, soit N un sous-module de M tel que $\mathrm{rad}(M/N) = 0$. D'après le lemme 7.1.2, $(\mathrm{rad}M + N)/N \subseteq \mathrm{rad}(M/N) = 0$. Donc $\mathrm{rad}M + N = N$, c'est-à-dire, $\mathrm{rad}M \subseteq N$. Ceci achève la dérmpnstration.

7.1.5. Théorème. Soit M un A-module artinien. Alors M est semi-simple si, et seulement si, $\mathrm{rad}M = 0$.

Démonstration. Il suffit de montrer la suffisance. Supposons que $M \neq 0$ et $\mathrm{rad}M = 0$. Soient $\Sigma = \{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ la famille des sous-modules maximaux de M. Comme M est artinien, il existe $M_1, \ldots, M_n \in \Sigma$ tels que $\cap_{i=1}^n M_i = \cap_{\lambda\in\Lambda}M_\lambda$, qui est nul par hypothèse. Donc

$$f : M \to \amalg_{i=1}^n (M/M_i) : x \mapsto (x + M_1, \cdots, x + M_n)$$

est un monomorphisme. Comme $\amalg_{i=1}^n (M/M_i)$ est semi-simple, M l'est aussi. Ceci achève la démonstration.

7.1.6. Corollaire. Si M est un A-module artinien, alors $M/\mathrm{rad}M$ est semi-simple.

7.1.7. Définition. Soit M un A-module. Le *socle* de M, noté soc$M$, est un sous-module de M défini par

$$\mathrm{soc}M = \begin{cases} 0, & \text{si } M \text{ n'a pas de sous-module simple} \\ \sum S_\lambda, & S_\lambda \text{ parcourt les sous-modules simples de } M \end{cases}$$

Remarque. soc$M$ est le plus grand sous-module semi-simple de M.

Exemple. $\mathrm{soc}\, \mathbb{Z}_{27} = 9\, \mathbb{Z}_{27} \cong \mathbb{Z}_3$.

7.1.8. Proposition. Soit $f : M \to N$ un homomorphisme de A-modules. Alors $f(\mathrm{soc}M) \subseteq \mathrm{soc}N$. Par conséquent, si f est un isomorphisme, alors $f(\mathrm{soc}M) = \mathrm{soc}N$.

Démonstration. Comme soc$M$ est semi-simple, on voit que $f(\mathrm{soc}M)$ est semi-simple. Ainsi $f(\mathrm{soc}M) \subseteq \mathrm{soc}N$. Ceci achève la démonstration.

7.1.9. Proposition. Soit M un A-module. Si $M = \oplus_{\lambda\in\Lambda}M_\lambda$, alors $\mathrm{soc}M = \oplus_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{soc}M_\lambda$.

Démonstration. Comme $\sum_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{soc}M_\lambda$ est semi-simple, on a $\sum_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{soc}M_\lambda \subseteq \mathrm{soc}M$. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, soit $p_\lambda : M \to M_\lambda$ la projection. Alors

$$\mathrm{soc}M = \sum_{\lambda\in\Lambda} p_\lambda(\mathrm{soc}M) \subseteq \sum_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{soc}M_\lambda.$$

Donc soc$M = \sum_{\lambda\in\Lambda}$ soc$M_\lambda = \oplus_{\lambda\in\Lambda}socM_\lambda$. Ceci achève la démonstration.

Exemple. soc $\mathbb{Z}_{36} = \text{soc}(4\,\mathbb{Z}_{36}) \oplus \text{soc}(9\,\mathbb{Z}_{36}) \cong \text{soc}(\,\mathbb{Z}_9)\amalg \text{soc}(\,\mathbb{Z}_4) \cong\ \mathbb{Z}_3 \amalg\ \mathbb{Z}_2$.

7.2. Radical d'algèbres

Soient K un anneau commutatif et A une K-algèbre non nulle.

7.2.1. Lemme. Le radical radA_A de A est un idéal bilatère propre de A.

Démonstration. Étant non nulle de type fini, A_A admet un idéal à droite maximal. Ainsi rad$A_A \neq A$. Pour $a \in A$, $f_a : A_A \to A_A : x \mapsto ax$ est A-linéaire. Donc $a(\text{rad}A_A) = f_a(\text{rad}A_A) \subseteq \text{rad}A_A$. Ceci achève la démonstration.

7.2.2. Définition. On dit que radA_A est le *radical de Jacobson* (ou simplement, *radical*) de A, noté $J(A)$.

Exemples. (1) Si A est semi-simple, alors $J(A) = 0$.

(2) $J(\,\mathbb{Z}) = 0$. En effet, un sous-module $a\,\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ est maximal dans si, et seulement si, a est premier. Donc $J(\,\mathbb{Z}) = \cap_{p \text{ premier}} (p\,\mathbb{Z}) = q\,\mathbb{Z}$ avec $q \in\ \mathbb{Z}$. Étant divisible par tous les premiers, $q = 0$. Ceci achève la démonstration.

7.2.3. Théorème. $J(A) = \{\, a \in A \mid 1 - ax$ inversible à droite, pour tout $x \in A\}$.

Démonstration. Soit $a \in A$. Si $1-ax$ n'est pas inversible à droite pour un $x \in A$, alors $(1-ax)A \neq A$. Donc il existe un sous-module maximal M de A_A tel que $(1-ax)A \subseteq M$. Ainsi $a \notin M$, et donc $a \notin J(A)$. D'autre part, si $a \notin J(A)$, alors il existe un sous-module maximal M de A_A tel que $a \notin M$. Alors $M + aA = A$, d'où $1 = b + ax$, $b \in M, x \in A$. Par conséquent, $1 - ax = b$ n'est pas inversible à droite. Ceci achève la démonstration.

7.2.4. Théorème. $J(A)$ est le plus grand idéal bilatère tel que $1-a$ soit inversible pour tout $a \in J(A)$.

Démonstration. Soit $a \in J(A)$. Alors il existe $b \in A$ tel que $(1-a)b = 1$. Donc b est inversible à gauche. En outre, $b = 1 + ab$ est inversible à droite. Donc b est inversible avec $b^{-1} = 1 - a$. Ceci montre que $1 - a$ est inversible. D'autre part, si I est un idéal bilatère de A tel que $1 - a$ inversible, pour tout $a \in I$. En particulier, $1 - ax$ est inversible à droite pour tout $a \in I$ et $x \in A$. Ainsi $I \subseteq J(A)$. Ceci achève la démonstration.

En vue de la caractérisation précédente de $J(A)$, on a le résultat suivant.

7.2.5. Théorème. Pour toute K-algèbre A, $J(A) = \text{rad}({}_AA) = \{a \in A \mid 1 - xa$ inversible à gauche, pour tout $x \in A\}$.

Un idéal à droite ou à gauche de A est dit *nil* si tous ses éléments sont nilpotents.

7.2.6. Corollaire. $J(A)$ contient tous les idéaux nils à droite ou à gauche de A.

Démonstration. Soit I un idéal nil à droite de A. Pour tout $a \in I, x \in A$, on a $(ax)^n = 0$. Donc $(1-ax)(1+ax+\cdots+(ax)^{n-1}) = (1+ax+\cdots+(ax)^{n-1})(1-ax) = 1-(ax)^n = 1$. Donc $I \subseteq J(A)$. Ceci achève la démonstration.

Remarque. Un élément nilpotent n'appartient pas à $J(A)$ en général, par exemple, dans l'algèbre $M_n(K)$ avec K un corps.

7.2.7. Lemme de Nakayama. Soit M un A-module à droite de type fini. Si $MJ(A) = M$, alors $M = 0$.

Démonstration. Supposons que $MJ(A) = M$. Soit $\{x_1, \ldots, x_n\}$ un ensemble minimal de générateurs de M. Comme $x_1 \in MJ(A)$, on a $x_1 = x_1r_1 + x_2r_2 + \cdots + x_nr_n$ avec les $r_i \in J(A)$. Si $n > 1$, $x_1(1-r_1) = x_2r_2 + \cdots + x_nr_n$. Comme $1 - r_1$ est inversible, $x_1 \in < x_2, \cdots, x_n >$. Ainsi $M =< x_2, \ldots, x_n >$, une contradiction à la minimalité. Donc $n = 1$. Ceci donne $x_1(1-r_1) = 0$, et donc $x_1 = 0$ car $1 - r_1$ est inversible. Par conséquent, $M = 0$. Ceci achève la démonstration.

7.2.8. Définition. On dit que A est *locale* si $A/J(A)$ est un sur-corps de K.

7.2.9. Théorème. Les conditions suivantes sont équivalentes pour une K-algèbre A:

(1) A est locale.

(2) Les éléments non inversibles forment un idéal bilatère.

(3) $J(A)$ est un idéal à droite maximal, et donc le plus grand idéal à droite propre.

(4) $J(A)$ est un idéal à gauche maximal, et donc le plus grand idéal à gauche propre.

Dans ce cas, $J(A)$ est l'idéal bilatère formé des éléments non inversibles.

Démonstration. Supposons que A est locale. Comme $J(A) \neq A$, tout $a \in J(A)$ est non inversible. Si $a \notin J(A)$, alors $a + J(A)$ est inversible dans $A/J(A)$. Donc il existe $b \in A$ tel que $(a+J(A))(b+J(A)) = 1+J(A) = (b+J(A))(a+J(A))$, c'est-à-dire, $1 = ab+r_1 = ba+r_2$ avec $r_1, r_2 \in J(A)$. D'après le théorème 7.2.3, ab et ba sont inversibles. Soient $x, y \in A$ tels que $abx = 1 = yba$. Alors $bx = yb$ est l'inverse de a. Cela veut dire que $J(A)$ est formé des éléments non inversibles de A.

Supposons que (2) est valide. Soit I un idéal à droite de A avec $I \neq A$. Pour tout $a \in I, x \in A$, $ax \in I$ n'est pas inversible. Comme $(1-ax)+ax$ est inversible, $1-ax$ est inversible. Donc $I \subseteq J(A)$. Donc (3) est valide.

Enfin il est trivial que (3) ou (4) implique (1). Ceci achève la démonstration.

Exemple. Si K est un corps, alors $K[x]/(x^n)$ est locale.

7.3. Idempotents et décomposition d'algèbres

Une famille $\{e_1, \ldots, e_r\}$ d'idempotents de A est dite *orthogonale* si $e_i e_j = 0$ pour tous $i \neq j$; la famille orthogonale est dite *complète* si $1 = e_1 + \cdots + e_r$.

Exemple. Si e est un idempotent, alors $\{e, 1-e\}$ est une famille orthogonale complète d'idempotents.

7.3.1. Définition. Soit e un idempotent de A.

(1) Une *décomposition* de e est une somme $e = e_1 + \cdots + e_r$ avec $r > 1$ et $\{e_1, \ldots, e_r\}$ une famille orthogonale d'idempotents non nuls.

(1) On dit que e est *primitif* si e n'admet aucune décomposition.

Exemple. Soient K un corps et Q un carquois fini. Alors les sommets de Q forment une famille orthogonale d'idempotents primitifs de KQ.

7.3.2. Proposition. (1) L'identité 1 est un idempotent primitif si, et seulement si, les seuls idempotents de A sont 0 et 1.

(2) Si A est locale, alors 1 est primitif.

Démonstration. (1) La suffisance est évidente. Si e est un idempotent autre que 0 et 1, alors $1 = e + (1-e)$ est une décomposition de 1.

(2) D'abord, 1_A est le seul idempotent qui est inversible. Supposons que A est locale et e est un idempotent. Comme $1 = e + (1-e)$, e ou $1-e$ est inversible. Donc $e = 1$ ou $e = 0$. Ceci achève la démonstration.

Soit e un idempotent de A. On voit que eAe est une K-algèbre ayant e pour identité. En outre, si M est un A-module à droite ou à gauche, alors Me ou eM est un eAe-module à droite ou à gauche, respectivement.

7.3.3. Proposition. Soit e un idempotent non nul de A.

(1) Pour un A-module M_A, $\mathrm{Hom}_A(eA, M) \cong Me$ en tant que eAe-modules à droite.

(2) Si f est un idempotent de A, alors $\mathrm{Hom}_A(eA, fA) \cong fAe$ en tant que eAe-modules.

(3) En tant que K-algèbres, $eAe \cong \mathrm{End}_A(eA)$.

(4) Si $e = e_1 + e_2$ est une décomposition de e, alors $e_1, e_2 \in eAe$.

Démonstration. (1) Pour tout $g \in \mathrm{Hom}_A(eA, M)$, $g(e) = g(e)e \in Me$. Posons

$$\phi : \mathrm{Hom}_A(eA, M) \to Me : g \mapsto g(e).$$

Pour tout $a \in A$, on a $\phi(g \cdot eae) = g(eae) = g(e)eae$. Ainsi ϕ est eAe-linéaire. Réciproquement, pour tout $y \in Me$, $g_y : eA \to M : a \mapsto ya$ est A-linéaire tel que $g_y(e) = ye = y$. Donc

$$\psi : Me \to \mathrm{Hom}_A(eA, M) : y \mapsto g_y$$

est l'inverse de ϕ.

(3) D'après (1), $\phi : \mathrm{End}_A(eA) \to eAe : g \mapsto g(e)$ est un isomorphisme de K-modules. Pour tout $g_1, g_2 \in \mathrm{End}_A(eA)$, on a

$$\phi(g_1g_2) = (g_1g_2)(e) = g_1(g_2(e)) = g_1(e \cdot g_2(e)) = g_1(e)g_2(e) = \phi(g_1)\phi(g_2).$$

Donc ϕ est un isomorphisme de K-algèbres.

(4) Soit $e = e_1+e_2$ une décomposition de A. Alors $e_ie = e_i^2 = ee_i$, et donc $e_i = ee_ie \in eAe$, $i = 1, 2$. Ceci achève la démonstration.

7.3.4. Lemme. Soit $\{e_1, \ldots, e_r\}$ une famille orthogonale complète d'idempotents de A. Pour tous A-modules M_A et $_AN$, en tant K-modules,

$$M = Me_1 \oplus \cdots \oplus Me_r \text{ et } N = e_1N \oplus \cdots \oplus e_rN.$$

Démonstrtion. Pour tout $x \in M$, on a $x = \sum_{i=1}^r xe_i$. Si $\sum_{i=1}^r x_ie_i = 0$, alors $0 = \sum_{i=1}^r x_ie_ie_j = x_je_j = 0$ pour tout $1 \leq j \leq r$. Ainsi $M = Me_1 \oplus \cdots \oplus Me_r$. De même, $N = e_1N \oplus \cdots \oplus e_rN$. Ceci achève la démonstration.

7.3.5. Proposition. Soit $\{I_1, \ldots, I_r\}$ une famille d'idéaux à droite de A. Alors $A = I_1 \oplus \cdots \oplus I_r$ si, et seulement si, il existe uniquement une famille orthogonale complète $\{e_1, \ldots, e_r\}$ d'idempotents de A telle que $I_i = e_iA$ pour tout $1 \leq i \leq r$.

Démonstration. D'après le lemme 7.3.4, il suffit de montrer la necessité. Supposons que $A = I_1 \oplus \cdots \oplus I_r$. Alors $1 = e_1 + \cdots + e_r$ avec $e_i \in I_i$. On se fix un i avec $1 \leq i \leq r$. Pour tout $x_i \in I_i$, $x_i = e_1x_i + \cdots + e_rx_i$. Ainsi $e_ix_i = x_i$ et $e_jx_i = 0$ si $j \neq i$. En particulier, $e_i^2 = e_i$ et $e_je_i = 0$ si $j \neq 1$. En outre, $I_i \subseteq e_iA \subseteq I_i$. Par conséquent, $I_i = e_iA$. L'unicité est évidente. Ceci achève la démonstration.

Un idempotent de A est dit *central* s'il appartient au centre de A. Par exemple, 1_A et 0_A sont des idempotents centraux. Dans ce cas, $eA = eAe$ est un idéal bilatère de A.

7.3.6. Définition. Soit e un idempotent central.

(1) Une *décomposition centrale* de e est une somme $e = e_1 + e_2 + \cdots + e_r$ avec $r > 1$ et $\{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$ une famille orthogonale d'idempotents centraux non nuls.

(2) On dit que e est *centralement primitif* s'il n'admet aucune décomposition centrale.

7.3.7. Proposition. Soit $1_A = e_1 + \cdots + e_r$ une décomposition centrale de 1_A.

(1) Si M est un A-module M à droite, alors Me_i est un sous-module de M tel que $M = Me_1 \oplus \cdots \oplus Me_r$.

(2) Si M_i est un Ae_i-module, $i = 1, \ldots, r$, alors $M = M_1 \times \cdots \times M_r$ est un A-module pour la multiplication $(x_1, \ldots, x_r)(a_1 + \cdots + a_r) = (x_1a_1, \cdots, x_ra_r)$.

(3) Pour tous A-modules M et N,

$$\mathrm{Hom}_A(M,N) \cong_K \Pi_{i=1}^r \mathrm{Hom}_A(Me_i, Ne_i) = \Pi_{i=1}^r \mathrm{Hom}_{Ae_i}(Me_i, Ne_i).$$

Démonstration. Les parties (1) et (2) sont évidentes. Soient M et N des A-modules. Soient $q_i : Me_i \to M$ les injections et $p_j : N \to Ne_j$ les projections. Alors pour tout $f \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$, $p_j f q_i = 0$ si $i \neq j$. En effet, $f(xe_i)e_j = f(x)e_ie_j = 0$, pour tout $x \in M$. Or le résultat suit du théorème 3.2.10.

7.3.8. Définition. (1) Une *décomposition* de A est un produit $A = A_1\Pi \cdots \Pi A_r$ de K-algèbres avec $r > 1$ et A_i non nulle, pour tout $1 \leq i \leq r$.

(2) On dit que A est *connexe* si elle n'admet aucune décomposition.

7.3.9. Théorème. Les décompositions de A sont en bijection avec les décompositions centrale de 1_A.

Démonstration. Supposons que $A = A_1\Pi \cdots \Pi A_r$. Alors $c_i = (0, \ldots, 0, 1_{A_i}, 0, \ldots, 0)$, $i = 1, \ldots, r$, sont des idempotents centraux orthogonaux non nuls de A tels que $1_A = c_1 + \cdots + c_r$.

Supposons réciproquement que $1_A = c_1 + \cdots + c_r$ est une décomposition centrale de 1_A. Alors $A_i = c_iA$ est une K-algèbre non nulle ayant c_i pour identité, $i = 1, \ldots, r$. D'après le lemme 7.3.4, $A = \oplus_{i=1}^r c_iA$ en tant que K-modules. Ainsi

$$\phi : A \to A_1\Pi \cdots \Pi A_r : x \mapsto (c_1x, \ldots, c_rx)$$

est un K-isomorphisme. Il est facile de vérifier que ϕ est un homomorphisme de K-algèbres, et donc cela done une décomposition de A. Ceci achève la démonsstration.

7.3.10. Corollaire. Une K-agèbre A est connexe si, et seulement si, 1_A est centralement primitif.

Exemple. Soit $A = KQ/I$, où K est un corps, Q est un carquois fini et I est un idéal bilatère de KQ. Alors A est connexe si, et seulement si, Q est un carquois connexe.

7.3.11. Théorème. Soit $A = A_1\Pi \cdots \Pi A_r$ une décomposition de A. Alors

$$\text{Mod-}A \approx \text{Mod-}A_1 \times \cdots \times \text{Mod-}A_r.$$

Démonstration. Soit $1_A = e_1 + \cdots + e_r$ la décomposition centrale de 1_A corréspondante. Pour tout objet M de Mod-A, posons $\eta(M) = (Me_1, \cdots, Me_r)$, et pour tout morphisme $f : M \to N$ de Mod-A, posons $\eta(f) = (p_1fq_1, \ldots, p_rfq_r)$, où $q_i : Me_i \to M$ sont les injections et $p_j : N \to Ne_j$ sont les projections. D'après la proposition 7.3.7, η est une équivalence de Mod-A sur Mod-$Ae_1 \times \cdots \times$ Mod-Ae_r. Comme $A_i \cong Ae_i$ pour tout $1 \leq i \leq r$, η induit une équivalence de Mod-A sur Mod-$A_1 \times \cdots \times$ Mod-A_r. La preuve se termine.

7.4. Décomposition de modules

Soient K un anneau commutatif et A une K-algèbre.

7.4.1. Définition. Soit M un A-module non nul.

(1) Une *décomposition* de M est une somme directe $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_r$ avec $r > 1$ et $M_i \neq 0$ pour tout $1 \leq i \leq r$.

(2) M est dit *indécomposable* s'il n'admet aucune décomposition.

Exemple. (1) Tout module simple est indécomposable.

(2) Le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}$ est indécomposable.

(3) Le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}_n$ est indécomposable si, et seulement si, $n = p^s$ avec p un premier.

7.4.2. Théorème. Soit M un A-module non nul. Les décompositions de M sont en bijection avec les décompositions de l'identité $\mathbb{1}_M$ de $\mathrm{End}_A(M)$.

Démonstration. Soit $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ une décomposition de M. Pour tout $1 \leq i \leq n$, posons $p_i : M \to M_i$ la projection et $q_i : M_i \to M$ l'injection. Alors $\mathbb{1}_M = q_1 p_1 + \cdots + q_n p_n$ est une décomposition de $\mathbb{1}_M$.

Supposons réciproquement que $\mathbb{1}_M$ a une décomposition $\mathbb{1}_M = e_1 + \cdots + e_n$. Posons $M_i = e_i(M)$, qui est non nul, pour tout $1 \leq i \leq n$. Alors $M = M_1 + \cdots + M_n$ car $\mathbb{1}_M = e_1 + \cdots + e_n$. Cette dernière somme est directe car $e_i e_j = 0$ pour tous $i \neq j$. Donc M admet une décomposition. Ceci achève la démonstration.

7.4.3. Corollaire. Soit M un A-module. Alors M est indécomposable si, et seulement si, $\mathbb{1}_M$ est un idempotent primitif de $\mathrm{End}_A(M)$. En particulier, si $\mathrm{End}_A(M)$ est locale, alors M est indécomposable.

On dit qu'un A-module M est *fortement indécomposable* si l'algèbre $\mathrm{End}_A(M)$ est locale. D'après le lemme de Shur, un module simple est fortement indécomposable.

Exemple. Le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}$ est indécomposable, mais non fortement indécomposable.

7.4.4. Lemme de Fitting. Soit M un A-module de longueur finie. Soit $f \in \mathrm{End}_A(M)$. Il existe un $n > 0$ tel que

$$M = \mathrm{im}(f^n) \oplus \ker(f^n).$$

Démonstration. On a des chaînes

$$\mathrm{im}(f) \supseteq \mathrm{im}(f^2) \supseteq \cdots \supseteq \mathrm{im}(f^i) \supseteq \cdots$$

et

$$\ker(f) \subseteq \ker(f^2) \subseteq \cdots \subseteq \ker(f^i) \subseteq \cdots.$$

Comme M est artinien et noethérien, il existe un $n > 0$ tel que $\mathrm{im}(f^n) = \mathrm{im}(f^{2n})$ et $\ker(f^n) = \ker(f^{2n})$. Pour tout $x \in M$, il existe $y \in M$ tel que $f^n(x) = f^{2n}(y)$. Donc $z = x - f^n(y) \in \ker(f^n)$. Ainsi $x = f^n(y) + z \in \mathrm{im}(f^n) + \ker(f^n)$. Si $x \in \mathrm{im}(f^n) \cap \ker(f^n)$, alors $x = f^n(y_1)$ avec $y_1 \in M$, et donc $0 = f^n(x) = f^{2n}(y_1)$. Cela implique $y_1 \in \ker(f^{2n}) = \ker(f^n)$. Donc $x = f^n(y_1) = 0$. Ceci achève la démonstration.

7.4.5. Proposition. Soit M un A-module de longueur finie. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(1) M est indécomposable.

(2) Les endomorphismes non inversibles de M sont tous nilpotents.

(3) M est fortement indécomposable.

Démonstration. D'après le corollaire 7.3.3, (3) implique (1). Supposons que M est indécomposable. Soit $f \in \mathrm{End}_A(M)$ qui est non inversible. D'après le lemme de Fitting, il existe un $n > 0$ tel que $M = \mathrm{im}(f^n) \oplus \ker(f^n)$. Étant non inversible, f^n n'est pas injectif en vue du corollaire 6.3.10(2), c'est-à-dire, $\ker(f^n) \neq 0$. L'indécomposabilité de M donne $\mathrm{im}(f^n) = 0$, c'est-à-dire, f est nilpotent.

Supposons que (2) est valide. Supposons que $\mathrm{End}_A(M)$ n'est pas locale. D'après le théorème 7.2.9(2), les éléments non inversibles de $\mathrm{End}_A(M)$ ne forment pas un idéal bilatère. Or si $f, g \in \mathrm{End}_A(M)$ tels que fg est inversible, alors f et g sont tous inversibles en vue du corollaire 6.3.10(3). Ceci implique qu'il existe $f, g \in \mathrm{End}_A(M)$ tous non inversibles tels que $f + g$ est inversible. Soit $h \in \mathrm{End}_A(M)$ tel que $fh + gh = \mathbb{1}_M$. D'après (2), gh est nilpotent. Donc $fh = 1 - gh$ est inversible. Par conséquent, f est inversible, une contradiction. Ceci achève la démonstration.

7.4.6. Théorème d'Azumaya. Soit M un A-module tel que $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ avec M_i fortement indécomposable pour tout $1 \leq i \leq n$. Si $M = N_1 \oplus \cdots \oplus N_m$ avec N_j indécomposable pour tout $1 \leq j \leq m$, alors $m = n$ et il existe une permutation σ sur $\{1, \ldots, n\}$ telle que $M_i \cong N_{\sigma(i)}$, pour tout $1 \leq i \leq n$.

Démonstration. Si $n = 1$, c'est trivial. Supposons $n > 1$ et le résultat est vrai pour $n - 1$. Soient $u_i : M \to M_i$, $p_j : M \to N_j$ les projections et $v_i : M_i \to M$, $q_j : N_j \to N$ les inclusions. On a

$$\mathbb{1}_{M_1} = u_1 v_1 = u_1\Big(\sum_{j=1}^{m} q_j p_j\Big) v_1 = \sum_{j=1}^{m} u_1 q_j p_j v_1.$$

Comme $\mathrm{End}_A(M_1)$ est locale, on peut supposer $h = u_1q_1p_1v_1$ est inversible. Remarquons que $p_1v_1(h^{-1}u_1q_1)$ est un idempotent de $\mathrm{End}_A(N_1)$. Si $p_1v_1h^{-1}u_1q_1 = 0$, alors $p_1v_1 = p_1v_1h^{-1}u_1q_1p_1v_1 = 0$. Donc $h = u_1q_1p_1v_1 = 0$, une contradiction. Ainsi $p_1v_1(h^{-1}u_1q_1) = \mathbb{1}_{N_1}$. Par conséquent, p_1v_1 est un isomorphisme et $(p_1v_1)^{-1} = h^{-1}u_1q_1$.

On prétend maintenant que $M = N_1 \oplus (M_2 \oplus \cdots \oplus M_n)$. Si $x \in N_1 \cap (M_2 \oplus \cdots \oplus M_n)$, alors $0 = u_1(x) = u_1q_1(x)$. D'où $h^{-1}u_1q_1(x) = 0$, et ainsi $x = 0$. D'autre part, pour tout $y \in N_1$, on a $u_1(y) = y - u_2(y) - \cdots - u_n(y) \in N_1 + M_2 + \cdots + M_n$. Et pour tout $x \in M_1$, on a $p(x) \in N_1$, et donc

$$h(x) = u_1q_1p_1v_1(x) = u_1q_1p_1(x) = u_1p_1(x) \in N_1 + M_2 + \cdots + M_n.$$

Ceci implique $M_1 = h(M_1) \subseteq N_1 + M_2 + \cdots + M_n$. Donc

$$M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n = N_1 + M_2 + \cdots + M_n = N_1 \oplus (M_2 \oplus \cdots \oplus M_n).$$

Par conséquent, $M_2 \oplus \cdots \oplus M_n \cong M/N_1 \cong N_2 \oplus \cdots \oplus N_m$. La démonstration se termine par l'hypothèse de récurrence.

7.4.7. Théorème de Krull-Schmidt. Soit M un A-module non nul de longueur finie. Alors $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ avec M_i indécomposable pour tout $1 \le i \le n$. En outre, si $M = N_1 \oplus \cdots \oplus N_m$ avec N_j indécomposable, alors $m = n$ et il existe une permutation σ sur $\{1, \ldots, n\}$ telle que $M_i \cong N_{\sigma(i)}$, pour tout $1 \le i \le n$.

Démonstration. L'existence suit d'une récurrence sur $\ell(M)$. L'unicité suit de la proposition 7.4.5 et le théorème 7.4.6. La preuve se termine.

Chapitre VIII: Catégories de modules sur une algèbre artinienne

8.1. Radical et modules de type fini

Soient K un anneau commutatif et A une K-algèbre non nulle artinienne à droite. On désigne par $J(A)$ le radical de A.

8.1.1. Théorème. Le radical $J(A)$ est le plus grand idéal bilatère nilpotent de A.

Démonstration. Posons $J = J(A)$. D'après le corollaire 7.2.6, J contient tous les idéaux bilatères nilpotents de A. Comme A est artinienne, il existe $n > 0$ tel que $J^n = J^m$, pour tout $m \geq n$. Supposons que $J^n \neq 0$. Alors $J^n J = J^n$. Soit I_0 un idéal à droite non nul de A, qui est minimal pour la propriété que $I_0 J = I_0$. Or $I_0 = I_0 J = I_0 J^2 = \cdots = I_0 J^n$ entraîne qu'il existe $a \in I_0$ tel que $aJ^n \neq 0$. Comme $aJ^n \subseteq I_0$ et $(aJ^n)J = aJ^{n+1} = aJ^n$, on a $I_0 = aJ^n$. Donc I_0 est de type fini tel que $I_0 J = I_0$. D'après lemme de Nakayama, on a $I_0 = 0$, une contradiction. Donc $J^n = 0$. Ceci achève la démonstration.

8.1.2. Corollaire. Les conditions suivantes sont équivalentes:
(1) A est semi-simple.
(2) $J(A) = 0$.
(3) A ne contient aucun idéal nilpotent non nul.

Démonstration. Comme A est artinienne à droite, l'équivalence de (1) et (2) suit du théorème 7.1.5. Enfin, l'équivalence de (2) et (3) suit du théorème 8.1.1. Ceci achève la démonstration.

8.1.3. Lemme. Un A-module M est simple ou semi-simple si, et seulement si, M est un $A/J(A)$-module simple ou semi-simple, respectivement.

Démonstration. Soit S_A simple. Alors $SJ(A) = 0$ ou $SJ(A) = S$. Comme $S \neq 0$, on a $SJ(A) = 0$ d'après lemme de Nakayama. Donc S est un $A/J(A)$-module qui est aussi simple. Ceci achève la démonstration.

8.1.4. Théorème. Soit I un idéal bilatère de A. Alors $I = J(A)$ si, et seulement si, I est nilpotent et A/I est semi-simple.

Démonstration. D'après le théorème 8.1.1, $J(A)$ est nilpotent. Comme A_A est artinien, $A/J(A)$ est semi-simple en tant que A-module à droite. D'après le lemme 8.1.2, $A/J(A)$ est semi-simple en tant que $A/J(A)$-module à droite, c'est-à-dire, $A/J(A)$ est une K-algèbre semi-simple.

Supposons maintenant que I est nilpotent de A. D'après le corollaire 7.2.6, $I \subseteq J(A)$. En outre, $J(A)/I \subseteq J(A/I) = 0$, c'est-à-dire, $J(A) = I$. Ceci achève la démonstration.

Exemples. (1) Le radical de la $\mathbb{R}$-algèbre

$$\begin{pmatrix} \mathbb{R} & 0 \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{pmatrix}$$

est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{R} & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Soient K un corps et Q un carquois fini. Soit J l'idéal bilatère de KQ engendré par les flèches de Q. Un idéal bilatère I de KQ est dit *admissible* s'il existe un entier $n > 0$ tel que $J^n \subseteq I \subseteq J^2$. Dans ce cas, $A = KQ$ est de dimension finie dont le radical est J/I.

8.1.5. Proposition. Pour tout A-module M, $\mathrm{rad}M = MJ(A)$.

Démonstration. Pour tout $x \in M$, $f_x : A_A \to M : a \mapsto xa$ est A-linéaire. Donc $xJ(A) = f_x(\mathrm{rad}A_A) \subseteq \mathrm{rad}M$. D'où, $MJ(A) \subseteq \mathrm{rad}M$. Or $(\mathrm{rad}M)/MJ(A) \subseteq \mathrm{rad}(M/MJ(A))$. D'autre part, $M/MJ(A)$ est un $A/J(A)$-module. Comme $A/J(A)$ est une algèbre semi-simple, d'après le théorème 6.5.5, $M/MJ(A)$ est semi-simple en tant que $A/J(A)$-module. D'après le lemme 8.1.3, $M/MJ(A)$ est un A-module semi-simple. Ainsi $\mathrm{rad}(M/MJ(A)) = 0$. Ceci donne $\mathrm{rad}M \subseteq MJ(A)$. Donc $\mathrm{rad}M = MJ(A)$. Ceci achève la démonstration.

8.1.6. Proposition. Soit M un A-module.

(1) M est semi-simple si, et seulement si, $\mathrm{rad}M = 0$ si, et seulement si, $MJ(A) = 0$.

(2) $\mathrm{rad}M$ est le plus petit sous-module de M tel que $M/\mathrm{rad}M$ est semi-simple.

(3) $\mathrm{soc}M$ est le plus grand sous-module de M annulé par $J(A)$.

Démonstration. (1) D'après la proposition 8.1.5, $\mathrm{rad}M = 0$ si, et seulement si, $MJ(A) = 0$. Supposons que c'est le cas. Alors M est un $A/J(A)$-module, qui est semi-simple. Donc M est un semi-simple A-module.

(2) D'après la partie (1), $M/\mathrm{rad}M$ est semi-simple. Soit N un sous-module de M tel que M/N est semi-simple. Comme $\mathrm{rad}M + N/N \subseteq \mathrm{rad}(M/N) = 0$, on a $\mathrm{rad}M \subseteq N$.

Comme $\mathrm{soc}M$ est le plus grand sous-module semi-simple de M, la partie (3) suit de la partie (1). Ceci achève la démonstration.

8.1.7. Lemme. Tout A-module artinien est noethérien.

Démonstration. Posons $J = J(A)$ et $\overline{A} = A/J$. Soit M un A-module artinien. Comme J est nilpotent, il existe $n > 0$ tel que $MJ^n = 0$. Considérons la chaîne

$$0 = MJ^n \subseteq MJ^{n-1} \subseteq \cdots \subseteq MJ \subseteq MJ^0 = M.$$

Il est évident que MJ^n est noethérien. Supposons que $0 < i \leq n$ et MJ^i est noethérien. Remarquons que MJ^{i-1}/MJ^i est annulé par J, et donc semi-simple. Étant artinien et semi-simple, MJ^{i-1}/MJ^i est noethérien. Par conséquent, MJ^{i-1} est noethérien. Par récurrence, $M = MJ^0$ est nothérien. Ceci achève la démonstration.

8.1.8. Théorème de Hopkins. Une algèbre artinienne à droite (respectivement, à gauche) est noethérien à droite (respectivement, à gauche).

8.2. Décomposition de blocs et modules projectifs de type fini

Soient K un anneau commutatif et A une K-algèbre non nulle artinienne à droite. On désigne par $J(A)$ le radical de A. Comme $A/J(A)$ est semi-simple, on a la conséquence immédiate du théorème de Wedderburn-Artin comme suit.

8.2.1. Théorème. Soit A une K-algèbre artinienne. Alors

$$A/J(A) \cong M_{n_1}(D_1) \,\Pi \cdots \Pi\, M_{n_t}(D_t),$$

où $D_1, \ldots, D_t$ sont des sur-corps de K. Par conséquent,

(1) si A est commutative, alors $A/J(A) \cong K_1\Pi\cdots\Pi K_t$ avec K_i un corps commutatif pour tout $1 \le i \le t$.

(2) si K est un corps algébriquement clos et A est de dimension finie sur K, alors $A/J(A) \cong M_{n_1}(K)\Pi\cdots\Pi M_{n_t}(K)$.

Démonstration. Il suffit de montrer (2). Soit $A/J(A) \cong M_{n_1}(D_1) \,\Pi \cdots \Pi\, M_{n_t}(D_t)$ avec $D_1, \ldots, D_t$ des sur-corps de K. Comme A est de dimension finie, D_i est de dimension finie sur K, pour tout $1 \le i \le t$. Comme K est algébriquement clos, $D_i = K$ pour tout $1 \le i \le t$. Ceci achève la démonstration.

8.2.2. Lemme. (1) Si $\{e_1, \ldots, e_r\}$ est une famille orthogonale d'idempotents non nuls de A. Alors $r \le \ell(A_A)$.

(2) Tout idempotent non nul e de A s'écrit $e = e_1+\cdots+e_s$ avec $e_1, \ldots, e_s$ des idempotents primitifs orthogonaux de A.

(3) Si c est un idempotent central non nul de A, alors il existe des uniques idempotents centraux primitifs orthogonaux $c_1, \ldots, c_t$ de cA tel que $c = c_1 + \cdots + c_t$.

Démonstration. (1) D'après le lemme 7.3.4, $A = e_1A \oplus \cdots \oplus e_rA$. Donc $\sum_{i=1}^r \ell(e_iA) = \ell(A_A)$. Comme e_iA est non nul pour tout $1 \le i \le r$, on a $r \le \ell(A_A)$.

(2) D'après la partie (1), il existe un entier maximal s tel que e s'écrit comme une somme de s idempotents non nuls orthogonaux $e_1, \ldots, e_s$ de A. Supposons que e_1 admet une décomposition $e_1 = f_1 + f_2$. D'après la proposition 7.3.3(4), $f_i = e_1f_ie_1$, $i = 1, 2$. Par conséquent, $f_ie_j = e_jf_i = 0$ pour tous $1 \le i \le 2$ et $1 < j \le r$. Cela implique que $e = f_1 + f_2 + e_2 + \cdots + e_r$ est une décomposition de e, ce qui contredit la maximalité de r. Donc e_i est primitif pour tout $1 \le i \le r$.

(3) On peut montrer l'existence de $c_1, \ldots, c_t$ par le même raisonnement utilisé en (2). Soit $f \in cA$ un idempotent centralement primitif. Alors $f = c_1f + \cdots + c_tf$. Remarquons

que $c_1f, \ldots, c_tf$ sont des idempotents centraux orthogonaux de cA. Ainsi il existe unique $1 \leq i \leq t$ tel que $f = c_if \in c_iA$. Comme c_i est centralement primitif, c_iA ne contient aucun idempotent central autre que c_i et 0. Ainsi $f = c_i$. Ceci montre l'unicité. La preuve se termine.

8.2.3. Lemme. Si e est un idempotent non nul de A, alors eAe est une K-algèbre artinienne à droite.

Démonstration. Si $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_i \supseteq \cdots$ est une chaîne d'idéaux à droite de eAe, alors $I_1A \supseteq I_2A \supseteq \cdots \supseteq I_iA \supseteq \cdots$ est une chaîne d'idéaux à droite de A. Donc il existe $n > 0$ tel que $I_nA = I_mA$, pour tout $m \geq n$. Or

$$I_n = I_neAe = I_nAe = I_mAe = I_meAe = I_m,$$

pour tout $m \geq n$. Par conséquent, eAe est artinienne à droite. Ceci achève la démonstration.

8.2.4. Décomposition de blocs. Toute K-algèbre artinienne A se décompose

$$A = A_1 \Pi \cdots \Pi A_r,$$

où $A_1, \ldots, A_r$ sont des K-algèbres artiniennes connexes, qui sont unique à isomorphisme près et appelés *blocs* de A.

Démonstration. D'après le lemme 8.2.2(3), il existe des uniques idempotents centralement primitifs orthogonaux $e_1, \ldots, e_r$ tels que $1 = e_1 + \cdots + e_r$. Posons $A_i = e_iA$, $i = 1, \ldots, r$. On voit facilement que e_i est centralement primitif dans A_i, et donc A_i est connexe pour tout $1 \leq i \leq r$. D'après le lemme 8.2.3, Enfin, $A \cong A_1 \Pi \cdots \Pi A_r$ d'après le théorème 7.3.9. La preuve se termine.

D'après le lemme 8.2.2(2), on a $1_A = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ avec $e_1, e_2, \ldots, e_n$ des idempotents primitifs orthogonaux. On dit que $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ est un *ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux* de A.

8.2.5. Théorème. Soit $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ un ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux de A. En tant que K-modules,

$$A = \oplus_{1 \leq i,j \leq n} e_iAe_j,$$

appelée *décomposition de Pierce* de A.

Démonstration. D'abord, $A = \oplus_{i=1}^n e_iA$. Pour tout $1 \leq i \leq n$, $e_iA = \oplus_{j=1}^n e_iAe_j$. D'où $A = \oplus_{1 \leq i,j \leq n} e_iAe_j$. La preuve se termine.

Exemple. Soit $A = KQ/I$, où K est un corps, Q est un carquois fini et I est un idéal bilatère de KQ. Posons $Q = \{a_1, \ldots, a_n\}$ et $e_i = a_i + I$. Alors $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est un ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux, et e_iAe_j a pour K-base l'ensemble des classes des chemins de a_j vers a_i.

8.2.6. Théorème. Soit e un idempotent non nul de A. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) e est primitif.

(2) eA est indécomposable.

(3) eAe est une K-algèbre locale.

Démonstration. D'après la proposition 7.3.3(3), $\mathrm{End}_A(eA) \cong eAe$. Comme A_A est de longueur finie d'après le théorème de Hopkins, eA est de longueur finie car il est de type fini. D'après la proposition 7.4.5, eA est indécomposable si, et seulement si, eA est fortement indécomposable, c'est-à-dire, $\mathrm{End}_A(eA)$ est locale. Ce dernier est équivalent à dire que eAe est locale.

En outre, d'après le corollaire 7.4.3, eA est indécomposable si, et seulement si, l'identité de $\mathrm{End}_A(eA)$ est primitif, si et seulement si, e est primitif dans eAe. Ce dernier est équivalet à dire que e est primitif dans A d'après la proposition 7.3.3(4). Ceci achève la démonstration.

8.2.7. Lemme. Si A est semi-simple, alors eAe est semi-simple pour tout idempotent non nul e de A.

Démonstration. On peut écrire $e = e_1 + \cdots + e_t$ avec $e_1, \ldots, e_t$ des idempotents primitifs orthogonaux. Étant indécomposable, e_iA est simple puisque A est semi-simple. Remarquons que e_iAe est un eAe-module. On prétend qu'il est simple. En effet, pour tout $0 \neq e_ixe \in e_iAe$, $e_ixe(eAe) = (e_ixeA)e = (e_iA)e$ puisque e_iA est simple. En tant que eAe-module à droite, on a $eAe = e_1Ae \oplus \cdots \oplus e_tAe$. Donc eAe est une K-algèbre semi-simple. Ceci achève la démonstration.

8.2.8. Proposition. Soit e un idempotent non nul de A. Alors

(1) $J(eAe) = eJ(A)e$.

(2) e est primitif dans A si, et seulement si, $\bar{e} = e + J(A)$ est primitif dans $A/J(A)$.

Démonstration. Posons $\bar{A} = A/J(A)$. Alors $eAe/eJ(A)e \cong \bar{e}\bar{A}\bar{e}$.

(1) On voit que $eJ(A)e$ est un idéal bilatère nilpotent de eAe tel que $eAe/eJ(A)e \cong \bar{e}\bar{A}\bar{e}$. Comme $\bar{A}$ est semi-simple, $\bar{e}\bar{A}\bar{e}$ est semi-simple d'après le lemme 8.2.7. Comme eAe est artinienne, il suit du théorème 8.1.4 que $eJ(A)e = J(eAe)$.

(2) e est primitif si, et seulement si, eAe est locale si, et seulement si, $eAe/eJ(A)e \cong \bar{e}\bar{A}\bar{e}$ est un sur-corps de K si, et seulement si, $\bar{e}\bar{A}\bar{e}$ est locale car son radical est nul si, et seulement si, $\bar{e}$ est primitif. Ceci achève la démonstration.

8.2.9. Lemme. Soient e, f des idempotents primitifs de A. Alors

(1) $\mathrm{rad}(eA) = eJ(A)$ est le seul sous-module maximal de eA.

(2) $eA \cong fA$ si, et seulement si, $eA/eJ(A) \cong fA/fJ(A)$.

Démonstration. (1) Posons $\bar{A} = A/J(A)$. On a $eA/eJ(A) \cong \bar{e}\bar{A}$. Comme e est primitif, $\bar{e}$ est primitif d'après la proposition 8.2.8(2). Ainsi $\bar{e}\bar{A}$ est un $\bar{A}$-module indécomposable et donc simple. Ainsi $\bar{A}$ est un A-module simple. D'où, $eJ(A)$ est un sous-module maximal, et donc le seul de eA.

(2) La nécesité est évidente car $eA/eJ(A)$ est le coiffe de eA. Pour la suffisance, supposons qu'il existe un isomorphisme $\psi : eA/eJ(A) \to fA/fJ(A)$. Soient $p : eA \to eA/eJ(A)$ et $q : fA \to fA/fJ(A)$ les projections. Comme eA est projectif, il existe $\phi : eA \to fA$ tel que $q\phi = \psi p$. If ϕ n'est pas surjectif, alors $\text{im}(\phi) \subseteq fJ(A)$ par (1). D'où $\psi p = q\phi = 0$, et donc $p = 0$, une contradiction. Ainsi ϕ est surjectif, et donc une rétraction. Or eA est indécomposable, on a que ϕ est un isomorphisme. Ceci achève la démonstration.

8.2.10. Théorème. Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ un ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux de A.

(1) Un A-module de type fini P est projectif indécomposable si, et seulement si, $P \cong e_iA$ pour un $1 \leq i \leq n$. Dan ce cas, P est dit un A-module à droite projectif indécomposable *associé à* e_i.

(2) Un A-module S est simple si, et seulement si, il existe un $1 \leq i \leq n$ tel que $S \cong e_iA/e_iJ(A)$. Dan ce cas, S est dit un A-module à droite simple *associé à* e_i.

Démonstration. On a $A = e_1A \oplus \cdots \oplus e_nA$ avec e_iA indécomposable et $e_iA/e_iJ(A)$ simple pour tout $1 \leq i \leq n$.

(1) Supposons que le A-module de type fini P est projectif et indécomposable. Alors il existe un entier $t > 0$ et un A-module Q tels que $P \amalg Q \cong \amalg_{i=1}^t A_A \cong \amalg_{j=1}^n (e_iA)^t$. Comme P est de longueur finie, d'après le théorème de Krull-Schmidt, $P \cong e_jA$ pour un $1 \leq j \leq n$.

(2) Soit S un A-module simple. Il existe un épimorphisme $f : A \to S$. Or il existe un i tel que $g = f|_{e_iA}$ est non nul. Comme S est simple, g est surjectif and $\ker(g)$ un sous-module maximal de e_iA. D'après le lemme 8.2.8(1), on a $\ker(g) = e_iJ(A)$, c'est-à-dire, $S \cong e_iA/e_iJ(A)$. Ceci achève la démonstration.

8.2.11. Corollaire. (1) L'application $P \to P/\text{rad}P$ est bijective de l'ensemble des classes d'isomorphismes de A-modules projectifs indécomposables de type fini sur l'ensemble des classes d'isomorphismes de A-modules simples.

(2) Soit e un idempotent primitif de A. Alors un A-module à droite simple S est associé à e si, et seulement si, $Se \neq 0$.

Démonstration. La partie (1) suit immédiatement du théorème 8.2.9.

(2) Si $S \cong eA/eJ(A)$, alors $Se \cong \text{Hom}_A(eA, S) \neq 0$. Réciproquement, si $Se \neq 0$, alors il existe un A-homomorphisme non nul $f : eA \to S$ qui est un épimorphisme car S est simple.

Donc $\ker(f)$ est un sous-module maximal de eA. Donc $\ker(f) = eJ(A)$. Par conséquent, $S \cong eA/eJ(A)$. Ceci achève la démonstration.

8.2.12. Définition. Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ un ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux de A. On dit que A est *sobre* si $e_iA \ncong e_jA$ si $i \neq j$. Dans ce cas, A admet exactement n modules projectifs indécomposables de type fini et n modules simples, à isomorphisme près.

8.2.13. Lemme. (1) Soit $A \cong A_1 \Pi A_2$ une décomposition de A. Alors A est sobre si, et seulement si, A_1 et A_2 sont sobres.

(2) Soient D un sur-corps de K et $n \geq 1$ un entier. Alors $M_n(D)$ est sobre si, et seulement si, $n = 1$.

Démonstration. (1) Soit $1 = c_1 + c_2$ la décomposition corréspondante de 1_A. Alors $Ac_i \cong A_i$, $i = 1, 2$. Soient $\{e_1, \ldots, e_r\}$ un ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux de A_1 et $\{f_1, \ldots, f_s\}$ celui de A_2. Alors $\{e_1, \ldots, e_r, f_1, \ldots, f_s\}$ est un ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux de A tel que $e_iA = e_i(c_1A)$, $f_jA = f_j(c_2A)$, et $e_iA \cong f_jA$ pour tous $1 \leq i \leq r$ et $1 \leq j \leq s$. Par conséquent, A est sobre si, et seulement si, $e_i(c_1A) = e_iA \ncong e_{i'}A = e_{i'}(c_1A)$ pour $i \neq i'$ et $f_j(c_2A) = f_jA \ncong f_{j'}A = f_{j'}(c_2A)$ pour $j \neq j'$. Ceci est équivalent à dire que A_1 et A_2 sont toutes sobres.

(2) Ayant un seul idempotent no nul, D est sobre. Soit $n > 1$. Alors les matrices e_{ii} avec $1 \leq i \leq n$ forment un ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux de $M_n(D)$. Pour tout $i \geq 1$, on voit que $e_{ii}M_n(D) \cong D^n$, le seul $M_n(D)$-module simple. Ainsi $M_n(D)$ n'est pas sobre.

8.2.14. Théorème. L'agèbre A est sobre si, et seulement si, $A/J(A) = D_1 \Pi \cdots \Pi D_n$, où $D_1, \ldots, D_n$ sont des sur-corps de K.

Démonstration. Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ un ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux de A. Posons $\bar{A} = A/J(A) = M_{m_1}(D_1)\Pi \cdots \Pi M_{m_n}(D_n)$ avec $D_1, \ldots, D_n$ des sur-corps de K. D'après la proposition 8.2.7(2), $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ est un ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux de $\bar{A}$. Comme $\bar{e}_i\bar{A} \cong e_iA/e_iJ(A)$, il suit du lemme 8.2.8(2) que $\bar{e}_i\bar{A} \cong \bar{e}_j\bar{A}$ si, et seulement si, $e_iA \cong e_jA$ pour tous i, j. Par conséquent, A est sobre si, et seulement si, $\bar{A}$ est sobre si, et seulement si, $M_{m_i}(D_i)$ est sobre pour tout $1 \leq i \leq n$ si, et seulement si, $m_i = 1$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Ceci achève la démonstration.

Exemples. (1) Si A est commutatif, alors A est sobre.

(2) Soient K un corps et Q un carquois de n sommets. Si I un idéal bilatère admissible, alors $A = KQ/I$ est sobre. En effet, $A/J(A)$ est un produit de n copies de K.

Remarque. Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ un ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux de A. Alors A est sobre si, et seulement si, $Ae_i \cong Ae_j$ pour tous $i \neq j$.

8.2.15. Corollaire. Soit K un corps algébriquement clos. Alors une K-algèbre artinienne A est sobre si, et seulement si, tout A-module simple est de K-dimension 1.

Démonstration. On a $A/J(A) \cong M_{m_1}(K)\Pi \cdots \Pi M_{m_n}(K)$. Or tout A-module simple est de K-dimension un si, et seulement si, tout $A/J(A)$-module simple est de K-dimension un si, et seulement si, pour tout i, le $M_{m_i}(K)$-module simple K^{m_i} est de K-dimension un si, et seulement si $m_i = 1$ pour tout $1 \le i \le n$ si, et seulement si, A est sobre. Ceci achève la démonstration.

8.2.16. Proposition. Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ un ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux de A telle que $\{e_1A, \ldots, e_rA\}$ avec $1 \le r \le n$ est un ensemble complet des représentants des classes d'isomorphismes des A-modules projectifs indécomposable de type fini. Posons $e = e_1 + \cdots + e_r$. Alors $B = eAe$ est une K-algèbre sobre, appelée *forme sobre* de A.

Démonstration. On voit que $\{e_1, \ldots, e_r\}$ est un ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux de B. Supposons que $\phi : e_iB \to e_jB$ et $\psi : e_jB \to e_iB$ sont B-linéaires tels que $\phi\psi = 1\!\!1_{e_jB}$ et $\psi\phi = 1\!\!1_{e_iB}$. D'après la proposition 7.3.3(3), $x = \phi(e_i) \in e_jBe_i \subseteq e_jAe_i$ et $y = \psi(e_j) \in e_iBe_j \subseteq e_iAe_j$ tels que $xy = e_j$ et $yx = e_i$. Ainsi $e_iA \cong e_jA$, et donc $i = j$. Donc B est sobre. Ceci achève la démonstration.

On accepte sans preuve le résultat suivant.

8.2.17. Théorème. Soit B la forme sobre de A. Alors il existe une équivalence Mod-$A \approx$ Mod-B, appelée l'*équivalence de Morita*.

D'après les théorèmes 7.3.11, 8.2.4 et 8.2.17, dans l'étude de la catégorie Mod-A, on peut supposer sans perte de généralité que A est connexe et sobre.

8.3. Couverture projective de modules de type fini

Soient K un anneau commutatif et A une K-algèbre non nulle artinienne à droite. On commence par une conséquence immédiate des théorèmes de Hopkins et de Krull-Schmidt.

8.3.1. Théorème. Soit M un A-module non nul de type fini.

(1) M est de longueur finie.

(2) M est indécomposable si, et seulement si, M est fortement indécomposable.

(3) Si top$M$ ou soc$M$ est simple, alors M est indécomposable.

(4) $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_r$ avec M_i indécomposable pour tout $1 \le i \le r$. Et cette décomposition est unique à isomorphisme et permutation près.

Démonstration. (1) Comme le module A_A est artinien et noethérien, il en de même pour M car il est de type fini. Donc M est de longueur finie. La partie (2) suit de la partie (1) et la proposition 7.4.5.

(3) Soient N, L des sous-modules non nuls de M avec $N \neq M$ et $L \neq M$. Comme M est de type fini, N ainsi que L est contenu dans un sous-maximal de M. Comme M est artinien, N ainsi que L contient un sous-simple de M. Si top$M$ est simple, alors rad$M$ est un sous-module maximal, et donc le seul sous-module maximal de M. Par conséquent, $N + L \subseteq \mathrm{rad}M \neq M$. Si soc$M$ est simple, alors il est le seul sous-module simple de M. Ainsi $\mathrm{soc}M \subseteq N \cap L$. Ceci montre que $M \neq N \oplus L$ dans chacun des cas.

Enfin, la partie (4) est le théorème de Krull-Schmidt. Ceci achève la démonstration.

8.3.2. Corollaire. La catégorie mod-A des A-modules à droite de type fini est abélienne.

Démonstration. Soit $f : M \to N$ un morphisme de mod-A. D'après le théorème 8.3.1(1), $\ker(f)$ et $N/\mathrm{im}(f)$ sont de type fini. Ainsi le noyau et le co-noyau de f appartiennent à mod-A. Par conséquent, mod-A est abélienne. Ceci achève la démonstration.

8.3.3. Proposition. Soit M un A-module de type fini. Soient $x_1, \ldots, x_s \in M$ tels que $\{x_1 + \mathrm{rad}M, \ldots, x_s + \mathrm{rad}M\}$ est un ensemble de générateurs de $M/\mathrm{rad}M$, alors $\{x_1, \ldots, x_s\}$ est un ensemble de générateurs de M.

Démonstration. Soit J le radical de A. Alors il existe $n > 0$ tel que $J^n = 0$. Posons $\mathrm{rad}^0 M = M$ et $\mathrm{rad}^i M = \mathrm{rad}(\mathrm{rad}^{i-1} M)$ pour tout $i > 0$. D'après la proposition 8.1.5, $\mathrm{rad}^i M = MJ^i$ pour tout $i \geq 0$, où $J^0 = A$. En particulier, $\mathrm{rad}^n M = 0$, contenu dans le sous-module N engendré par $x_1, \ldots, x_s$. Supposons que k avec $0 \leq k < n$ est tel que $\mathrm{rad}^{k+1} M \subseteq N$. Soit $x \in \mathrm{rad}^k M$. Alors $x = y_1 a_1 + \cdots + y_r a_r$ avec $y_i \in M$ et $a_i \in J^k$. D'après l'hypothèse, pour tout $1 \leq i \leq s$, $y_i = z_i + u_i$ avec $z_i \in N$ et $u_i \in \mathrm{rad}M = MJ$. Ainsi $x = \sum_{i=1}^r z_i a_i + \sum_{i=1}^r u_i a_i$. Comme $u_i a_i \in MJ^{k+1}$, on a $x \in N$. Ceci achève la démonstration.

8.3.4. Proposition. Soit $f : P \to M$ un épimorphisme de A-modules de type fini avec P projectif. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(1) f est une couverture projective de M.

(2) $\ker(f) \subseteq \mathrm{rad}P$.

(3) Le morphisme suivant est un isomorphisme:

$$\bar{f} : P/\mathrm{rad}P \to M/\mathrm{rad}M : x + \mathrm{rad}P \mapsto f(x) + \mathrm{rad}M.$$

Démonstration. L'équivalence de (1) et (2) suit du lemme 4.3.8. Comme f est surjectif, $\bar{f}$ l'est aussi. En outre, $\ker(\bar{f}) = f^{-1}(\mathrm{rad}M)/\mathrm{rad}P$. Ainsi $\bar{f}$ est un isomorphisme si, et seulement si, $f^{-1}(\mathrm{rad}M) = \mathrm{rad}P$ si, et seulement si, $f^{-1}(\mathrm{rad}M) \subseteq \mathrm{rad}P$.

Si $f^{-1}(\mathrm{rad}M) \subseteq \mathrm{rad}P$, il est évident que $\ker(f) \subseteq \mathrm{rad}P$. Supposons réciproquement que $\ker(f) \subseteq \mathrm{rad}P$. Si $f^{-1}(\mathrm{rad}M) \not\subseteq \mathrm{rad}P$, alors il existe un sous-module maximal N de P tel que $f^{-1}(\mathrm{rad}M) + N = P$. Comme $\ker(f) \subseteq N$, d'après la proposition 2.1.11(2), $f(N)$ est un sous-module maximal de M. Donc $\mathrm{rad}M \subseteq f(N)$. Ceci nous donne $f(P) = \mathrm{rad}M + f(N) \subseteq f(N) \neq M$, une contradiction. Donc $\mathrm{rad}P = f^{-1}(\mathrm{rad}M)$. Ceci achève la démonstration.

8.3.5. Lemme. Soit $M_1, \ldots, M_t$ des A-modules de type fini. Si $f_i : P_i \to M_i$ est une couverture projective de M_i pour tout $1 \leq i \leq t$, alors

$$f_1 \amalg \cdots \amalg f_t : P_1 \amalg \cdots \amalg P_t \to M_1 \amalg \cdots \amalg M_t : (x_1, \cdots, x_t) \mapsto (f_1(x_1), \cdots, f_t(x_t))$$

est une couverture projective de $M_1 \amalg \cdots \amalg M_t$.

Démonstration. D'après la proposition 8.3.4, $\ker(f_i) \subseteq \mathrm{rad}P_i$ pour tout $1 \leq i \leq t$. Or $\ker(f_1 \amalg \cdots \amalg f_t) = \ker(f_1) \amalg \cdots \amalg \ker(f_t) \subseteq \mathrm{rad}P_1 \amalg \cdots \amalg \mathrm{rad}P_t = \mathrm{rad}(P_1 \amalg \cdots \amalg P_t)$. D'après la proposition 8.3.4, f est une couverture projective de $M_1 \amalg \cdots \amalg M_t$. Ceci achève la démonstration.

8.3.6. Théorème. Soit M un A-module de type fini.

(1) $M/\mathrm{rad}M = S_1 \oplus \cdots \oplus S_r$ avec les S_i simples.

(2) Soient e_i l'idempotent primitif à lequel S_i est associé, et P_i le A-module projectif indécomposable associé à e_i. Alors M admet une couverture projective

$$\varepsilon : e_1A \amalg e_2A \amalg \cdots \amalg e_rA \to M.$$

Démonstration. D'après la proposition 8.3.4, la projection canonique $\sigma_i : P_i \to S_i$ est la couverture projective de S_i. D'après le lemme 8.3.5, $\sigma = \sigma_1 \amalg \cdots \amalg \sigma_r$ est la couverture de $M/\mathrm{rad}M$. Donc σ induit un isomorphisme $\bar{\sigma}$ de $P/\mathrm{rad}P$ sur $\mathrm{top}(M/\mathrm{rad}M) = M/\mathrm{rad}M$. Comme il existe un épimorphisme $\varepsilon : P \to M$ tel que $q\varepsilon = \varepsilon q$, où p, q sont des projections canoniques. Comme q est un épimorphisme minimal, on a f est un épimorphisme et donc une couverture de M. Ceci achève la démonstration.

8.3.7. Théorème. Tout A-module de type fini admet une résolution projective minimale dont tous les modules sont de type fini, qui est unique à isomorphisme près.

8.4. Enveloppes de modules de type fini

Soient K un anneau commutatif et A une K-algèbre non nulle artinienne à droite.

8.4.1. Lemme. Soit M un A-module de type fini. Alors un sous-module N de M est essentiel dans M si, et seulement si, $\mathrm{soc}M \subseteq N$. En particulier, $\mathrm{soc}M$ est essentiel dans M.

Démonstration. Soit N un sous-module essentiel de M. Si S est un sous-module simple de M, alors $N \cap S \neq 0$. Donc $S \subseteq N$. Par conséquent, soc$M \subseteq N$.

D'autre part, supposons que soc$M \subseteq N$. Soit Q un sous-module non nul de M. Étant artinien, Q contient un sous-module simple S. Donc, $S \subseteq$ soc$M \subseteq N$. Par conséquent, $Q \cap N \neq 0$, c'est-à-dire, N est essentiel dans M. Ceci achève la démonstration.

8.4.2. Proposition. Soit $f : M \to I$ un monomorphisme de A-modules de type fini avec I injectif. Les condition suivantes son téquivalentes:

(1) f est une enveloppe injective de M.

(2) soc$I \subseteq \operatorname{im}(f)$.

(3) $f(\text{soc}M) = \text{soc}I$.

Démonstration. L'équivalence de (1) et (2) suit du lemme 8.4.1. Et il est évident que (3) implique (2).

Supposons maintenant que soc$I \subseteq \operatorname{im}(f)$. Posons $L = f^{-1}(\text{soc}I)$. Comme $f(\text{soc}M) \subseteq$ soc$I$, on a soc$M \subseteq L$. En outre, comme f est injectif, $L \cong f(L) = \text{soc}I$ est semi-simple. Ainsi $L \subseteq$ soc$M$. Par conséquent, $f(\text{soc}M) = \text{soc}I$. Ceci achève la démonstration.

8.4.3. Corollaire. Soient M et I des A-modules de type fini avec I injectif. Alors I est l'enveloppe injective de M si, et seulement si, soc$M \cong$ soc$I$. En particulier, I est l'enveloppe injective de soc$I$.

Démonstration. La necessité suit de la proposition 8.4.2(3). Soit $g : \text{soc}M \to \text{soc}I$ un A-isomorphisme. Comme I injectif, il existe $f : M \to I$ tel que $j'g = fj$ avec j et j' des inclusions. Comme j est minimal, f est un monomorphisme tel que soc$I = f(\text{soc}M)$. Par conséquent, f est une enveloppe injective de M. Ceci achève la démonstration.

8.4.4. Proposition. Soient $M_1, \ldots M_t$ et $I_1, \ldots, I_t$ des A-modules de type fini. Si I_i est l'enveloppe injective de M_i pour tout $1 \leq i \leq t$, alors $I_1 \amalg \cdots \amalg I_t$ est l'enveloppe injective de $M_1 \amalg \cdots \amalg M_t$.

Démonstration. D'abord, $I_1 \amalg \cdots \amalg I_t$ est injectif de type fini. Comme soc $M_i \cong$ socI_i, pour tout $1 \leq i \leq t$, on a

$$\text{soc}(M_1 \amalg \cdots \amalg M_t) = \text{soc}M_1 \amalg \cdots \amalg \text{soc}M_t \cong \text{soc}I_1 \amalg \cdots \amalg \text{soc}I_t = \text{soc}(I_1 \amalg \cdots \amalg I_t).$$

Ceci achève la démonstration.

8.4.5. Corollaire. Soient I, J des A-modules injectifs de type fini.

(1) $I \cong J$ si, et seulement si, soc$I \cong$ soc$J$.

(2) I est indécomposable si, et seulement si, soc$I$ est simple.

Démonstration. La partie (1) suit de l'unicté de l'enveloppe injective. Pour montrer la partie (2), posons soc$I = S_1 \oplus \cdots S_t$ avec les S_i simples. Supposons que $t = 1$. Comme I

est de type fini, tout sous-module non nul contient un sous-module simple, qui est S_1 dans ce cas. Donc I n'a pas de facteur direct propre, c'est-à-dire, I est indécomposable. Si $t > 1$, alors l'enveloppe de soc$I$ est décomposable d'après la proposition 8.4.4, c'est-à-dire, I est décomposable. Ceci achève la démonstration.

8.5. Modules injectifs de type fini

Partout dans cette section, on se fixe K un anneau commutatif artinien. Soient $U_1, \ldots, U_r$ les K-modules simples à isomorphisme près. On se fixe J_i l'enveloppe injective de U_i de sorte que $U_i = \mathrm{soc} J_i$ pour tout $1 \leq i \leq r$. Posons $J = J_1 \amalg \cdots \amalg J_r$, l'enveloppe injective de $U_1 \amalg \cdots \amalg U_r$. Remarquons que si K est un corps, alors $J = K$.

8.5.1. Lemme. Soit M un K-module dont x est un élément non nul. Alors il existe $f \in \mathrm{Hom}_K(M, J)$ tel que $f(x) \neq 0$. En particulier, J est un co-générateur injectif de Mod-K.

Démonstration. Posons N le sous-module de M engendré par x. Étant un K-module de type fini, N admet un sous-module simple U, qui est isomorphe à un facteur direct de soc$J$. Ainsi il existe un K-homomorphisme non nul $\phi : U \to J$. Comme J est injectif, il existe $f \in \mathrm{Hom}_K(M, J)$ tel que $f|_U = \phi$. Par conséquent, $f|_N$ est non nul. Donc $f(x) \neq 0$. Ceci achève la démonstration.

8.5.2. Lemme. Si U est un K-module simple, alors $\mathrm{Hom}_K(U, J) \cong U$.

Démonstration. On suppose que $U = U_t = \mathrm{soc} J_t$ pour un $1 \leq t \leq r$. Si $i \neq t$, alors $\mathrm{Hom}_K(U_t, J_i) = 0$ car $U_t \ncong U_i = \mathrm{soc} J_i$. Ainsi $\mathrm{Hom}_K(U, J) \cong \mathrm{Hom}_K(U, J_t)$. Comme U est simple, il existe un $u \in U$ tel que $U = Ku$. Posons $I = \mathrm{ann}(u)$. Alors $U \cong K/I$. Pour tout $\alpha \in K$, $f_\alpha : U \to J_t : x \mapsto \alpha x$ est K-linéaire. Et $f_\alpha = 0$ si, et seulement si, $\alpha \in I$. Or on a un K-homomorphisme

$$\phi : K \to \mathrm{Hom}_K(U, J_t) : \alpha \mapsto f_\alpha$$

de noyau I. Pour tout $f \in \mathrm{Hom}_K(U, J_t)$, $f(U) \subseteq \mathrm{soc} J_t = U$. Ainsi $f(u) = \alpha u$ avec $\alpha \in K$. D'où, $f = f_\alpha$. Donc $\mathrm{Hom}_K(U, J_t) \cong K/I \cong U$. Ceci achève la démonstration.

8.5.3. Proposition. Soit M un K-module de longueur finie.

(1) $\mathrm{Hom}_K(M, J)$ est un K-module de longueur $\ell(M)$.

(2) Il existe un K-isomorphisme fonctoriel $\phi_M : M \to \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_K(M, J), J)$.

Démonstration. (1) On procède par récurrence sur $\ell(M)$. Si $\ell(M) = 1$, c'est-à-dire, M est simple. D'après le lemme 8.5.2, $\mathrm{Hom}_K(M, J) \cong M$ est de longueur 1. Supposons que $\ell(M) > 1$ et l'énoncé est vrai pour les modules de longueur $< \ell(M)$. Comme M n'est simple, il existe une suite exacte courte $0 \to L \to M \to N \to 0$ de K-homomorphismes avec

L et N non nuls. En appliquant le foncteur exact $\mathrm{Hom}_K(-, J)$ à cette suite, on obtient une suite exacte courte

$$0 \to \mathrm{Hom}_K(N, J) \to \mathrm{Hom}_K(M, J) \to \mathrm{Hom}_K(L, J) \to 0.$$

Comme $\ell(M) = \ell(L) + \ell(N)$, on voit que $\ell(L) < \ell(M)$ et $\ell(N) < \ell(M)$. Par l'hypothèse de récurrence, $\mathrm{Hom}_K(N, J)$ et $\mathrm{Hom}_K(L, J)$ sont de longueur $\ell(N)$ et $\ell(L)$ respectivement. Par conséquent, $\mathrm{Hom}_K(M, J)$ est de longueur $\ell(M)$.

(2) Pour tout $x \in M$, on voit que $\phi(x) : \mathrm{Hom}_K(M, J) \to J : f \mapsto f(x)$ est K-linéaire. En outre

$$\phi_M : M \to \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_K(M, J), J) : x \mapsto \phi(x)$$

est K-linéaire. Il suit du lemme 8.5.1 que ϕ_M est injectif, et d'après la partie (1), M et $\mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_K(M, J), J)$ ont même longueur. Par conséquent, ϕ_M est un K-isomorphisme. Il est facile de vérifier que ϕ_M est fonctoriel en M. Ceci achève la démonstration.

Dés maintenant, on se fixe A une K-algèbre, qui est de type fini en tant que K-module. On dit alors que A est une *K-algèbre d'Artin*. Remarquons que A est une K-algèbre artinienne à gauche et à droite. On désigne par mod-A la catégorie de A-modules à droite de type fini et par A-mod celle-ci de A-modules à gauche de type fini. Remarquons que si M est un A-module à gauche ou à droite, alors $\mathrm{Hom}_K(M, J)$ est un A-module à droite ou à gauche respectivement. En outre, d'après la proposition 8.5.3, M est de type fini si, et seulement si, $\mathrm{Hom}_K(M, J)$ est de type fini. Par conséquent, on a deux foncteur contravariants exacts

$$D = \mathrm{Hom}_K(-\,, J) : A\text{-mod} \to \text{mod-}A : M \to \mathrm{Hom}_K(M\,, J);\; f \mapsto \mathrm{Hom}_K(f\,, J)$$

et

$$D = \mathrm{Hom}_K(-\,, J) : \text{mod-}A \to A\text{-mod} : N \to \mathrm{Hom}_K(N\,, J);\; g \mapsto \mathrm{Hom}_K(g\,, J).$$

8.5.4. Théorème. Le foncteur $D : A\text{-mod} \to \text{mod-}A$ est une anti-équivalence ayant pour quasi-inverse le foncteur $D : \text{mod-}A \to A\text{-mod}$.

Démonstration. D'après la proposition 8.5.4(2), pour tout module $M \in \text{mod-}A$, il existe un K-isomorphisme fonctoriel $\phi_M : M \to D^2M$. Il est facile de vérifier que ϕ_M est A-linéaire, et donc un A-isomorphisme. Par conséquent, $\phi = \{\phi_M \mid M \in \text{mod-}A\}$ est un isomorphisme du foncteur $\mathbb{1}_{\text{mod-}A}$ vers D^2. De même, $\mathbb{1}_{A\text{-mod}} \cong D^2$. Ceci achève la démonstration.

Remarque. À cause du fait que D est contravariant tel que $D^2 \cong \mathbb{1}$, on dit que D est une dualité.

8.5.5. Théorème. Soit M un module de A-mod.

(1) M est indécomposable si, et seulement si, DM est indécomposable.

(2) M est injectif ou projectif si, et seulement si, DM est projectif ou injectif, respectivement.

(3) Soit e un idempotent primitif de A. Alors M est simple associé à e si, et seulement si, DM est un A-module à gauche simple associé à e.

Démonstration. (1) Comme D est fidèle et plein, on a $\mathrm{End}_A(M) \cong \mathrm{End}_A(DM)$. Ainsi M est indécomposable si, et seulement si, $\mathrm{End}_A(M)$ est locale si, et seulement si, $\mathrm{End}_A(DM)$ est locale si, et seulement si, DM est indécomposable.

(2) On a deja vu que si M est projectif, alors $DM = \mathrm{Hom}_K(A, J)$ est injectif car J est K-injectif. Supposons que M est injectif. Soit $f : N \to DM$ un épimorphisme dans mod-A. Comme D est exact, $Df : D^2M \to DN$ est un monomorphisme dans A-mod. Comme $D^2M \cong M$ est injectif, il existe un morphisme $g : DN \to D^2M$ tel que $g \circ df = \mathbb{1}_{D^2M}$. Comme D est plein, il existe un morphisme $h : DM \to N$ dans mod-A tel que $g = Dh$. Ainsi $\mathbb{1}_{D^2M} = D(fg) = D(\mathbb{1}_{DM})$. Comme D est fidèle, $fg = \mathbb{1}_{DM}$. Ceci montre que DM est projectif. Réciproquement, si DM est projectif ou injectif, alors $M \cong D^2M$ est injectif ou projectif respectivement.

(3) Si M est non simple, alors il existe une suite exacte courte $0 \to L \to M \to N \to 0$ dans A-mod avec L et N non nuls. Comme D est exact, on a une suite exacte courte $0 \to DL \to DM \to DN \to 0$ dans mod-A avec DL et DN non nuls. Par conséquent, DM est non simple. De même, si DM est non simple, alors $D(DM) \cong M$ est non simple. Supposons maintenant que M est simple associé à e. Alors il existe $x \in M$ tel que $xe \neq 0$. D'après le lemme 8.5.1, il existe $f \in \mathrm{Hom}_K(M, J) = DM$ tel que $(ef)(x) = f(xe) \neq 0$. Ainsi $e(DM) \neq 0$. Ceci montre que DM est le A-module à gauche simple associé à e. La réciproque suit de la dualité. Ceci achève la démonstration.

8.5.6. Corollaire. (1) Pour tout module $M \in A$-mod, les module M et DM ont même longueur de composition.

(2) $D({}_AA)$ est un co-générateur injectif de mod-A.

Démonstration. À l'aide du théorème 8.5.5(3), on peut montrer (1) par récurrence.

(2) Soit X un module de mod-A. On peut supposer que $X = DY$ avec Y un module de A-mod. Il est évident qu'il existe un A-homomorphisme non nul $f : {}_AA \to Y$. Comme D est fidèle, $Df : DY \to D({}_AA)$ est non nul. Ceci achève la démonstration.

8.5.7. Théorème. Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ un ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux de A.

(1) Un A-module à droite I est indécomposable injectif de type fini si, et seulement si, $I \cong D(Ae_i)$ pour un $1 \leq i \leq n$. Dans ce cas, I est dit un A-module injectif indécomposable associé à e.

(2) Pour tout $1 \leq i \leq n$, le A-module à droite simple S_i associé à e_i a pour couverture projective et enveloppe injective e_iA et $D(Ae_i)$, respectivement.

Démonstration. (1) D'après le théorème 8.5.5(2), $D(Ae_i)$ est injectif indécomposable de type fini pour tout $1 \leq i \leq n$. Supposons maintenant que $I \in$ mod-A est indécomposable et injectif. D'après le théorème 8.5.5(2), $DI \in A$-mod est indécomposable et projectif. D'après le théorème 8.2.9(1), $DI \cong Ae_i$ pour un certain $1 \leq i \leq n$. D'où $I \cong D(Ae_i)$.

(2) On suppose que $S_i = e_iA/e_iJ(A)$, $i = 1, \ldots, n$. Posons $T_i = Ae_i/J(A)e_i$, le A-module à gauche simple associé à e_i, et alors $S_i = DT_i$, d'après le théorème 8.5.5(3) pour tout $1 \leq i \leq n$. Or on a une suite exacte courte $0 \to J(A)e_i \to Ae_i \to T_i \to 0$ dans A-mod. Ceci donne une suite exacte courte $0 \to S_i \to D(Ae_i) \to D(J(A)e_i) \to 0$ dans mod-A. Donc $S_i \subseteq \mathrm{soc}D(Ae_i)$. Comme $D(Ae_i)$ est injectif indécomposable de type fini, $\mathrm{soc}D(Ae_i)$ est simple, d'après le corollaire 8.4.5(2). D'où, $S_i = \mathrm{soc}D(Ae_i)$. Donc $D(Ae_i)$ est l'enveloppe injective de S_i. Ceci achève la démonstration.

Le résultat suivant nous dit comment trouver l'enveloppe injective d'un A-module de type fini.

8.5.8. Corollaire. Soit $M \in$ mod-A tel que $\mathrm{soc}M = S_1 \oplus \cdots \oplus S_r$ avec $S_1, \ldots, S_r$ des modules simples associés aux idempotents primitifs $e_1, \ldots, e_r$, respectivement. Alors $D(Ae_1) \oplus \cdots \oplus D(Ae_r)$ est l'enveloppe injective de M.

Démonstration. Comme $S_i \cong \mathrm{soc}D(Ae_i)$, $\mathrm{soc}M \cong \mathrm{soc}(D(Ae_1) \oplus \cdots \oplus D(Ae_r))$. D'après le corollaire 8.4.3, $D(Ae_1) \oplus \cdots \oplus D(Ae_r)$ est l'enveloppe injective de M. Ceci achève la démonstration.

8.5.9. Corollaire. La co-résolution minimale injective d'un A-module de type fini contient seulement des A-modules de type fini.