MAT 199: Algèbre linéaire appliquée en informatique

Chapitre I: Algèbre matricielle

Le but principal de ce chapitre est d'étudier les opérations et les propriétés de matrices. Applications des matrices se trouvent dans la plupart des domaines scientifiques et du génie. En informatique et en infographie, elles sont utilisées pour classer l'importance des pages web, pour représenter des couleurs et pour projeter une image en 3 dimensions sur un écran en 2 dimensions.

Partout dans ce cours, on désigne par $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers, par $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels et par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

1.1. Polynômes

On commence par un petit rappel sur les polynômes réels.

1.1.1. Définition. Un polynôme réel de degré n est une expression formelle

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

où x s'appelle *variable*, et $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ s'appellent *coefficients*.

(1) Si $a_n \neq 0$, alors n s'appelle *degré*; et a_n, *coefficient directeur*, de $f(x)$.

(2) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(a) = a_n a^n + \cdots + a_1 a + a_0 \in \mathbb{R}.$$

Si $f(a) = 0$, alors a s'appelle *racine* de $f(x)$.

Exemple. Si $f(x) = 3x^2 + 6$, alors $f(x)$ n'a aucune racine réelle. En effet, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $f(a) = 3a^2 + 6 \geq 6$.

1.1.2. Proposition. Soit $f(x)$ un polynôme réel de degré n. Alors $a \in \mathbb{R}$ est une racine de $f(x)$ si, et seulement si, $f(x) = (x - a)g(x)$, où $g(x)$ est un polynôme réel de degré $n - 1$. Par conséquent,

(1) $f(x)$ admet au plus n racines réelles; et

(2) $f(x)$ admet n racines réelles $a_1, \ldots, a_n$ (incluant les multiplicités) si, et seulement si,

$$f(\lambda) = c(\lambda - a_1) \cdots (\lambda - a_n),$$

où c est le coefficient directeur de $f(x)$. Dans ce cas, $f(x)$ est dit *totalement factorisable* sur $\mathbb{R}$.

Exemple. Si $f(x) = 5(x-2)^2(x-3)$, alors $f(x)$ est totalement factorisable sur $\mathbb{R}$ et a pour racines $2, 2, 3$.

Il n'y a pas de règle pour trouver les racines d'un polynôme réel général. Néanmoins, on a le résultat suivant pour les polynômes de degré deux.

1.1.3. Proposition. Soit un polynôme réel de degré deux:

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Alors $f(x)$ admet une racine réelle si, et seulement si, le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$; et dans ce cas, $f(x)$ admet deux racines réelles suivantes:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Exemple. Soit $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$. Comme $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = -8$, d'après la proposition 6.1.3, $f(x)$ n'a aucune racine réelle. Par conséquent, $f(x)$ n'est pas factorisable sur $\mathbb{R}$.

Le résultat suivant est très pratique pour trouver des racines d'un polynôme entier.

1.1.4. Proposition. Soit un polynôme à coefficients entiers

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Si $q \in \mathbb{Q}$ est une racine de $f(x)$, alors $q \in \mathbb{Z}$ est un diviseur de a_0.

Exercice. Factoriser $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$.

Solution. D'abord, les diviseurs de 6 sont ± 1, ± 2, ± 3, ± 6. Par essai-erreur, on trouve $f(-1) = 0$. En divisant $f(x)$ par $x - (-1) = \lambda + 1$, on trouve $f(x) = (x+1)(x^2 - 5x + 6)$.

Considérons $g(x) = x^2 - 5x + 6$. Comme $\Delta = 25 - 24 = 1$. D'après la proposition 6.1.3, $g(x)$ a deux racines

$$x_1 = \frac{-(-5) + 1}{2} = 3; \qquad x_2 = \frac{-(-5) - 1}{2} = 2.$$

D'où, $x^2 - 5x - 6 = (x-2)(x-3)$. Par conséquent, $f(x) = (x+1)(x-2)(x-3)$.

1.2. Matrices

Le but de cette section est d'introduire les opérations arithmétiques sur les matrices et d'étudier leurs propriétés. En tant qu'application, on parlera de coordonnées RVB des couleurs numériques.

1.2.1. Définition. Une *matrice réelle* de type $m \times n$ est un tableau rectangulaire de mn nombres réels rangés sur m lignes et n colonnes comme suit:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ \\ L_m \end{array} \end{array}$$

Le nombre a_{ij} s'appelle (i,j)*-terme* où i est l'*indice de ligne* et j est l'*indice de colonne.*

Deux matrices sont dites *égales* si elles sont du même type et les termes en même position sont égaux.

La matrice est dite *nulle*, notée $0_{m\times n}$, si $a_{ij} = 0$ pour tous $1 \le i \le m$ et $1 \le j \le n$.

La matrice s'appelle une *matrice-ligne* si $m = 1$; et une *matrice-colonne* si $n = 1$.

La matrice est dite *carrée d'ordre* n si $m = n$; et dans ce cas, $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ sont appelés les *termes diagonaux.*

Une matrice carrée (a) d'ordre 1 sera identifiée avec le nombre a.

Notation. On désignera par $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles de type $m \times n$; et par $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n.

Exemple. Considérons les matrices réelles suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Alors

(1) $A = 0_{2\times 3}$, la matrice nulle de type 2×3;

(2) B est une matrice carrée d'ordre 2, dont les termes diagonaux sont $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$.

En tant qu'application de matrices, on parlera de la couleur numérique.

1.2.2. Définition. Une couleur numérique C est obtenue en mélangeant le rouge, le vert et le bleu d'intensités $r, v, b \in [0,1]$, respectivement. On appelle $\{r; v; b\}$ *coordonnées RVB* de C et on identifie C à la matrice-colonne réelle

$$\begin{pmatrix} r \\ v \\ b \end{pmatrix}.$$

À titre d'exemple, on a le tableau suivant:

rouge	vert	bleu	blanc	noir	cyan	magenta	jaune	gris	pourpre
1	0	0	1	0	0	1	1	$\frac{1}{3}$	$0,6$
0	1	0	1	0	1	0	1	$\frac{1}{3}$	0
0	0	1	1	0	1	1	0	$\frac{1}{3}$	1

Exemple. La couleur numérique

$$\begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,3 \\ 0,1 \end{pmatrix}$$

est obtenue par mélanger 20% du rouge, 30% du vert et 10% du bleu.

On introduira des opérations arithmétiques sur des matrices.

1.2.3. Définition. Soient $A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. On définit
(1) $a \cdot A = (aa_{ij})_{m\times n} = A \cdot a$, pour tout $a \in \mathbb{R}$;
(2) $-A = (-a_{ij})_{m\times n}$, appelé *opposé* de A.
(3) $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$;
(4) $A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{m\times n}$.

Remarque. Si A et B ne sont pas du même type, alors ni $A + B$ ni $A - B$ n'est définie.

Les opéatrations matricielles définies dans la définition 1.1.3 satisfont aux axiomes énoncés dans le résultat suivant.

1.2.4. Proposition. Soient $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

(1) $1 \cdot A = A$;	(2) $(ab)A = a(bA)$;
(3) $(a \pm b)A = aA \pm bA$;	(4) $a(A \pm B) = aA \pm aB$;
(5) $A + 0_{m\times n} = A$;	(6) $A - A = 0_{m\times n}$;
(7) $A + B = B + A$;	(8) $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Remarque. (1) Pour $A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, grâce à l'associativité, on peut définir

$$A + B + C = (A + B) + C.$$

(2) En générale, pour $A_1, \cdots, A_r \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ avec $r > 2$, on définit

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_r = (\cdots(A_1 + A_2) + \cdots + A_{r-1}) + A_r.$$

On introduira la multiplication de matrices dans la définition suivante.

1.2.5. Multiplication. (1) Le produit d'une matrice de type $1 \times n$ et une matrice de type $n \times 1$ est une matrice de type 1×1 définie par

$$(a_1 \ \cdots \ a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum\nolimits_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

(2) Si $A = (a_{ik}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{kj}) \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, alors le *produit* de A et B est défini comme étant $AB = (c_{ij})_{m\times p}$, où

$$c_{ij} = (a_{i1} \ \cdots \ a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{jn} \end{pmatrix} = \sum\nolimits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \quad i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, p.$$

Remarque. (1) Si $A = 0_{m\times n}$ ou $B = 0_{n\times p}$, alors $AB = 0_{m\times p}$.
(2) Si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, alors $AB \in M_n(\mathbb{R})$.

Exemple. Dans le calcul de la note finale du MAT193, les pondérations des devoirs, de l'examen intra et de l'examen final sont 15%, 35% et 50%, respectivement. Si les notes des devoirs, de l'examen intra et de l'examen final d'un étudiant sont 80, 56 et 75 respectivement, alors sa note finale est donnée par

$$80 \times 0,15 + 56 \times 0,35 + 75 \times 0,5 = (80,\ 56,\ 75) \begin{pmatrix} 0,15 \\ 0,35 \\ 0,50 \end{pmatrix}.$$

Exercice. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \sqrt{2} \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Donner le (1,2)-terme et le (3,1)-terme du produit AB.

Solution. D'après la définition, le (1,2)-terme du produit AB est le produit de la première ligne de A et la deuxième colonne de B, c'est-à-dire,

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = 2 \times 2 + 3 \times 3 + \sqrt{2}\sqrt{2} = 15.$$

En outre, le (3,1)-terme de AB est

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2.$$

1.2.6. Définition. Pour tout entier $n \geq 1$, la matrice carrée

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

s'appelle *matrice-identité* d'ordre n.

Exemple.

$$I_1 = (1); \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2.7. Proposition. Soient A, B, C des matrices réelles et a, b des nombres réels.
(1) Si AB et BC est défnis, alors $(AB)C = A(BC)$.
(2) Si AB est défini, alors $(aA)(bB) = (ab)(AB)$.
(3) Si AB, AC sont définis et du même type, alors $A(B + C) = AB + AC$.
(4) Si AC, BC sont définis et du même type, alors $(A + B)C = AC + BC$.
(5) Si A est de type $m \times n$, alors $I_m A = A = AI_n$.

Remarque. (1) Si AB et BC sont définis, grâce à l'associativité, on peut définir

$$ABC := (AB)C.$$

(2) En générale, si $A_1, \cdots, A_r$ avec $r > 2$ sont des matrices réelles telles que $A_i A_{i+1}$ est défini, pour $i = 1, \ldots, r - 1$, alors on définit

$$A_1 A_2 \cdots A_r = (\cdots (A_1 A_2) \cdots A_{r-1}) A_r.$$

(3) La multiplication n'est pas commutative. Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) Le produit AB peut être nul sans que A ou B est nulle. Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple. D'après la proposition 1.2.7(2), on a

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{3} - 1 & -\sqrt{3} - 1 \\ \sqrt{3} + 1 & \sqrt{3} - 1 \end{pmatrix}.$$

On va donner deux résultats qui facilitent le calcul du produit de deux matrices. On commence par le cas où le facteur à droite est une matrice-colonne.

1.2.8. Proposition. Soit A une matrice réelle dont les colonnes sont $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Si $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, alors

$$A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (A_1\, A_2\, \cdots\, A_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1A_1 + a_2A_2 + \cdots + a_nA_n.$$

Exemple. Soit une couleur constituée de 30% du magenta, 20% du blanc, 15% du jaune et 35% du pourpre. La matrice-colonne de ses coordonnées RVB est donnée par

$$0,3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0,2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0,15 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0,35 \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0,6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,2 \\ 0,15 \\ 0,35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,86 \\ 0,35 \\ 0,85 \end{pmatrix}.$$

Exercice. Calculer les produits suivants:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad (2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Solution. D'après la proposition 1.2.8,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le résultat suivant nous dit que le calcul d'un produit de deux matrices générales se ramème au produit traité dans la proposition précédente.

1.2.9. Proposition. Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Si $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont $B_1, B_2, \ldots, B_p$, alors

$$AB = A(B_1\, B_2\, \cdots\, B_p) = (AB_1\, AB_2\, \cdots\, AB_p),$$

c'est-à-dire, la j-ième colonne de AB est le produit de A et la j-ième colonne de B.

Exercice. Calculer AB, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution. D'après la proposition 1.2.9, on a

$$AB = \left(A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.2.10. Définition. Soit $A = (a_{ij})_{n\times n}$ une matrice carrée réelle. On dit que A est *diagonale* si $a_{ij} = 0$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$ avec $i \neq j$.

Exemple. (1) Toute matrice identité I_n est diagonale.
(2) Les matrices suivantes sont diagonales

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En appliquant les propositions 1.2.8 et 1.2.9, on obtient le résultat suivant.

1.2.11. Proposition. Soit $A = (A_1\, A_1\, \cdots\, A_n) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ partagée en colonnes. Si $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, alors

$$A \cdot \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} = (a_1A_1, a_2A_2, \cdots, a_nA_n).$$

Exercice. Calculer le produit

$$\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & 1 \\ 3 & \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Solution. D'après la proposition 1.2.11, on a

$$\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & 1 \\ 3 & \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 & 3\cdot\sqrt{2} & 4\cdot 1 \\ 2\cdot 3 & 3\cdot\sqrt{3} & 4\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3\sqrt{2} & 4 \\ 6 & 3\sqrt{3} & 8 \end{pmatrix}.$$

1.2.12. Définition. Soit $A = (a_{ij})_{m\times n}$. On définit la *transposée* de A par

$$A^T = (a'_{ij})_{n\times m}, \text{ où } a'_{ij} = a_{ji}, i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m.$$

Remarque. (1) La i-ième ligne de A^T est la transposée de la i-ième colonne de A.
(2) La j-ième colonne de A^T est la transposée de la j-ième ligne de A.

Exercice. À l'aide de la remarque ci-haut, trouver les transposées des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Solution. En transposant les lignes de A, on obtient

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, en transposant les colonnes de B, on obtient

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

1.2.13. Proposition. Soient A, B des matrices réelles et $a \in \mathbb{R}$.
(1) $(A^T)^T = A$.
(2) $(aA)^T = aA^T$.
(3) Si A, B sont de même type, alors $(A + B)^T = A^T + B^T$.
(4) Si AB est défini, alors $(AB)^T = B^T A^T$.

Exemple. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De l'autre côté,

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Maintenant,

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (AB)^T.$$

Remarquons que

$$A^T B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où, $(AB)^T \neq A^T B^T$.

1.2.14. Définition. Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{n\times n}$ est dite *symétrique* si $A^T = A$, c'est-à-dire, $a_{ji} = a_{ij}$, pour tous $1 \le i, j \le n$.

Remarque. Une matrice diagonale est symétrique.

Exercice. Laquelle de A, B est symétrique?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Solution. On calcule

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} = A; \qquad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \neq B.$$

D'où, A est symétrique, mais B ne l'est pas.

1.3. Rang

Le but de cette section est d'introduire la notion du rang d'une matrice. On commence par les matrices échelonnées et les opérations élémentaires sur les lignes de matrices.

1.3.1. Définition. Soit $A = (a_{ij})_{m\times n}$ une matrice de lignes $L_1, \ldots, L_m$. On dit que A est *échelonnée* si, pour tout $i = 2, \ldots, m$, la condition suivante est vérifiée:

Si L_i est non nulle dont le premier terme non nul est dans la colonne j_i, alors L_{i-1} est non nulle dont le premier terme non nul est dans la colonne j_{i-1} avec $j_{i-1} < j_i$.

Dans ce cas, le premier terme non nul d'une ligne non nulle s'appelle *pivot* de cette ligne.

Remarque. Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ de lignes $L_1, \ldots, L_m$.
(1) Une ligne nulle n'a aucun pivot.
(2) Si L_r est la dernière ligne non nulle, alors $L_1, \ldots, L_{r-1}, L_r$ sont toutes non nulles.

(3) Si j_i est l'indice de colonne contenant le pivot de L_i, alors $j_1 < \cdots < j_{r-r} < j_r$.

(4) Chaque ligne, ainsi que chaque colonne, contient au plus un pivot. Par conséquent, le nombre de pivots de A est plus petit ou égal à $\min\{m, n\}$.

Exemple. (1) Toute matrice-ligne est échelonnée.
(2) Toute matrice nulle est échelonnée sans pivot.
(3) La matrice-identité d'ordre n est échelonnée de n pivots.
(4) Les matrices suivantes sont échelonnées dont les pivots sont encadrés.

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 3 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -9 \\ 0 & 0 & \boxed{7} & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxed{3} & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{9} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \boxed{3} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(5) Les matrices suivantes ne sont pas échelonnées:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.3.2. Définition. Les opérations sur les lignes d'une matrice sont dites *élémentaires*:

Type 1: Échanger deux lignes, notée $L_i \leftrightarrow L_j$, où $i \neq j$.
Type 2: Additionner à une ligne un multiple d'une autre ligne, notée $L_i + aL_j$, où $i \neq j$ et $a \in \mathbb{R}$.
Type 3: Multiplier une ligne par un nombre non nul, notée aL_i, où $a \neq 0$.

En outre, on dit qu'une matrice A *se réduit à* une autre matrice B si cette dernière est obtenue à partir de A par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.

Exemple.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 - 4L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{3L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 12 & 15 & 18 & 21 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

1.3.3. Lemme. Toute opération élémentaire T sur les lignes d'une matrice est inversible. Plus précisément,

(1) Si T est $L_i \leftrightarrow L_j$, alors T^{-1} est $L_i \leftrightarrow L_j$.
(2) Si T est $L_i + aL_j$ avec $i \neq j$, alors T^{-1} est $L_i - aL_j$.
(3) Si T est aL_i avec $a \neq 0$, alors T^{-1} est $a^{-1}L_i$.

Exemple.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 - 4L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 + 4L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{3L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 12 & 15 & 18 & 21 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

1.3.4. Corollaire. Soient $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Si A se réduit à B, alors
(1) B se réduit à A;
(2) $A = 0_{m\times n}$ si, et seulement si, $B = 0_{m\times n}$.

On a maintenant le résultat fondamental suivant.

1.3.5. Théorème. Si A est une matrice réelle, alors
(1) A se réduit à une matrice échelonnée, ce qui s'appelle *forme échelonnée* de A;
(2) les forme échelonnées de A ont le même nombre de pivots; ce nombre commun s'appelle *rang* de A, noté $\text{rg}(A)$.

Remarque. Une matrice échelonnée est une forme échelonnée d'elle-même, dont le rang est le nombre de pivots.

Exemple. $\text{rg}(0_{m\times n}) = 0$ et $\text{rg}(I_n) = n$.

Exercice. Trouver le rang de la matrice suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Solution. On effectue des réductions suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}L_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3-L_1]{L_2-L_1} \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où, $\mathrm{rg}(A) = 2$.

Le résultat suivant rassemble des propriétés élémentaires du rang d'une matrice.

1.3.6. Lemme. Soit A une matrice réelle de type $m \times n$.
(1) $\mathrm{rg}(A) \le \min\{m, n\}$.
(2) Si A se réduit à B, alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.
(3) $\mathrm{rg}(A) = 0$ si, et seulement si, $A = 0_{m\times n}$.
(4) $\mathrm{rg}(A^T) = \mathrm{rg}(A)$.

Exemple.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\mathrm{rg}(A) = 3$.

1.4. Matrices inversibles

On sait que tout nombre réel non nul a admet un inverse a^{-1} tel que

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1.$$

D'une façon analogue, on définira la notion d'inverse de matrices carrées.

1.4.1. Définition. Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite *inversible* s'il existe une matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que

$$AB = I_n \text{ et } BA = I_n.$$

Dans ce cas, B s'appelle l'*inverse* de A, et notée $B = A^{-1}$.

Exemple. Une matrice identité I_n est inversible avec $I_n^{-1} = I_n$.

Exercice. (1) Vérifier que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Vérifier que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est non inversible.

Solution. (1) On voit que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On rassemble des propriétés de matrices inversibles dans le résultat suivant.

1.4.2. Proposition. Soient A, B, C des matrices réelles.
(1) Si A est inversible, alors A^{-1} et A^T sont inversibles avec

$$(A^{-1})^{-1} = A \text{ et } (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

(2) Si $AB = C$ avec A inversible, alors $B = A^{-1}C$.
(3) Si $BA = C$ avec A inversible, alors $B = CA^{-1}$.
(4) Si A, B sont inversibles de même ordre, alors AB est inversible avec

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Exemple. (1) On a vu que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après la proposition 1.4.2(1), on trouve

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{T}\right)^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\right)^{T} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) On vérifie facilement que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Maintenant

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

D'après la proposition 1.4.2(4),

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le résultat suivant est un critère pour une matrice carrée soit inversible.

1.4.3. Théorème. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, alors A est inversible si, et seulement si, $\operatorname{rg}(A) = n$.

Exercice. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ b & c & 3 \end{pmatrix}.$$

Laquelle de A, B est inversible ?

Solution. D'abord, on a

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3-L_1]{L_2-L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où, $\operatorname{rg}(A) = 2$. D'après le théorème 1.4.3, A n'est pas inversible. Ensuite, on a

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Comme $\operatorname{rg}(B^T) = 3$, d'après le théorème 1.4.3, B^T est inversible, et d'après la proposition 1.4.2(1), B l'est aussi.

Exercice. Donner les valeurs réelles de a pour que la matrice suivante soit inversible:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Solution. On effectue des opérations élémentaires comme suit:

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & a-1 & -1 \\ 0 & 1-a & -a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & a-1 & -1 \\ 0 & 0 & -a-1 \end{pmatrix} =: B.$$

(1) Si $a \neq \pm 1$, alors B est échelonnée de 3 pivots. Ainsi, $\mathrm{rg}(A) = 3$.

(2) Si $a = -1$, alors

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\mathrm{rg}(A) = 2$.

(3) Si $a = 1$, alors

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 - 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $\mathrm{rg}(B) = 2$. D'après le lemme 1.3.6(2), $\mathrm{rg}(A) = 2$.
En conclusion, on a

$$\mathrm{rg}(A) = \begin{cases} 2, & \text{si } a = \pm 1; \\ 3, & \text{si } a \neq \pm 1. \end{cases}$$

Par conséquent, A est inversible si, et seulement si, $a \in \mathbb{R} \backslash \{1. -1\}$.

On étudiera comment inverser une matrice inversible. Pour ce faire, on introduira les notions suivantes.

1.4.4. Définition. Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{n \times n}$ est dite
(1) *triangulaire supérieure* si $a_{ij} = 0$, pour tous $1 \leq j < i \leq n$;
(2) *triangulaire inférieure* si $a_{ij} = 0$, pour tous $1 \leq i < j \leq n$;
(3) *triangulaire* si A est triangulaire supérieure ou inférieure.

Remarque. (1) Toute matrice carrée échelonnée est triangulaire supérieure.
(2) Une matrice est diagonale si, et seulement si, elle est triangulaire supérieure et triangulaire inférieure.

Exemple. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On voit que A est triangulaire inférieure et B est triangulaire supérieure.

1.4.5. Proposition. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversible. Si A' est une forme échelonnée de A, alors

(1) A' est triangulaire supérieure dont les termes diagonaux sont tous non nuls;

(2) on peut échelonner A' à I_n en éliminant les termes au-dessus des pivots à partir du dernier pivot.

Exercice. Réduire la matrice échelonnée suivante à I_3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solution.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3-2L_1]{L_2-L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1-2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le résultat suivant nous dit comment trouver l'inverse d'une matrice inversible.

1.4.6. Théorème. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$.

(1) Si $(A \mid B)$ s'échelonne à $(I_n \mid C)$, alors A est inversible et $C = A^{-1}B$.

(2) Si $(A \mid I_n)$ s'échelonne à $(I_n \mid C)$, alors A est inversible et $C = A^{-1}$.

Exercice. En sachant que A est inversible, calculer $A^{-1}B$ et A^{-1}, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution. On doit échelonner A, $(A \mid B)$ et $(A \mid I_2)$. Pour ce faire, on peut échelonner une matrice $(A \mid B \mid I_2)$ comme suit:

$$(A \mid B \mid I_2) = \left(\begin{array}{cc|ccc|cc} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2-3L_1} \left(\begin{array}{cc|ccc|cc} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -7 & -12 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}L_2} \left(\begin{array}{cc|ccc|cc} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & 6 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{L_1-2L_2} \left(\begin{array}{cc|ccc|cc} 1 & 0 & -3 & -4 & -8 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & 6 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Alors $(A \mid B)$ et $(A \mid I_2)$ s'échelonnent respectivement aux matrices suivantes:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & -3 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & 6 \end{array}\right) \text{ et } \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right).$$

D'où,

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -8 \\ \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & 6 \end{pmatrix}, \; A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Maintenant, on considère les puissances d'une matrice carrée.

1.4.7. Définition. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Pour tout $r > 0$, on définit

$$A^r = \overbrace{AA \cdots A}^{r \text{ fois}}.$$

En outre, si A est non nul, on pose $A^0 = I_n$; et si A est inversible, on définit alors

$$A^{-r} = (A^{-1})^r, \text{ pour tout } r > 0.$$

Remarque. (1) Pour tous $r, s > 0$, on a $A^r A^s = A^{r+s}$ et $(A^r)^s = A^{rs}$.
(2) Si A est inversible, alors $A^r A^s = A^{r+s}$ et $(A^r)^s = A^{rs}$, pour tous $r, s \in \mathbb{Z}$.

Exercice. Vérifier que A est inversible et calculer A^{-3}, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Solution. On doit échelonner A et $(A \mid I_2)$. Pour ce faire, il suffira d'échelonner $(A \mid I_2)$. D'abord, $(A \mid I_2)$ s'échelonne à la matrice suivante:

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) =: (C \mid D).$$

D'où, A s'échelonne à la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $\mathrm{rg}(A) = 2$, et donc, A est inversible. Ensuite, comme $(C \mid D)$ s'échelonne à la matrice suivante

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right),$$

d'après le théorème 1.4.6(2), on a

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

Ainsi

$$A^{-2} = (A^{-1})^2 = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 31 & -12 \\ -18 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-3} = A^{-2}A^{-1} = \begin{pmatrix} 31 & -12 \\ -18 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -191 & 74 \\ 111 & -43 \end{pmatrix}.$$

On conclut cette section par la décomposition LU de matrice, qui sera utile pour la résolution de systèmes d'équations linéaires et le calcul du déterminant d'une matrice carrée.

1.4.8. Définition. Une opération élémentaire T sur les lignes d'une matrice s'appelle *opération triangulaire inférieure* si

(1) T est de type $L_i + aL_j$ avec $i > j$, ou

(2) T est de type aL_i avec $a \neq 0$.

Voici des propriétés d'opérations triangulaires inférieures.

1.4.9. Lemme. (1) L'inverse d'une opération triangulaire inférieure est triangulaire inférieure.

(2) Les opérations triangulaires inférieures préservent les matrices triangulaires inférieures.

Exemple.

(1) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2+3L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{5L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 15 & 5 \end{pmatrix}.$$

(2) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1\leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1+3L_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On effectue des opérations élémentaires à I_2, une matrice triangulaire inférieure. Dans la partie (1), les deux opérations sont triangulaires inférieures, et donc, la matrice rśultante est encore triangulaire inférieure. Mais dans la partie (2), les deux opérations ne sont pas triangulaires inférieures, et les matrices résultantes ne sont plus triangulaires inférieures.

1.4.10. Théorème. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ admettant une réduction

$$A \xrightarrow{T_1} A_1 \xrightarrow{T_2} A_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_{r-1} \xrightarrow{T_r} U,$$

où U est échelonnée et les T_i sont des opérations triangulaires inférieures. Si l'on effectue les opérations T_i^{-1} à partir de I_n comme suit:

$$I_n \xrightarrow{T_r^{-1}} L_1 \xrightarrow{T_{r-1}^{-1}} L_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_{r-1} \xrightarrow{T_1^{-1}} L,$$

alors L est triangulaire inférieure et U est triangulaire supérieure telle que

$$A = LU,$$

appelée *décomposition* LU de A.

Remarque. Ce n'est pas vrai que toute matrice admet une décomposition LU.

Exercice. Donner une décomposition LU de la matrice suivante:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solution. On échelonne A par des opérations triangulaires inférieures comme suit:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2-3L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3-L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

À partir de I_3, on inverse les opérations ci-dessus comme suit:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3+L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2+3L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2L_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on a une décomposition LU pour A comme suit:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.5. Exercices

1. Factoriser les polynômes suivants si possible.
   (1) x^2+2x+2; (2) x^3+x^2-2; (3) x^6-3x^3+2;
   (4) $x^4-9x^2-4x+12$; (5) x^3-x^2-x-2.

2. (**MATLAB**) Trouver les racines de $8x^4-30x^3+35x^2-15x+2$.

3. Calculer le produit suivant:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{15}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{15}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{15}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{10}} & -\frac{2}{\sqrt{15}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{10}} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{15}} \end{pmatrix}.$$

4. Donner, à l'aide de les propositions 1.2.8 et 1.2.9, la troisième colonne du produit AB, où

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & 0 & 7 \\ 0 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & -1 & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

5. Calculer, à l'aide des propositions 1.2.8 et 1.2.9, les produits suivants.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} & 4 & 6 & 3 \\ 3 & 7 & 0 & \sqrt{11} & 3 & 1 \\ 0 & 4 & \sqrt{5} & 5 & 0 & 3 \\ \sqrt{7} & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{7} & 4 & 6 & 3 \\ 3 & 7 & \sqrt{11} & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{5} & 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Calculer, à l'aide de la proposition 1.2.11, le produit suivant:

$$\begin{pmatrix} 7 & 8 & 0 & 9 & 2 \\ 2 & 9 & 3 & 8 & 0 \\ 5 & 4 & 8 & 7 & 9 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

7. Calculer, à l'aide des propositions 1.2.7(2) et 1.2.11, le produit suivant:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{5}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

8. Considérer deux matrices symétriques suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Trouver la condition pour que AB soit symétrique.

9. Calculer A^TA et AA^T, où
$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

10. Considérer la matrice suivante:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$
Vérifier que A^TA et AA^T sont symétriques.

11. Montrer, pour toute matrice A, que AA^T et A^TA sont symétriques.

12. Dans chacun des cas suivants, trouver le rang de chacun des matrices suivantes:
$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 & -5 \\ 3 & -1 & 2 & -7 \end{pmatrix}; \qquad (2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ -5 & -3 & -6 & -7 \\ -2 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

13. Trouver, si possible, l'inverse de chacune des matrices suivantes.
$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 & -5 \\ 3 & -1 & 2 & -7 \\ 7 & 3 & 10 & -15 \end{pmatrix}; \qquad (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

14. En sachant que A est inversible, trouver $A^{-1}B$, où
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

15. Dans chacun des cas suivants, calculer A^{-3}.
$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

16. Trouver une décomposition LU de chacune des matrices suivantes:
$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 3 & -6 & -7 \end{pmatrix}.$$

Chapitre II: Déterminants

À chaque matrice carrée réelle, on associe un nombre réel, appelé son *déterminant*. Ceci sera appliqué pour déterminer si une matrice carrée est inversible ou non, et pour calculer les valeurs propres d'une matrice carrée. En géométrie, on utilise le déterminant pour calculer l'aire d'un parallélogramme et le volume d'un parallélépipède.

2.1. Définition. Soit $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{R})$. Le *déterminant* de A est un nombre réel, noté $\det(A)$ ou $|A|$, qui est défini par récurrence comme suit.

Si $n = 1$, on définit alors $\det(a_{11}) = a_{11}$.

Supposons que $n > 1$ et le déterminant de toute matrice carrée d'ordre $n - 1$ est défini.

Pour tous $1 \le i, j \le n$, désignons par M_{ij} la sousmatrice carrée de A d'ordre $n - 1$ obtenue en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne. Par l'hypothèse de récurrence, $m_{ij} = \det(M_{ij})$ est défini, appelé *mineur* de A d'indices i, j. On définit alors

(1) $\det(A) = a_{i1}(-1)^{i+1}m_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}m_{i2} + \cdots + a_{in}(-1)^{i+n}m_{in}$, où $1 \le i \le n$, appelé *développement suivant la i-ième ligne*; ou

(2) $\det(A) = a_{1j}(-1)^{1+j}m_{1j} + a_{2j}(-1)^{2+j}m_{2j} + \cdots + a_{nj}(-1)^{n+j}m_{nj}$, où $1 \le j \le n$, appelé *développement suivant la j-ième colonne.*

Remarque. Les nombres donnés dans (1) et (2) sont égaux pour tous $1 \le i, j \le n$.

Le calcul du déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2 est evident.

2.2. Proposition.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Exercice. Calculer

$$\begin{vmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ -3 & 2+\sqrt{2} \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Solution. (1) D'après la proposition 2.2, on a

$$\begin{vmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ -3 & 2+\sqrt{2} \end{vmatrix} = 2(2+\sqrt{2}) - (-3)\sqrt{2} = 4 + 5\sqrt{2}.$$

(2) On développe ce déterminant selon la deuxième colonne.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-3)(1-9) - 2(6-4) = 20.$$

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la définition.

2.3. Proposition. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ de lignes $L_1, \ldots, L_n$ et de colonnes $C_1, \ldots, C_n$.
(1) Si $C_j = aC'$ avec $a \in \mathbb{R}$ et C' une matrice-colonne, pour un certain $1 \le j \le n$, alors

$$\det(A) = a \cdot \det(C_1, \ldots, C_{j-1}, C', C_{j+1}, \ldots, C_n).$$

(2) Si $L_i = aL'$ avec $a \in \mathbb{R}$ et L' une matrice-ligne, pour un certain $1 \le i \le n$, alors

$$\det(A) = a \cdot \det \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L' \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}.$$

(3) En particulier, si A a une ligne nulle ou une colonne nulle, alors $\det(A) = 0$.

Exemple.

$$2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2\cdot 2 \\ 5 & 2\cdot 7 \end{vmatrix}; \qquad 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} \ne \begin{vmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 5 & 2\cdot 7 \end{vmatrix}.$$

Exercice. Calculer

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{vmatrix}$$

Solution. D'après la proposition 2.3(1), on a

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{4}{\sqrt{30}}.$$

On étudiera comment calculer le déterminant d'une matrice carrée de grande taille. Le premier résultat est de réduire la taille de matrices de certaines formes spéciales.

2.4. Proposition. Si A et B sont des matrices carrées, alors

$$\det\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A)\cdot\det(B) = \det\begin{pmatrix} A & 0 \\ D & B \end{pmatrix}.$$

Exercice. Calculer les déterminants suivants:

$$\begin{vmatrix} 3 & \sqrt{5} & 4 & \sqrt{2} & a \\ \sqrt{5} & 2 & \sqrt{3} & a & b \\ 0 & 0 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & \sqrt{5} & 0 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} 4 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 7 & \sqrt{11} \\ 7 & 2 & \sqrt{11} & 1 \end{vmatrix}.$$

Solution. D'après la proposition 2.4, on a

$$\begin{vmatrix} 3 & \sqrt{5} & 4 & \sqrt{2} & a \\ \sqrt{5} & 2 & \sqrt{3} & a & b \\ 0 & 0 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & \sqrt{5} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 & 5 \\ \sqrt{5} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & \sqrt{5} & 0 \end{vmatrix} = (6-5)5(5-3) = 10.$$

En outre, on a

$$\begin{vmatrix} 4 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 7 & \sqrt{11} \\ 7 & 2 & \sqrt{11} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 7 & \sqrt{11} \\ \sqrt{11} & 1 \end{vmatrix} = (8-3)\cdot(7-11) = -20.$$

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la proposition 2.4.

2.5. Proposition. Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses termes diagonaux.

Exemple. (1) $\det(I_n) = 1$.

(2)

$$\begin{vmatrix} \sqrt{3} & 0 & 34 & 95 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \sqrt{3}\sqrt{5}(-3)(-1) = 3\sqrt{15}.$$

En sachant que toute matrice carrée se réduit à une matrice échelonnée, ce qui est nécessairement triangulaire supérieure, le résultat suivant nous permet de calculer le déterminant d'une matrice carrée générale.

2.6. Théorème. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

(1) Si B est obtenue en échangeant deux lignes (respectivement, deux colonnes) de A, alors $\det(A) = -\det(B)$.

(2) Si B est obtenue en additionnant un multiple d'une ligne (respectivement, colonne) de A à une autre ligne (respectivement, colonne), alors $\det(A) = \det(B)$.

(3) Si B est obtenue en multipliant une ligne (respectivement, colonne) de A par un nombre non nul $a \in \mathbb{R}$, alors $\det(A) = a^{-1} \cdot \det(B)$.

Démonstration. (3) Posons $A = (A_1 \cdots A_n)$ en colonnes. Supposons que

$$B = (A_1 \cdots A_{i-1}\, a_i A_i\, A_{i+1} \cdots A_n),$$

où $\neq 0$. D'après la proposition 2.3, $\det(B) = a \cdot \det(A)$. Ceci donne $\det(A) = a^{-1} \cdot \det(B)$. La preuve du théorème s'achève.

Exercice. Calculer

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Solution. En vue du théorème 2.6, on effectue des opérations élémentaires comme suit:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} \overset{\substack{L_2+2L_1 \\ L_3+3L_1}}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & -7 & 10 \\ 0 & 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} \overset{\substack{L_3-L_2 \\ L_4-L_2}}{=}$$

$$- \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -(-5) \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \overset{L_4-L_3}{=} 5 \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 25.$$

Le résultat suivant rassemble des propriétés importants de détermiant de matrices.

2.7. Théorème. Si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, alors

(1) $\det(A) = \det(A^T)$;

(2) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$;

(3) $\det(A^r) = (\det(A))^r$, pour tout entier $r \geq 1$.

Remarque. En vue de la proposition 2.5 et du théorème 2.7(2), on peut appliquer la décomposition LU pour calculer le déterminant.

Exercice. À l'aide de la décomposition LU, calculer le déterminant suivant:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solution. On a trouvé une décomposition LU suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème 2.7(2), on a

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \times 0 = 0.$$

Le résultat suivant est très pratique pour déterminer si une matrice est inversible ou non.

2.8. Théorème. Une matrice carrée A est inversible si, et seulement si, $\det(A) \neq 0$. Et dans ce cas, $\det(A^r) = (\det(A))^r$, pour tout $r \in \mathbb{Z}$.

Exercice. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5-a & 1 \\ 2 & 5 & a+3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs réelles de a pour que A soit inversible.

Solution. Daprès le théorème 2.8, A est inversible $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$. Maintenant,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5-a & 1 \\ 2 & 5 & a+3 \end{vmatrix} \overset{\substack{L_2-L_1 \\ L_3-2L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3-a & -2 \\ 0 & 1 & a-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-a & -2 \\ 1 & a-3 \end{vmatrix}$$

$$= (3-a)(a-3) + 2 = \sqrt{2}^2 - (a-3)^2 = [(\sqrt{2}+3) - a][a - (3-\sqrt{2})].$$

Donc $\det(A) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2}+3) - a = 0$ ou $a - (3-\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow a = 3+\sqrt{2}$ ou $3-\sqrt{2}$. Par conséquent, A est inversible $\Leftrightarrow a \in \mathbb{R}\backslash\{3+\sqrt{2}, 3-\sqrt{2}\}$.

Exercice. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que A est inversible et calculer $\det(A^{-3})$.

Solution. On a vu que $\det(A) = 25$. D'après le théorème 2.8, A est inversible et

$$\det(A^{-3}) = (\det(A))^{-3} = 25^{-3} = \frac{1}{15625}.$$

2.9. Corollaire. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. S'il existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n$ ou $BA = I_n$, alors A est inversible et $A^{-1} = B$.

Exemple. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

D'après le corollaire 2.9, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.10. Exercices

1. Calculer les détermiants suivants.

$$(1) \begin{vmatrix} 3+\sqrt{2} & 5 & 0 \\ -6 & 0 & 1+\sqrt{3} \\ 0 & 4+\sqrt{2} & 5 \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \end{vmatrix}; \quad (3) \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 3 & 6 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Calculer, à l'aide de la proposition 2.3, le déterminant suivant:

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix}.$$

3. Trouver premièrement une décomposition LU de A, et en calculer $\det(A)$, où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 7 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Calculer, à l'aide de la proposition 2.4, le déterminant suivant:

$$\begin{vmatrix} \sqrt{7} & \sqrt{5} & 4 & \sqrt{2} & a \\ \sqrt{5} & \sqrt{7} & \sqrt{3} & a & b \\ 0 & 0 & \sqrt{11} & \sqrt{13} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & \sqrt{13} & \sqrt{11} & 0 \end{vmatrix}.$$

5. Dans chacun des cas suivants, calculer le déterminant de la matrice donnée et donner les valeurs réelles de a pour que la matrice soit inversible.

$$(1)\ \begin{pmatrix} a+1 & 3 & 4 \\ a & 2 & 2 \\ 4 & 3 & a \end{pmatrix}; \quad (2)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & a & a \\ 1 & 3 & a & 5 \end{pmatrix}; \quad (3)\ \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1+a \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Dans chacun des cas suivants, calculer le déterminant de A; déterminer si A est inversible ou non; et si oui, trouver $\det(A^{-2})$ lorsque A est inversible.

$$(1)\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 5 \\ 9 & 3 & -3 & 15 \\ 6 & 7 & -8 & 10 \\ -3 & 4 & -8 & 2 \end{pmatrix}; \qquad (2)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Considérer la matrice suivante:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 & 1 \\ -1 & a & -1 & -1 \\ 1 & 1 & a & -1 \\ -1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

(1) Pour toute valeur réelle de a, montrer que A est inversible. *Indice*: Calculer AA^T et appliquer les théorèmes 2.7 et 2.8.

(2) Calculer $\det(A^{-2})$.

Chapitre III: Systèmes d'équations linéaires

La résolution de systèmes d'équations linéaires apparaît dans beaucoup de domaines de sceinces, comme en traitement numérique du signal, en optimisation linéaire et en analyse numérique. Dans ce cours, cela sera utilisée pour exprimer un vecteur comme une combinaison linéaire de certains vecteurs; et en particulier, pour trouver les coordonnées de vecteurs dans une base d'un espace vectoriel. Le but de ce chapitre est d'étudier les propriétés et la résolution de tels systèmes.

3.1. Définition. Un système d'équations linéaires sur $\mathbb{R}$ est un ensemble d'équations linéaires comme suit:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \quad a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}. \end{array}$$

On appelle $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *inconnues*; a_{ij} *coefficients*; et b_i, *termes constants.*

Une solution de ce système est un n-uplet $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, $s_i \in \mathbb{R}$, tel que

$$a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \cdots + a_{in}s_n = b_i, \; i = 1, \ldots, m.$$

Le système est dit *compatible* s'il admet au moins une solution; et sinon, *incompatible.*

Deux systèmes d'équations linéaires sont dits *équivalents* s'ils ont le même ensemble de solutions.

Exemple. (1) On a un système d'une équation linéaire

$$2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 8,$$

dont $(4, 0, 0, 0)$ est une solution.

(2) Considérons trois plans affines de l'espace définis par les équations

$$x + y - z = 1; \; 2x + y - z = 1; \; 3x + 2y - z = 2,$$

respectivement. Les points d'intersection de ces trois plans sont donnés par les solutions du système d'équations linéaires suivant:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 2. \end{array}$$

On verra que ce système a une seule solution $(0, 1, 0)$. Ainsi, ces trois plans affines se rencontrent en un seul point $(0, 1, 0)$.

(3) Le système suivant n'est pas linéaire:

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 1 \\ 2x & + & xy & = & 2. \end{array}$$

On utilisera la théorie des matrices pour étudier les systèmes d'équations linéaires. Pour ce faire, on introduira la notion suivante.

3.2. Définition. Soit un système d'équations linéaires

$$(*) \qquad \begin{array}{rcrcccrcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}$$

On appelle

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ et } \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

matrice des coefficients et *matrice augmentée* de ce système, respectivement.

Remarque. On voit aisément que le système $(*)$ est équivalent à l'équation matricielle

$$(**) \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

de sorte que $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ est une solution du système $(*)$ si, et seulement si, la colonne

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$$

est une solution de l'équation matricielle $(**)$.

Exemple. (1) Considérons le système d'équations linéaires suivant:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & & & - & z & = & 1 \\ x & - & 2y & & & = & 1 \\ 2x & & & - & 2z & = & 5. \end{array}$$

La matrice des coefficients et la matrice augmentée sont respectivement

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 5 \end{array}\right).$$

En outre, le système original est équivalent à l'équation matricielle

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(2) Réciproquement, la matrice partagée

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

représente une équation matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou bien, un système d'équations linéaires

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 2 \\ & & 2y & + & z & = & 3 \\ & & & & 2z & = & 0. \end{array}$$

Dès maintenant, un système de m équations linéaires à n inconnues sera noté comme une équation matricielle

$$AX = B,$$

où $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$. Le but est de résoudre un tel système, c'est-à-dire,

(1) déterminer si le système est compatible ou incompatible;
(2) trouver toutes les solutions s'il est compatible.

On commence par la résolution de certains systèmes asset simples, c'est-à-dire, les systèmes échelonnés tels que définis ci-dessous.

3.3. Définition. Un système d'équations linéaires à n inconnues

$$AX = B$$

est dit *échelonné* si $(A \mid B)$ est échelonnée. Dans ce cas,

(a) A est aussi échelonnée, dont les pivots sont des pivots de $(A \mid B)$;

(b) une inconnue est dite *libre* si aucun de ses coefficients n'est un pivot de A.

Remarque. Si $AX = B$ est un système échelonné à n inconnues, alors

(1) $\text{rg}(A) \leq \text{rg}(A \mid B)$;

(2) $\text{rg}(A) \leq n$;

(3) le nombre d'inconnues libres est égal à $n - \text{rg}(A)$.

Exemple. (1) Le système

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} \boxed{2x_1} & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ & & & & \boxed{5x_3} & + & x_4 & + & 5x_5 & = & -1 \\ & & & & & & \boxed{7x_4} & & & = & -8 \end{array}$$

est échelonné. En effet, la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} \boxed{2} & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{7} & 0 & -8 \end{array}\right)$$

est échelonnée. Les pivots de la matrice des coefficients sont $2, 5$ et 7 qui sont coefficients de x_1, x_3 et x_4 respectivement. Donc les inconnues libres sont x_2 et x_5.

(2) Le système

$$0x_1 + \boxed{3x_2} - 4x_3 - 5x_4 + x_5 = 1$$

est échelonné, dont les inconnues libres sont x_1, x_3, x_4 et x_5.

(3) Le système

$$\begin{array}{rcrcrcr} \boxed{x} & - & 2y & + & z & = & 3 \\ & & \boxed{5y} & - & 5z & = & -15 \\ & & & & \boxed{-2z} & = & -4 \end{array}$$

est échelonné sans inconnue libre.

(4) Les systèmes suivants ne sont pas échelonnés.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & 3y & + & z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 3; \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & 3y & + & z & = & 5 \\ 2x & & & + & z & = & 3. \end{array}$$

On étudiera la résolution de systèmes échelonnés d'équations linéaires.

3.4. Proposition. Soit $AX = B$ un système échelonné d'équations linéaires. Si $\text{rg}(A) < \text{rg}(A \mid B)$, alors le système est incompatible.

Exemple. Considérons le système échelonné suivant:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & - & 2z & = & 1 \\ & & 2y & - & 3z & = & 0 \\ & & & & 0z & = & 2 \\ & & & & 0z & = & 0. \end{array}$$

La matrice augmentée est

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Comme $\mathrm{rg}(A) = 2 < 3 = \mathrm{rg}(A \mid B)$, d'après la proposition 3.4, le système est incompatible.

3.5. Proposition. Soit $AX = B$ un système échelonné d'équations linéaires à n inconnues. Si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid B) = n$, alors le système admet une seule solution, ce qui peut être trouvée par substitution successivement à partir de la dernière équation non nulle.

Exercice. Résoudre le système échelonné suivant:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & + & z & = & 1 \\ & & y & - & z & = & 3 \\ & & & & 3z & = & 6 \\ & & & & 0z & = & 0. \end{array}$$

Solution. La matrice augmentée est

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Comme $\mathrm{rg}(A) = 3$, d'après la proposition 3.5, le système a une seule solution. D'après la troisième équation, on trouve $z = 2$. En substituant $z = 2$ dans la deuxième équation, on trouve $y = 5$. Enfin, en substituant $y = 5$ et $z = 2$ dans la première équation, on trouve $x = 2$. Donc la solution du système est $(2,\ 5,\ 2)$.

3.6. Théorème. Soit un système échelonné d'équations linéaires à n inconnues

$$AX = B.$$

Si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid B) < n$, alors

(1) le système a des inconnues libres $x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}$ avec $s = n - \mathrm{rg}(A)$;

(2) le système a une infinité de solutions qui sont en bijection avec les s-uplets $(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$, de la façon suivante :

> Étant donné $(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$, on pose $x_{j_l} = \lambda_l$, $l = 1, \ldots, s$. En déplaçant les $a_{i,j_l}\lambda_j$ à droite, on obtient un système échelonné sans inconnues libres. En résolvant ce dernier par substitution, on trouve les valeurs pour les inconnues non libres. Cela donne la solution du système original correspondant à $(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$.

Exercice. Résoudre le système échelonne suivant:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ & & & & 5x_3 & + & x_4 & + & 5x_5 & = & -1 \\ & & & & & & 7x_4 & & & = & -8. \end{array}$$

Solution. Le système est échelonné ayant deux inconnues libres x_2 et x_5. Ainsi le système admet une infinité de solutions. À titre d'exemple, on considère un couple $(1, -1)$. Posant $x_2 = 1$ et $x_5 = -1$, on obtient un système échelonné sans inconnue libre suivant:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -2 \\ & & 5x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ & & & & 7x_4 & = & -8. \end{array}$$

En résolvant la dernière système par substitution, on trouve une solution

$$\left(\frac{46}{70},\ 1,\ \frac{36}{35},\ -\frac{8}{7},\ -1\right)$$

du système original correspondant à $(1, -1)$. Pour trouver toutes les solutions, on donne $x_2 = \lambda$ et $x_5 = \mu$ des valeurs réelles arbitraires. Ceci donne un système échelonné sans inconnue libre comme suit:

$$\begin{array}{rcrcrcrr} 2x_1 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -\lambda & +\mu \\ & & 5x_3 & + & x_4 & = & -5\mu & -1 \\ & & & & 7x_4 & = & & -8. \end{array}$$

En résolvant par substitution, on trouve

$$x_1 = -\frac{\lambda}{2} + \frac{81}{70}, \quad x_2 = \lambda, \quad x_3 = -\mu + \frac{1}{35}, \quad x_4 = -\frac{8}{7}, \quad x_5 = \mu.$$

Donc l'ensemble des solutions du système original est

$$\left\{ \left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{81}{70},\ \ \lambda,\ \ -\mu + \frac{1}{35},\ \ -\frac{8}{7},\ \ \mu \right) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

La stratégie de la résolution d'un système général consiste à réduire le système à un autre système plus simple sans changer l'ensemble des solutions.

3.7. Théorème. L'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires n'est pas changé par les *opérations élémentaires* suivantes:
Type 1: Échanger deux équations, notée $E_i \leftrightarrow E_j$.
Type 2: Additionner à une équation un multiple d'une autre équation, notée $E_i + aE_j$.
Type 3: Multiplier une équation par un nombre non nul a, notée aE_i.

Remarque. Effectuer une opération élémentaire sur les équations d'un système est équivalent à effectuer une opération élémentaire de même type sur les lignes de la matrice augmentée.

Exemple.

$$\begin{array}{r} x+2y+3z=0 \\ 4x+5y+6z=1 \\ 7x+8y+9z=2 \end{array} \overset{\substack{E_2-4E_1 \\ E_3-7E_1}}{\Longrightarrow} \begin{array}{r} x+2y+3z=0 \\ -3y-6z=1 \\ -6y-12=2 \end{array} \overset{E_3-2E_2}{\Longrightarrow} \begin{array}{r} x+2y+3z=0 \\ -3y-6z=1 \\ 0z=0. \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 2 \end{array}\right) \overset{\substack{L_2-4L_1 \\ L_3-7L_1}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 1 \\ 0 & -6 & 12 & 2 \end{array}\right) \overset{L_3-2L_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

On voit que la nouvelle matrice augmentée est la matrice augmentée du nouveau système.

3.8. Corollaire. Soit $AX = B$ un système d'équations linéaires. Si $(A \mid B)$ s'échelonne à une matrice échelonnée $(A' \mid B')$, alors le système original est équivalent au système échelonné $A'X = B'$.

Remarque. La méthode donnée dans le corollaire 3.8 s'appelle *élimination de Gauss.*

Exercice. Résoudre, par l'élimination de Gauss, le système

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 6 \\ 4x_1 & + & 4x_2 & & & + & 4x_4 & = & 12 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & + & 6x_3 & - & 3x_4 & = & 9. \end{array}$$

Solution. On échelonne la matrice augmentée comme suit:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 6 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 12 \\ 3 & -3 & 6 & -3 & 9 \end{array}\right) \overset{L_1+\frac{1}{4}L_3}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 6 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 12 \\ 3 & -3 & 6 & -3 & 9 \end{array}\right) \overset{\substack{L_2-2L_1 \\ L_3-4L_1 \\ L_4-3L_1}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & -9 & 9 & -9 & 0 \end{array}\right) \overset{-\frac{1}{5}E_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & -9 & 9 & -9 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{L_3+4L_2 \\ L_4+9L_2}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Cette dernière représente le système échelonné suivant:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & & & & & 0x_4 & = & 0 \\ & & & & & & 0x_4 & = & 0. \end{array}$$

Remarquons que x_3 et x_4 sont les inconnues libres. On donne $x_3 = \lambda$ et $x_4 = \mu$ des valeurs réelles arbitraires et on obtient le système échelonné suivant:

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 2x_2 & = & 3 + \lambda - 2\mu \\ & & x_2 & = & \lambda - \mu. \end{array}$$

En résolvant par substitution, on trouve que

$$x_1 = 3 - \lambda, \quad x_2 = \lambda - \mu, \quad x_3 = \lambda, \quad x_4 = \mu.$$

Par conséquent, l'ensemble des solutions du système original est

$$\{(3 - \lambda, \lambda - \mu, \lambda, \mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Le résultat suivant découle des résultats précédents.

3.9. Théorème. Soit $AX = B$ un système d'équations linéaires à n inconnues.
(1) Si $\mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A \mid B)$, alors le système n'a aucune solution.
(2) Si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid B) = n$, alors le système admet une seule solution.
(3) Si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid B) < n$, alors le système admet une infinité de solutions.
Pour résumer, le système est compatible si, et seulement si, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid B)$.

Exercice. Considérer le système suivant:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 3z & = & a \\ x & + & 2y & + & 2z & = & a \\ x & + & ay & + & z & = & 3. \end{array}$$

Déterminer les valeurs de a pour que le système
(1) ait une seule solution;
(2) ait une infinité de solutions;
(3) n'ait pas de solution.

Solution. On échelonne la matrice augmentée $(A \mid B)$ comme suit:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & a \\ 1 & 2 & 2 & a \\ 1 & a & 1 & 3 \end{array}\right) \overset{\substack{L_2-L_1 \\ L_3-L_1}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & a \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & a-1 & -2 & 3-a \end{array}\right) \overset{L_3-(a-1)L_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & a \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a-3 & 3-a \end{array}\right).$$

Pour toutes valeurs de a, cette dernière est échelonnée.

(1) Si $a \neq 3$, alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid B) = 3$, et d'après le théorème 3.9, le système admet une seule solution.

(2) Si $a = 3$, alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid B) = 2 < 3$, et d'après le théorème 3.9, le système admet une infinité de solutions.

(3) Il n'y a aucune valeur réelle de a pour que le système soit incompatible.

On conclut cette section par étudier des systèmes d'équations linéaires dont les termes constants sont tous nuls.

3.10. Définition. Un système d'équations linéaires

$$AX = B$$

est dit *homogène* si $B = 0$. Dans ce cas, $X = 0$ est une solution, appelée la *solution nulle*.

On verra plus tard que les systèmes homogènes seront utilisés pour déterminer si des vecteurs sont linéairement dépendants ou indépendants.

3.11. Théorème. Soit un système homogène de m équations linéaires à n inconnues

$$AX = 0.$$

(1) Le système admet des solutions non nulles si, et seulement si, $\mathrm{rg}(A) < n$.

(2) Si $m < n$, alors le sysème admet des solutions non nulles.

Exemple. Considérons le système homogène suivant:

$$\begin{array}{rcrcrcl} \sqrt{2}x & - & (1+\sqrt{3})y & - & z & = & 0 \\ (1-\sqrt{2})x & + & \sqrt{3}y & + & z & = & 0. \end{array}$$

Comme le nombre d'équations est inférieur que celui d'inconnues, d'après le théorème 3.11(2), ce système homogène admet des solutions non nulles.

Exercice. Donner la valeur de a pour que le système homogène suivant ait des solutions non nulles.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & + & 4z & = & 0 \\ 2x & + & 4y & + & az & = & 0. \end{array}$$

Solution. Comme le système est homogène, on échelonne la matrice des coefficients

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette dernière matrice est échelonnée pour toute valeur de a. D'après le théorème 3.11(1), le système homogène admet des solutions non nulles si, et seulement si, $\mathrm{rg}(A) < 3$, si, et seulement si, $\mathrm{rg}(A) = 2$ si, et seulement si, $a = 2$.

3.12. Exercices

1. Résoudre par l'élimination de Gauss les systèmes suivants:

(1)
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 6 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & - & 5x_4 & = & 1 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & 0; \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 1. \end{array}$$

2. Trouver le point d'intersection de trois plans affines définis par les équations $x+2y-z=1$, et $2x-y+z=2$, et $3x+2y-z=3$, respectivement.

3. Considérer le système suivant:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 2 \\ 2x & + & ay & + & 2z & = & 3. \end{array}$$

Déterminer les valeurs réelles de a pour lesquelles le système
(1) n'ait pas de solution;
(2) ait une infinité de solutions;
(3) ait une seule solution.

4. Dans chacun des cas suivants, trouver la condition pour que le système soit compatible.

(1)
$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & 6 \\ 3x & + & y & - & z & = & 7 \\ -x & + & y & + & az & = & 6. \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 3z & = & a \\ 2x & + & 6y & - & 11z & = & b \\ x & - & 2y & + & 7z & = & c. \end{array}$$

5. Soient P_1, P_2, et P_3 les plans affines définis par les équations $x+2y+z=1$; $2x+5y+az=1$ et $x+ay+2z=2$, respectivement. Trouver les valeurs réelles de a pour que les trois plans se coupent, c'est-à-dire, leur intersection est non vide.

6. Pour quelle valeur de a, le système homogène

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & - & 4y & + & z & = & 0 \\ 3x & + & y & + & az & = & 0 \\ -x & - & 2y & - & z & = & 0, \end{array}$$

a-t-il des solutions non nulles? Si c'est le cas, trouver toutes les solutions.

7. Dans chacun des cas suivants, déterminer si le système homogène admet des solutions non nulles.

(1)
$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & + & 4z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \\ 3x & + & y & & & = & 0; \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \\ 3x & & & + & 3z & = & 0; \end{array}$$

(3)
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & + & 6x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 4x_2 & & & + & x_4 & = & 0. \end{array}$$

Chapitre IV: Espaces vectoriels

Dans les applications, beaucoup de quantités comme la chaleur et la température, peuvent être décrites par une seule variable. Mais certaines d'autres quantités, comme la force et la couleur numérique, exigent plusieurs variables pour leur définition. On les appelle *quantités vectorielles*. Les quantités vectorielles différentes possèdent des propriétés communes. Par exemple, une quantité vectorielle peut être multipliée par un constant et deux quantités vectorielles de même genre peuvent être additionnées. Afin d'étudier les quantités vectorielles diverses en même temps, on introduit la notion d'espace vectoriel et on étudie celle-ci en général; en suite, on applique des résultats généraux dans des applications particulières.

4.1. Base et dimension

4.1.1. Définition. Les nombres réels s'appellent *scalaires*. Un ensemble E, ses éléments s'appellent *vecteurs*, est dit *espace vectoriel réel* (ou bien, *espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$) s'il est muni d'une multiplication par scalaires

$$\cdot : \mathbb{R} \times E \to E : (a, u) \mapsto a \cdot u$$

et d'une addition

$$+ : E \times E \to E : (u, v) \mapsto u + v$$

satisfaisant aux axiomes suivants pour tous a, $b \in \mathbb{R}$ et $u, v, w \in E$.

(1) (associativité) $a \cdot (b \cdot u) = (ab) \cdot u$.
(2) (neutralité) $1 \cdot u = u$.
(3) (commutativité) $u + v = v + u$.
(4) (associativité) $u + (v + w) = (u + v) + w$.
(5) Il existe un *vecteur nul*, noté 0_E, de E tel que $u + 0_E = u$.
(6) u admet un *opposé*, noté $(-u)$, tel que $u + (-u) = 0_E$.
(7) (distributivité) $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$.
(8) (distributivité) $(a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$.

En outre, E est dit *nul* si $E = \{0_E\}$.

Remarque. (1) Pour tous $u, v \in E$, on définit la *différence* entre u et v par

$$u - v := u + (-v).$$

(2) Pour $u, v, w \in E$, grâce à l'associativité, on peut définir

$$u + v + w := (u + v) + w.$$

(3) En général, pour tous $u_1, \ldots, u_n \in E$ avec $n > 2$, on définit

$$u_1 + \cdots + u_n := (\cdots(u_1 + u_2) + \cdots + u_{n-1}) + u_n.$$

Exemple. $E = \{0\}$ est un espace vectoriel réel nul, pour les opérations suivantes:

$$0 + 0 = 0; \quad a \cdot 0 = 0, \quad \text{pour tout } a \in \mathbb{R}.$$

4.1.2. Proposition. Pour tout entier $n \geq 1$, on a un espace vectoriel réel

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

dont les opérations sont définies ci-dessous:

$$a \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_1 \\ \vdots \\ aa_n \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}.$$

Remarque. Pour tout entier $n \geq 1$, l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^n$ s'appelle *espace vectoriel canonique.*

Exemple. (1) Prenant $n = 1$, on voit que $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, noté ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}$.

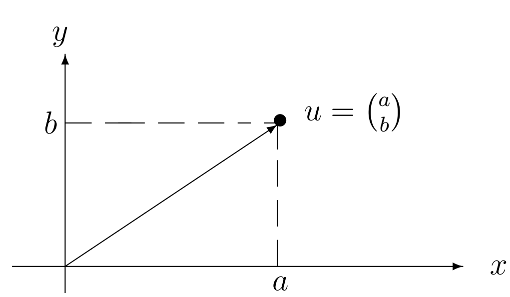
(2) Prenant $n = 2$, on obtient le plan réel

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

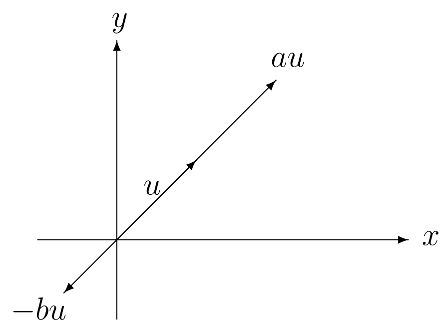
Dans cet exemple, un vecteur de la forme algébrique

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

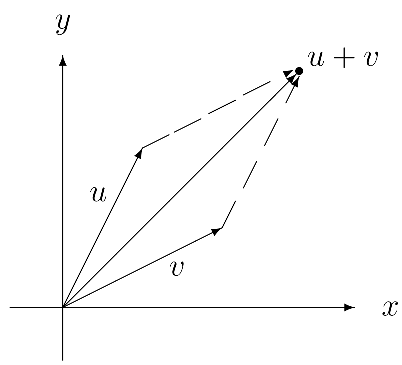
peut être représenté par un vecteur géométrique du plan comme suit:



On peut multiplier un vecteur par un scalaire d'une façon géométrique comme suit:



On peut aussi additionner deux vecteurs d'une façon géométrique comme suit:



(3) Prenant $n = 3$, on obtient l'espace vectoriel réel usuel

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ceci admet aussi un modèle géométrique.

(4) Une couleur numérique C dont les coorodnnées RVB sont $\{r; v; b\}$ est représentée par le vecteur

$$\begin{pmatrix} r \\ v \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Par excemple, le vecteur

$$\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,2 \\ 0,15 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

représente une couleur numérique, ce qui est composée de 50% du rouge, 20% du vert et 15% du bleu. Par contre, les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0,1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0,2 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

ne représentent aucune couleur numérique.

Dès maintenant, on se fixe E un espace vectoriel réel. D'abord, on rassemble des propriétés élémentaires d'espaces vectoriels dans le résultat suivant.

4.1.3. Proposition. Soient $u, v, w \in E$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Les énoncés suivants sont valides.
(1) Si $u + v = u + w$, alors $v = w$.
(2) $au = 0_E$ si, et seulement si, $a = 0$ ou $u = 0_E$.
(3) $(-1)u = -u$ et $-(-u) = u$.
(4) $-(u + v) = -u - v$.
(5) $u + v = w$ si, et seulement si, $u = w - v$.

La notion de combinaison linéaire joue un rôle important dans l'étude d'espaces vectoriels.

4.1.4. Définition. Soient $u_1, \ldots, u_n \in E$. Un vecteur $u \in E$ est dit *combinaison linéaire* de $u_1, \ldots, u_n$ s'il existe $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, appelés *coefficients*, tels que

$$u = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n.$$

Remarque. Lorsque $n = 1$, une combinaison linéaire de u_1 est un *multiple* au_1 de u_1, où $a \in \mathbb{R}$.

Exemple. (1) Tout vecteur $v \in E$ est une combinaison linéaire de lui-même, car $v = 1 \cdot v$.
(2) Pour tous $u_1, \ldots, u_n \in E$, le vecteur nul 0_E est toujours une combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_n$. En effet,

$$0_E = 0 \cdot u_1 + \cdots + 0 \cdot u_n.$$

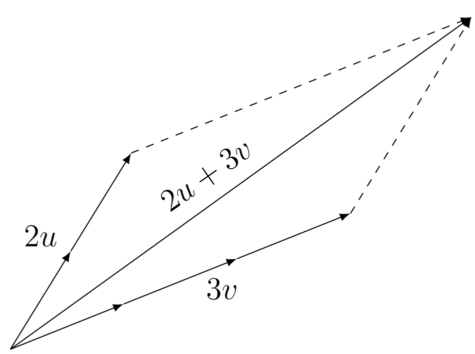
Exercice. Considérer deux vecteurs

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Donner la combinaison linéaire w de u, v à coefficients $2, 3$.
Solution. Par définition,

$$w = 2u + 3v = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Ceci est illustré par



On parlera d'une application des combinaisons linéaires aux couleurs numériques.

4.1.5. Proposition. Une couleur numérique C est obtenue en mélangeant des couleurs numériques $C_1, \ldots, C_n$ si, et seulement si, C est une combinaison linéaire de $C_1, \ldots, C_n$ aux coefficients $a_1, \ldots, a_n$ entre 0 et 1, c'est-à-dire,

$$C = a_1 C_1 + \cdots + a_n C_n; \quad 0 \leq a_1, \ldots, a_n \leq 1,$$

où a_i est l'intensité (ou bien, le pourcentage) de la couleur numérique C_i, pour $i = 1, \ldots, n$.

Exercice. Trouver les coordonnées RVB de la couleur numérique C obtenue en mélaneant 30% du magenta, 20% du blanc, 15% du jaune et 35% du pourpre.

Solution. Les colonnes des coordonnées RVB du magenta, du blanc, du jaune et du pourpre sont respectivement

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'après la proposition 4.1.5, on obtient

$$C = 0,3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0,2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0,15 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0,35 \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,86 \\ 0,35 \\ 0,85 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire, C est consitituée de 86% du rouge, 35% du vert, et 85% du bleu.

Le résultat suivant nous dit qu'exprimer un vecteur comme une combinaison linéaire de vecteurs d'un espace vectoriel canonique se ramène à trouver une solution d'un système d'équations linéaires.

4.1.6. Proposition. Soient $u_1, \ldots, u_n; u \in \mathbb{R}^m$. Posons $A = (u_1 \; \cdots \; , u_n) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Pour tous $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, les énoncés suivants sont équivalents.

(1) $u = a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n$.

(2) $u = A \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

(3) Le système $AX = u$ a pour solution

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Exercice. Soient

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Exprimer, si possible, u comme une combinaison linéaire de u_1, u_2, u_3.

Solution. D'après la proposition 4.1.6, on doit chercher une solution du système

$$(u_1\, u_2\, u_3)X = u,$$

c'est-à-dire,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Maintenant, on échelonne la matrice augmentée

$$(u_1\, u_2\, u_3 \mid u) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Cette dernière représente le système échenonné

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & - & z & = & -4 \\ & & 3y & - & 2z & = & -7 \\ & & & & 0z & = & 0. \end{array}$$

Comme z est une inconnue libre, le système admet une infinité de solutions. Pour trouver une solution particulière, on pose par exemple $z = 2$. Cela nous donne $y = -1$ et $x = 1$. C'est-à-dire,

$$u = 1 \cdot u_1 + (-1) \cdot u_2 + 2 \cdot u_3.$$

Par contre, si l'on pose $z = 5$, alors $y = 1$ et $x = 0$. Ceci nous donne une autre expression

$$u = 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 5 \cdot u_3.$$

Le résultat suivant nous donne un critère pour qu'un vecteur soit une combinaison linéaire d'une famille de vecteurs.

4.1.7. Théorème. Si $u_1, \ldots, u_n; u \in \mathbb{R}^m$, alors les conditions suivantes sont équivalentes:
(1) u est une combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_n$.
(2) Le système d'équations linéaires suivant est compatible

$$(u_1 \cdots u_n)X = u.$$

(3) $\mathrm{rg}(u_1 \cdots u_n) = \mathrm{rg}(u_1 \cdots u_n \mid u)$.

Exercice. Déterminer si v est une combinaison linéaire de v_1, v_2 ou non, où

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}; v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Solution. D'après le théorème 4.1.7, on doit comparer $\mathrm{rg}(v_1\, v_2)$ et $\mathrm{rg}(v_1\, v_2 \mid v)$. Pour ce faire, on échelonne la matrice $(v_1\, v_2 \mid v)$ comme suit:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

D'où, $\mathrm{rg}(v_1\, v_2) = 2$ et $\mathrm{rg}(v_1\, v_2 \mid v) = 3$. Par conséquent, v n'est pas une combinaison linéaire de v_1, v_2.

En général, les coefficients d'une combinaison linéaire de vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ ne sont pas uniques. Par exemple, dans l'espace réel $\mathbb{R}^3$, on a vu que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On étudiera quand les coefficients de toute combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_n$ sont uniques.

4.1.8. Définition. Des vecteurs $u_1, \ldots, u_n \in E$ sont dits
(1) *linéairement dépendants* s'il existe $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, non tous nuls, tels que

$$a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n = 0_E;$$

(2) *linéairement indépendants* sinon; c'est-à-dire, si toute égalité

$$a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n = 0_E$$

entraîne que $a_1 = \cdots = a_n = 0$.

Remarque. (1) On dit qu'une famille $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est *liée* ou *libre* si $u_1, \ldots, u_n$ sont linéairement dépendants ou indépendants, respectivement.

(2) Par convention, la famille vide $\emptyset$ est libre.

Voici une autre interprétation de la dépendance lináire et de l'indépendance linéiare. Soient des vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_n \in E$. Considérons une équation homogène

$$(*) \qquad x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots + x_n u_n = 0_E.$$

Alors la famille $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ est liée si $(*)$ a une solution non nulle et libre si $(*)$ n'a que la solution nulle.

Exercice. Soient
$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$
Vérifier si la famille $\{u_1, u_2\}$ est liée ou libre.

Solution. La question est de déterminer si l'équation
$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
admet une solution non nulle. Cette équation est équivalente au système homogène
$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ x_1 & & & = & 0. \end{array}$$
Ceci n'a que la solution nulle $x_1 = x_2 = 0$. Ainsi $\{v_1, v_2\}$ est libre.

Le résultat suivant nous dit comment déterminer si une petite famille de vecteurs est liée ou libre.

4.1.9. Lemme. Soient $u, v \in E$.
(1) La famille $\{u\}$ est liée si, et seulement si, $u = 0_E$;
(2) La famille $\{u, v\}$ est liée si, et seulement si, l'un de u, v est un multiple de l'autre.

Exercice. Déterminer lesquelles des familles de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivantes sont libres.
$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}; \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}; \quad \left\{ u = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Solution. D'après le lemme 4.1.9(1), la première famille est liée, et la deuxième est libre. Enfin, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on voit que
$$au = \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \end{pmatrix} \neq v; \quad av = \begin{pmatrix} 0 \\ 3a \end{pmatrix} \neq u.$$
D'après le lemme 4.1.9(2), $\{u, v\}$ est libre.

Le résultat suivant nous dit que déterminer si une famille de vecteurs d'un espace vectoriel canonique est liée ou libre se ramène à déterminer si un système homogène d'équations linéaires admet des solutions non nulles ou non.

4.1.10. Théorème. Pour tous $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^m$, les conditions suivantes sont équivalentes.
(1) La famille $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est libre.

(2) Le système homogène suivant n'a que la solution nulle

$$(u_1, \ldots, u_n)X = 0.$$

(3) $\mathrm{rg}(u_1 \ldots u_n) = n$, le nombre de vecteurs de cette famille.

Exercice. Déterminer laquelle des familles de vecteurs suivantes est liée.

(1)

$$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3;$$

(2)

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Solution. D'après le théorème 4.1.10(3), il nous faut calculer le rang de la matrice formée par les vecteurs de chacune des familles.

(1) On échelonne

$$(v_1\, v_2\, v_3\, v_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $\mathrm{rg}(v_1\, v_2\, v_3) < 4$, la famille $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est liée.

(2) On échelonne

$$(u_1\, u_2\, u_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $\mathrm{rg}(u_1\, u_2\, u_3) = 3$, la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est libre.

Le résultat suivant donne une caractérisation de l'indépendance linéaire.

4.1.11. Proposition. Si $u_1, \ldots, u_n \in E$, alors les conditions suivantes sont équivalentes.
(1) La famille $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est libre.
(2) Toute sous-famille de $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est libre.
(3) Aucun de $u_1, \ldots, u_n$ n'est une combinaison linéaire des autres vecteurs.

(4) Toute combinaison linéaire u de $u_1, \ldots, u_n$ s'écrit d'une façon unique

$$u = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n, \text{ avec } a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}.$$

Remarque. Si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est libre, alors
(1) $u_i \neq 0_E$, $i = 1, \ldots, n$;
(2) $u_i \neq u_j$ lorsque $i \neq j$.

Exemple. Soient

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; u = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

On a vu que

$$u = 1 \cdot u_1 + (-1) \cdot u_2 + 2 \cdot u_3 = 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 5 \cdot u_3.$$

D'après la proposition 4.1.11(4), la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est liée.

Exercice. Vérifier qu'aucune des trois couleurs parmi le rouge, le vert et le bleu n'est obtenue en mélangeant les deux autres.

Démonstration. Les vecteurs des coordonnées RVB de ces couleurs sont respectivement

$$R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $(R\,V\,B) = I_3$, ce qui est de rang 3. D'après le théorème 4.1.10(3), la famille $\{R, V, B\}$ est libre. D'après la proposition 4.1.11(3), aucun de R, V, B n'est une combinaison linéaire des deux autres. D'après la proposition 4.1.5, aucun de R, V, B n'est obtenue en mélangeant deux autres.

4.1.12. Définition. Soit E un espace vectoriel réel.

(1) Si E est non nul, alors une famille ordonnée $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de vecteurs de E s'appelle *base* de E si

(i) $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est libre; et
(ii) tout vecteur $u \in E$ est une combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_n$.

(2) Si $E = \{0_E\}$ alors, par convention, la famille vide $\emptyset$ est la seule base de E.

Exercice. Vérifier que $\mathbb{R}^2$ a pour base la famille ordonnée suivante:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Démonstration. D'abord, considérons la matrice

$$A = (u_1\, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On voit aisément que $\mathrm{rg}(A) = 2$.

(1) D'après le théorème 4.1.10(3), la famille $\{u_1, u_2\}$ est libre.

(2) Soit un vecteur quelconque $u \in \mathbb{R}^2$. Pour vérifier que u est une combinaison linéaire de u_1, u_2, considérons le système

$$AX = u.$$

Comme $2 = \mathrm{rg}(A) \leq \mathrm{rg}(A \mid u) \leq 2$, on a $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid u) = 2$. D'après le théorème 3.9(2), ce système est compatible. D'après le théorème 4.1.7(3), u est une combinaison linéaire de u_1, u_2. Par définition, $\{u_1, u_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

4.1.13. Proposition. Pour tout entier $n \geq 1$, l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^n$ a pour base, appelée *base canonique*, la famille ordonnée suivante:

$$\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \cdots,\ e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Démonstration. On a $(e_1 \cdots e_n) = I_n$, ce qui est de rang n. D'après le théorème 4.1.10(3), $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est libre. En outre, tout vecteur

$$u = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

s'écrit évidemment

$$u = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n, \text{ où } a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}.$$

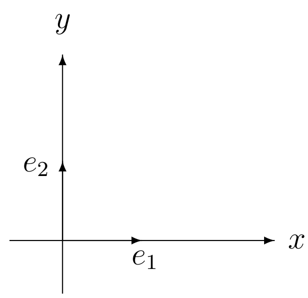
Par définition, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Ceci achève la démonstration.

Exemple. (1) La base canonique de ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ est $\{1\}$.

(2) La base canonique du plan $\mathbb{R}^2$ est

$$\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

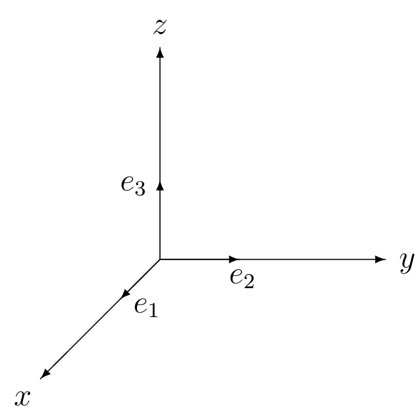
illustrée par le diagramme comme suit:



(3) La base canonique de l'espace usuel $\mathbb{R}^3$ est

$$\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

illustrée par le diagramme comme suit:



4.1.14. Théorème. Toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs; ce nombre commun s'appelle *dimension* de E, noté $\dim(E)$.

Remarque. $\dim(E) = 0$ si, et seulement si, $E = \{0_E\}$.

Exemple. Pour tout $n \geq 1$, on a $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.
En effet, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Le résultat suivant nous dit que la dimension de E est le plus grand nombre de vecteurs linéairement indépendants.

4.1.15. Théorème. Si $\dim(E) = n$, alors
(1) toute famille libre de n vecteurs de E est une base;
(2) toute famille de plus que n vecteurs de E est liée.

Exemple. (1) On a $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$. Mais la famille

$$\left\{ u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$. En effet, comme $v = 2u$, cette famille est liée.

(2) Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, d'après le théorème 4.1.15(2), les vecteurs

$$u_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ \sqrt{7} \\ 1 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

sont linéairement dépendants.

Exercice. Vérifier que $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, où

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, d'après le théorème 4.1.15(1), il suffit de vérifier que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est libre. Pour ce faire, on échelonne la matrice

$$(u_1\, u_2\, u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\mathrm{rg}(u_1\, u_2\, u_3) = 3$. D'après le théorème 4.1.10(3), $\{u_1, u_2, u_3\}$ est libre. Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4.2. Coordonnées

Le but de cette section est d'appliquer la théorie de matrices pour étudier les espaces vectoriels de dimension finie. Partout dans cette section, on se fixe E un espace vectoriel réel ayant une base finie. Rappelons qu'une base est une famille ordonnée.

4.2.1. Définition. Soit $\{u_1, \ldots, u_n\}$ une base de E. Pour tout $u \in E$, il y a n scalaires uniques $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$(*) \qquad u = a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n.$$

On appelle $a_1, \ldots, a_n$ *coordonnées* de u dans la base $\{u_1, \ldots, u_n\}$, et la matrice-colonne

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

colonne des coordonnées de u dans la base $\{u_1, \ldots, u_n\}$.

Remarque. Si l'on considère $(u_1, \ldots, u_n)$ comme une matrice-ligne formelle, alors l'équation $(*)$ devient

$$u = (u_1, \ldots, u_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Ceci est illustrée par le diagramme suivant:

$$\{u_1, \ldots, u_n\} \xrightarrow{\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}} u.$$

Exercice. Considérons la base de $\mathbb{R}^2$ suivante:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(1) Donner le vecteur $v \in \mathbb{R}^2$ dont les coordonnées dans $\{u_1, u_2\}$ sont $\sqrt{2}, \sqrt{3}$.
(2) Trouver la colonne des coordonnées de

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(2.1) dans la base $\{u_1, u_2\}$ de $\mathbb{R}^2$;

(2.2) dans la base canonique $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$;

(2.3) dans la base non canonique $\{e_2, e_1\}$ de $\mathbb{R}^2$.

Solution. (1) D'après l'hypothèse, on a

$$u = \sqrt{2} \cdot u_1 + \sqrt{3} \cdot u_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} + \sqrt{3} \\ \sqrt{2} - \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

(2.1) Supposons que les coordonnées de u dans $\{u_1, u_2\}$ sont a_1, a_2, c'est-à-dire,

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 = u.$$

Ceci est équivalent au système suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Pour ce résoudre, on échelonne

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Ceci nous donne la solution $a_1 = \frac{5}{2}$ et $a_2 = -\frac{1}{2}$. C'est-à-dire,

$$u = \frac{5}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2.$$

D'où, les coordonnées de u dans $\{u_1, u_2\}$ sont $\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}$, et donc, la colonne des coordonnées de u dans $\{u_1, u_2\}$ est

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On écrit aussi

$$u = (u_1, u_2)\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(2.2) On voit aisément que

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot e_1 + 3 \cdot e_2.$$

D'où, la colonne des coordonnées de u dans $\{e_1, e_2\}$ est

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = u.$$

(2.3) Par contre, comme $u = 3 \cdot e_2 + 2 \cdot e_1$, les coordonnées de u dans $\{e_2, e_1\}$ sont $\{3; 2\}$, et donc, la colonne des coordonnées de u dans $\{e_2, e_1\}$ est

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

L'observation suivante sera pratique.

4.2.2. Lemme. Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Étant donné

$$u = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

ses coordonnées dans $\{e_1, \ldots, e_n\}$ sont $a_1, \ldots, a_n$, appelées *coordonnées canoniques.* Par conséquent, la colonne des coordonnées canoniques de u coïncide avec u.

Plus généralement, on a la notion suivante.

4.2.3. Définition. Soient $\{u_1, \ldots, u_n\}$ une base de E et $\{v_1, \ldots, v_m\}$ une famille ordonnée de vecteurs de E. Si A_j est la colonne des coordonnées de v_j dans $\{u_1, \ldots, u_n\}$, $j = 1, \ldots, m$, alors la matrice

$$(A_1 \cdots A_m) \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$$

s'appelle *matrice des coordonnées* de $\{v_1, \ldots, v_m\}$ dans $\{u_1, \ldots, u_n\}$, notée $P_{\{u_1,\ldots,u_n\}}^{\{v_1,\ldots,v_m\}}$.

Remarque. (1) $P_{\{u_1,\ldots,u_n\}}^{\{v\}}$ est la colonne des coordonnées de v dans $\{u_1, \ldots, u_n\}$.
(2) En considérant $(v_1, \ldots, v_m)$ et $(u_1, \ldots, u_n)$ comme des matrices-ligne, on a

$$(v_1, \ldots, v_m) = (u_1, \ldots, u_n)P_{\{u_1,\ldots,u_n\}}^{\{v_1,\ldots,v_m\}}.$$

Ceci est illustré par le diagramme suivant:

$$\{u_1, \cdots, u_n\} \xrightarrow{P_{\{u_1,\ldots,u_n\}}^{\{v_1,\ldots,v_m\}}} \{v_1, \cdots, v_m\}.$$

Exercice. Considérer la base de $\mathbb{R}^2$ suivante:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Trouver la famille $\{v_1, v_2, v_3\} \subseteq \mathbb{R}^2$, dont la matrice des coordonnées dans $\{u_1, u_2\}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution. D'après l'hypothèse, on a

$$(v_1, v_2, v_3) = (u_1, u_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire,

$$v_1 = 1 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}; v_2 = 2 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}; v_3 = 1 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le résultat suivant est une conséquence immédiate du lemme 4.2.2.

4.2.4. Lemme. Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Si $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$, alors

$$P_{\{e_1,\ldots,e_n\}}^{\{v_1,\ldots,v_m\}} = (v_1 \cdots v_m).$$

Exercice. Considérer les vecteurs

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

et poser $v_1 = u_1 - u_2;\ v_2 = u_2 - u_3;\ v_3 = u_1 - u_3;\ v_4 = u_3$.

(1) En sachant que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, trouver $P_{\{u_1,u_2,u_3\}}^{\{v_1,v_2,v_3,v_4\}}$.

(2) Considérant la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$, trouver $P_{\{e_1,e_2,e_3\}}^{\{v_1,v_2,v_3,v_4\}}$.

Solution. (1) On cherche les coordonnées de v_i dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$. Mais, d'après l'hypothèse, on voit aisément que

$$\begin{array}{rcrcrcr} v_1 & = & 1 \cdot u_1 & + & (-1) \cdot u_2 & + & 0 \cdot u_3 \\ v_2 & = & 0 \cdot u_1 & + & 1 \cdot u_2 & + & (-1) \cdot u_3 \\ v_3 & = & 1 \cdot u_1 & + & 0 \cdot u_2 & + & (-1) \cdot u_3 \\ v_4 & = & 0 \cdot u_1 & + & 0 \cdot u_2 & + & 1 \cdot u_3 \end{array}$$

D'où,

$$P_{\{u_1,u_2,u_3\}}^{\{v_1,v_2,v_3,v_4\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) On doit trouver les coordonnées canoniques de chacun des v_i. D'après l'hypothèse, on trouve

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

D'après le lemme 4.2.4, on a

$$P_{\{e_1,e_2,e_3\}}^{\{v_1,v_2,v_3,v_4\}} = (v_1\, v_2\, v_3\, v_4) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le résultat suivant nous dit comment déterminer si une famille de vecteurs est une base ou non en utilisant sa matrice des coordonnées dans une base connue.

4.2.5. Théorème. Si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est une base de E, alors n vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ de E forment une base si, et seulement si, $P_{\{u_1,\ldots,u_n\}}^{\{v_1,\ldots,v_n\}}$ est inversible.

4.2.6. Corollaire. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, alors les colonnes de A forment une base de $\mathbb{R}^n$ si, et seulement si, A est inversible.

Démonstration. Posons $A = (A_1 \cdots A_n)$, où $A_j \in \mathbb{R}^n$. Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. D'après le lemme 4.2.4, on a

$$P_{\{e_1,\ldots,e_n\}}^{\{A_1,\ldots,A_n\}} = (A_1 \cdots A_n) = A.$$

D'après le théorème 4.2.5, $\{A_1 \ldots A_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ si, et seulement si, A est inversible. La preuve du corollaire s'achève.

Exemple. Considérons la matrice suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Comme $\mathrm{rg}(A) = 3$, la matrice A est inversible. Par conséquent, $\mathbb{R}^3$ a une base comme suit:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercice. Considérons les vecteurs

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Déterminer si $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ ou non.

Solution. Posons

$$A = (u_1 u_2 u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

ce qui s'échelonne à

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Étant de rang 2, A est non inversible. D'après le corollaire 4.2.6, $\{u_1, u_2, u_3\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.

On étudiera la matrice des coordonnéees d'une base dans une autre base.

4.2.7. Définition. Soient $\{u_1, \ldots, u_n\}$ et $\{v_1, \ldots, v_n\}$ deux bases de E. La *matrice de passage* de $\{u_1, \ldots, u_n\}$ à $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est définie comme étant

$$P_{\{u_1,\ldots,u_n\}}^{\{v_1,\ldots,v_n\}},$$

c'est-à-dire, la matrice des coordonnées de la famille $\{v_1, \ldots, v_n\}$ dans la base $\{u_1, \ldots, u_n\}$.

Remarque. D'après le théorème 4.2.5, $P_{\{u_1,\ldots,u_n\}}^{\{v_1,\ldots,v_n\}}$ est inversible telle que

$$(v_1, \ldots, v_n) = (u_1, \ldots, u_n) P_{\{u_1,\ldots,u_n\}}^{\{v_1,\ldots,v_n\}}.$$

Ceci est illustré par le diagramme suivant:

$$\{u_1, \cdots, u_n\} \xrightarrow{P^{\{v_1,\ldots,v_n\}}_{\{u_1,\ldots,u_n\}}} \{v_1, \cdots, v_n\}.$$

Exercice. Considérons la base de $\mathbb{R}^2$ suivante:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(1) Donner les matrices de passage de $\{u_1, u_2\}$ à $\{u_1, u_2\}$ et à $\{u_2, u_1\}$ respectivement.

(2) Donner la base $\{v_1, v_2\}$ à laquelle la matrice de passage de $\{u_1, u_2\}$ est

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution. (1) Comme $u_1 = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2$ et $u_2 = 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2$, on obtient

$$P^{\{u_1,u_2\}}_{\{u_1,u_2\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad P^{\{u_2,u_1\}}_{\{u_1,u_2\}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

(2) Posons

$$(v_1, v_2) = (u_1, u_2) \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire,

$$v_1 = 2u_1 + 3u_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = 4u_1 + u_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Par définition,

$$P^{\{v_1,v_2\}}_{\{u_1,u_2\}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} := P$$

Comme $\det(P) = -10$, on voit que P est inversible. D'après le théorème 4.2.5, $\{v_1, v_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Par définition, la matrice de passage de $\{u_1, u_2\}$ à $\{v_1, v_2\}$ est P.

Le résultat suivant est une conséquence immédiate du lemme 4.2.4.

4.2.8. Lemme. Si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, alors la matrice de passage de la base canonique $\{e_1, \ldots, e_n\}$ à $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est $(u_1 \cdots u_n)$.

Exemple. Considérons la base de $\mathbb{R}^3$ suivante:

$$\left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}.$$

D'après 4.2.8, la matrice de passage de la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ à cette base $\{A_1, A_2, A_3\}$ est simplement

$$(A_1\, A_2\, A_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

D'après le lemme 4.2.2, c'est trivial de trouver les coordonnées d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$ dans la base canonique. Le résultat suivant nous dit comment trouver les coordonnées d'un vecteur dans une base non canonique au moyen de la matrice de passage.

4.2.9. Théorème. Soient $\{u_1, \ldots, u_n\}$ et $\{v_1, \ldots, v_n\}$ deux bases de E. Soit P la matrice de passage de $\{u_1, \cdots, u_n\}$ à $\{v_1, \cdots, v_n\}$. Si $w_1, \ldots, w_m \in E$ avec $A = P_{\{u_1,\ldots,u_n\}}^{\{w_1,\ldots,w_m\}}$, alors

$$P_{\{v_1,\ldots,v_n\}}^{\{w_1,\ldots,w_m\}} = P^{-1}A.$$

Remarque. Le théorème 4.2.9 est illustré par le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
\{u_1, \cdots, u_n\} \arrow[r, "P"] \arrow[dr, "A"'] & \{v_1, \cdots, v_n\} \arrow[d, dotted, "P^{-1}A"] \\
& \{w_1, \ldots, w_m\}.
\end{tikzcd}$$

Exercice. (1) Montrer que le jaune J, le magenta M, le cyant C forment une base de $\mathbb{R}^3$.

(2) Déterminer si l'on peut mélanger le jaune, le magenta et le cyant pour obtenir la couleur

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Solution. (1) On sait que

$$J = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'après le lemme 4.2.4, on a

$$P_{\{e_1,e_2,e_3\}}^{\{J,M,C\}} = (J\, M\, C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} := P.$$

Comme $\det(P) = -2$, on voit que P est inversible. D'après le théorème 4.2.5, $\{J, M, C\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(2) En vue de la proposition 4.1.5, la couleur D est obtenue en mélangeant J, M, C si, et seulement si,

$$D = a_1 J + a_2 M + a_3 C, \text{ avec } 0 \leq a_1, a_2, a_3 \leq 1.$$

Ainsi, on doit trouver les coordonnées de D dans la base $\{J, M, C\}$. D'après le théorème 4.2.9, on considère le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \{e_1, e_2, e_3\} \arrow[r, "P"] \arrow[dr, "A"'] & \{J, M, C\} \arrow[d, dotted, "P^{-1}A"] \\ & A. \end{tikzcd}$$

C'est-à-dire, la colonne des coordonnées de D dans $\{J, M, C\}$ est $P^{-1}A$. Pour ce calculer, on échelonne $(P \mid D)$ comme suit:

$$(P \mid D) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{4} \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \end{array} \right).$$

Donc,

$$P_{\{J,M,C\}}^{\{D\}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire,

$$D = \frac{1}{2}J + \frac{1}{2}M - \frac{1}{4}C.$$

Comme $-\frac{1}{4} < 0$, d'après la proposition 4.1.5, on ne peut pas obtenir la couleur D en mélangeant le jaune, le magenta, et le cyan.

Le résultat suivant donne une méthode pour trouver la matrice de passage entre deux bases quelconques.

4.2.10. Théorème. Soient $\{u_1, \ldots, u_n\}$, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ et $\{w_1, \ldots, w_n\}$ des bases de E. Soient P, Q les matrices de passage de $\{u_1, \ldots, u_n\}$ à $\{v_1, \ldots, v_n\}$ et à $\{w_1, \ldots, w_n\}$, respectivement.

(1) La matrice de passage de $\{v_1, \ldots, v_n\}$ à $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est P^{-1}.

(2) La matrice de passage de $\{v_1, \ldots, v_n\}$ à $\{w_1, \ldots, w_n\}$ est $P^{-1}Q$.

Remarque. Le théorème 4.2.10(2) est illustré par le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd} \{u_1, \ldots, u_n\} \arrow[r, "P"] \arrow[dr, "Q"'] & \{v_1, \ldots, v_n\} \arrow[d, dotted, "P^{-1}Q"] \\ & \{w_1, \ldots, w_n\} \end{tikzcd}$$

Exercice. Considérons deux bases $\{u_1, u_2, u_3\}$ et $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, où

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Trouver la matrice de passage de $\{u_1, u_2, u_3\}$ à $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Solution. Les matrices de passage de $\{e_1, e_2, e_3\}$ à $\{u_1, u_2, u_3\}$ et à $\{v_1, v_2, v_3\}$ sont respectivement

$$P = (u_1\, u_2\, u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = (v_1\, v_2\, v_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème 4.2.10(2), la matrice de passage de $\{u_1, u_2, u_3\}$ à $\{v_1, v_2, v_3\}$ est $P^{-1}Q$. En échelonnant $(P \mid Q)$, on trouve

$$P^{-1}Q = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ceci signifie que

$$\begin{array}{rcrcrcr} v_1 & = & 5u_1 & - & 4u_2 & + & u_3 \\ v_2 & = & 2u_1 & - & 2u_2 & + & u_3 \\ v_3 & = & 4u_1 & - & 3u_2 & + & u_3. \end{array}$$

4.3. Sous-espaces vectoriels

Le but de cette section est d'étudier des sous-ensembles particuliers d'un espace vectoriel, appelés *sous-espaces vectoriels*. Un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est toujours relié à une matrice.

Partout dans cette section, on se fixe E un espace vectoriel réel.

4.3.1. Définition. Un sous-ensemble non vide F de E s'appelle *sous-espace vectoriel* si les conditions suivantes sont vérifiées.

(1) Si $u \in F$ et $a \in \mathbb{R}$, alors $au \in F$.

(2) Si $u, v \in F$, alors $u + v \in F$.

Exemple. (1) L'ensemble $\{0_E\}$ et E sont deux sous-espaces vectoriels de E, appelés *sous-espaces triviaux*.

(2) L'ensemble des couleurs numériques n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En effet, il n'est pas stable pour l'addition.

Exercice. Vérifier que le plan $P_{x,y}$ des x, y de $\mathbb{R}^3$ est un sous-espace vectoriel.

Démonstration. Par définition, on a

$$P_{x,y} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pour tous

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{pmatrix} \in P_{x,y},$$

et tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$au = \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ 0 \end{pmatrix}, u + v = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ 0 \end{pmatrix} \in P_{x,y}.$$

D'où, $P_{x,y}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

On rassemble des propriétés d'un sous-espace vectoriel dans le résultat suivant.

4.3.2. Lemme. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Les énoncés suivants sont valides.

(1) $0_E \in F$.

(2) Si $u \in F$, alors $-u \in F$.

(3) Si $u_1, \ldots, u_r \in F$, alors $a_1u_1 + \cdots + a_ru_r \in F$, pour tous $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$.

Remarque. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F lui-même est un espace vectoriel réel pour les opérations induites de celles de E comme suit:

$$\cdot : \mathbb{R} \times F \to F : (a, u) \mapsto au$$

et

$$+ : F \times F \to F : (u, v) \mapsto u + v.$$

En particulier, $0_F = 0_E$.

Exemple. Considérons la droite affine de $\mathbb{R}^2$ suivante:

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1 \right\}.$$

Il ne s'agit d'un sous-espace vectoriel, puisque $\mathbf{0} \notin D$.

4.3.3. Proposition. Soit $\dim(E) = n \geq 0$. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors
(1) $\dim(F) \leq n$;
(2) $\dim(F) < n$ lorsque $F \neq E$.

Remarque. Un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ s'appelle
(1) *droite vectorielle* si $\dim(F) = 1$;
(2) *plan vectoriel* si $\dim(F) = 2$.

Exemple. (1) Soit F un sous-espace vectoriel non trivial de $\mathbb{R}^2$. Alors

$$\dim\{0_{\mathbb{R}^2}\} < \dim(F) < \dim(\mathbb{R}^2).$$

D'où, $0 < \dim(F) < 2$, et donc, $\dim(F) = 1$. C'est-à-dire, F est une droite vectorielle.

(2) Soit F un sous-espace vectoriel non trivial de $\mathbb{R}^3$. Alors

$$\dim\{0_{\mathbb{R}^3}\} < \dim(F) < \dim(\mathbb{R}^3).$$

D'où, $0 < \dim(F) < 3$, et donc, $\dim(F) = 1$ ou 2. C'est-à-dire, F est une droite vectorielle ou un plan vectoriel.

4.3.4. Proposition. Si $u_1, \ldots, u_r \in E$, alors l'ensemble

$$< u_1, \ldots, u_r > := \{a_1 u_1 + \cdots + a_r u_r \mid a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}\}$$

est un sous-espace vectoriel de E, appelé *sous-espace vectoriel engendré* par $u_1, \ldots, u_r$. En outre, on appelle $\{u_1, \ldots, u_n\}$ un *ensemble générateur* de $< u_1, \ldots, u_r >$.

Remarque. (1) Par définition, $u_1, \ldots, u_r \in < u_1, \ldots, u_r >$.

(2) Dans cette terminologie, une famille $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de vecteurs de E est une base de E si, et seulement si, elle est libre et un ensemble générateur de E.

(3) Si $r = 1$, alors $< u_1 >= \{a u_1 \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Exercice. Calculer le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ engendré par

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Solution. Par définition, on a

$$F =< e_1, e_2 >= \{xe_1 + ye_2 \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\},$$

ce qui est le plan des x, y de $\mathbb{R}^3$.

Le résultat suivant sera pratique dans le calcul.

4.3.5. Proposition. Soient $u_1, \ldots, u_{r-1}, u_r \in E$. Si u_r est une combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_{r-1}$, alors

$$< u_1, \ldots, u_{r-1}, u_r >=< u_1, \ldots, u_{r-1} > .$$

Exemple. Soient

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Comme $u_4 = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$ et $u_3 = u_1 + u_2$, d'après la proposition 4.3.5, on a

$$< u_1, u_2, u_3, u_4 >=< u_1, u_2, u_3 >=< u_1, u_2 >= \left\{ \begin{pmatrix} x + y \\ 2x + 2y \\ 3x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

On étudiera comment trouver une base d'un sous-espace vectoriel à partir de son ensemble générateur. Le résultat suivant est evident.

4.3.6. Lemme. Si F est un sous-espace vectoriel de E engendré par $u_1, \ldots, u_r$, alors $\{u_1, \ldots, u_r\}$ est une base de F si, et seulement si, $\{u_1, \ldots, u_r\}$ est libre.

Exemple. (1) Si $u \in \mathbb{R}^n$ est non nul, alors

$$< u >= \{au \mid a \in \mathbb{R}\}$$

est une droite vectorielle. En effet, comme u est non nul, $\{u\}$ est libre. D'après le lemme 4.3.6, $\{u\}$ est une base de $< u >$. En particulier, $\dim < u >= 1$.

(2) Si $u, v \in \mathbb{R}^n$ sont non co-linéaires, alors

$$< u, v >= \{au + bv \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

est un plan vectoriel. En effet, comme u, v ne se trouvent pas dans la même droite vectorielle, aucun de u, v n'est un multiple de l'autre. D'après le lemme 4.1.9, $\{u, v\}$ est libre; et d'après le lemme 4.3.6, $\{u, v\}$ est une base de $< u, v >$. En particulier, $\dim < u, v >= 2$.

On va étudier deux sous-espaces associés à une matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

4.3.7. Définition. Soit $A = (A_1 \cdots A_n) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, où $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}^m$. Le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$ engendré par $A_1, \ldots, A_n$ s'appelle *espace-colonne* de A, noté $\mathcal{C}(A)$.

Remarque. Tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est l'espace-colonne d'une matrice.

Exemple. (1) Considérons

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (e_1\, e_2).$$

Par définition, on a

$$\mathcal{C}(I_2) =< e_1, e_2 >= \{xe_1 + ye_2 \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2.$$

(2) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 10 \\ 3 & 4 & 7 & 14 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\mathcal{C}(A) =< \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix} >\subseteq \mathbb{R}^3.$$

Utilisant la notion d'espace-colonne de matrice, on obtient une interpretation alternative de la compatibilité d'un système d'équations linéaires comme suit.

4.3.8. Proposition. Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, alors
(1) $\mathcal{C}(A) = \{Au \mid u \in \mathbb{R}^n\}$;
(2) un système d'équations linéaires

$$AX = B$$

est compatible si, et seulement si, $B \in \mathcal{C}(A)$.

Exercice. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 10 \\ 3 & 4 & 7 & 14 \end{pmatrix};\ u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};\ v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer lequel de u, v appartient à $\mathcal{C}(A)$.

Solution. La question est de déterminer lequel des systèmes $AX = u$ et $AX = v$ est compatible. Au lieu d'échelonner $(A \mid u)$ et $(A \mid v)$ séparément, on échelonne $(A \mid u \mid v)$.

$$(A \mid u \mid v) = \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 2 & 3 & 6 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 10 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 7 & 14 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 2 & 3 & 6 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

D'où, on voit que

$$A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(A \mid u) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right);$$

et

$$(A \mid v) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ainsi, $\mathrm{rg}(A) \neq \mathrm{rg}(A \mid u)$, mais $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid v)$. Par conséquent, $AX = u$ est incompatible, et $AX = v$ est compatible. D'après la proposition 4.3.8(2), $u \notin \mathcal{C}(A)$ et $v \in \mathcal{C}(A)$.

On étudiera comment trouver une base de l'espace-colonne d'une matrice. Le résultat suivant est une conséquence du lemme 4.3.6 et du théorème 4.1.10.

4.3.9. Proposition. Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont $A_1, \ldots, A_n$. Comme $\mathcal{C}(A) =< A_1, \ldots, A_n >$, les conditions suivantes sont équivalentes.
(1) $A_1, \ldots, A_n$ forment une base de $\mathcal{C}(A)$.
(2) $A_1, \ldots, A_n$ sont linéairement indépendants.
(3) $\mathrm{rg}(A) = n$, le nombre de colonnes de A.

Exercice. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vérifier si les colonnes de A forment une base de $\mathcal{C}(A)$ ou non.

Solution. Comme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on a $\mathrm{rg}(A) = 3$, le nombre de colonnes de A. D'après la proposition 4.3.9, les colonnes de A forment une base de $\mathcal{C}(A)$.

On a le résultat général suivant pour trouver une base de l'espace-colonne d'une matrice.

4.3.10. Théorème. Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ de colonnes $A_1, \ldots, A_n$. Soit A' une forme échelonnée de A. Si les pivots de A' se trouvent dans les colonnes $j_1, \cdots, j_r$, alors la famille $\{A_{j_1}, \cdots, A_{j_r}\}$ est une base de $\mathcal{C}(A)$. En particulier, $\dim \mathcal{C}(A) = \mathrm{rg}(A)$.

Exercice. Trouver une base du sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$ engendré par

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Solution. Par l'hypothèse, $F = \mathcal{C}(A)$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & -4 & 0 & -6 \\ 1 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} := B$$

Les pivots de B se trouvent dans les colonnes 1 et 2. D'après le théorème 4.3.10, $\{u_1,\ u_2\}$ est une base de F.

Enfin, on revient à la résolution d'un système homogène d'équations linéaires.

4.3.11. Lemme. Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, alors l'ensemble

$$\mathcal{N}(A) := \{u \in \mathbb{R}^n \mid Au = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, appelé *noyau* de A.

Remarque. On voit que $\mathcal{N}(A)$ est l'ensemble des solutions du système homogène

$$AX = 0.$$

Pour cette raison, $\mathcal{N}(A)$ s'appelle aussi *espace-solution* de ce système homogène.

Le résultat suivant nous dit comment trouver une base du noyau d'une matrice.

4.3.12. Théorème. Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ dont A' est une forme échelonnée.

Supposons que le système homogène échelonné $A'X = 0$ n'a aucune inconnue libre. Alors $\mathcal{N}(A) = \{\mathbf{0}\}$. Par conséquent, $\mathcal{N}(A)$ a pour base l'ensemble vide.

Supposons que le système homogène échelonné $A'X = 0$ admet s inconnues libres $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s}$. Alors on le résout s fois comme suit:

(1) Posant $x_{i_1} = 1, x_{i_2} = \cdots = x_{i_s} = 0$, ce qui donne une solution u_1;

(2) Posant $x_{i_1} = 0, x_{i_2} = 1, x_{i_3} = \cdots = x_{i_s} = 0$, ce qui donne une solution u_2;

$\vdots$

(s) Posant $x_{i_1} = x_{i_2} = \cdots = x_{i_{s-1}} = 0, x_{i_s} = 1$, ce qui donne une solution u_s.

Alors $\{u_1, \ldots, u_s\}$ est une base de $\mathcal{N}(A)$.

En tout cas, $\dim \mathcal{N}(A) = s$, le nombre d'inconnues libres du système échelonné $A'X = 0$. Par conséquet, $\dim \mathcal{N}(A) = n - \operatorname{rg}(A)$.

Exercice. Trouver une base de l'espace-solution du système homogène suivant:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl}
2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & + & 3x_6 & = & 0 \\
4x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 5x_4 & + & 4x_5 & + & 7x_6 & = & 0 \\
8x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & + & 9x_4 & + & 3x_5 & + & 15x_6 & = & 0 \\
6x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 7x_4 & + & 3x_5 & + & 10x_6 & = & 0.
\end{array}$$

Solution. En échelonnant la matrice augmentée, on réduit ce système au système échelonné suivant:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl}
\boxed{2x_1} & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & + & 3x_6 & = & 0 \\
 & & & & \boxed{x_3} & + & x_4 & + & 5x_5 & - & x_6 & = & 0 \\
 & & & & & & & & \boxed{x_5} & + & 2x_6 & = & 0 \\
 & & & & & & & & & & 0 & = & 0.
\end{array}$$

Les inconnues libres sont x_2, x_4 et x_6. Ainsi l'espace-solution a une base composée de trois solutions u_1, u_2, u_3.

(1) En posant $x_2 = 1, x_4 = x_6 = 0$, on a un système sans inconnue libre

$$\begin{array}{rcrcrcr}
2x_1 & - & x_3 & - & x_5 & = & -1 \\
 & & x_3 & + & 5x_5 & = & 0 \\
 & & & & x_5 & = & 0.
\end{array}$$

En résolvant-le par substitution, on trouve $x_1 = -\frac{1}{2}, x_3 = 0$ et $x_5 = 0$. Ceci donne le premier vecteur de la base de l'espace-solution

$$u_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(2) En posant $x_2 = 0, x_4 = 1$ et $x_6 = 0$, on a un système sans inconnue libre

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_3 & - & x_5 & = & -2 \\ & & x_3 & + & 5x_5 & = & -1 \\ & & & & x_5 & = & 0. \end{array}$$

En résolvant-le par substitution, on trouve $x_1 = -\frac{3}{2}, x_3 = -1$ et $x_5 = 0$. Ceci donne le deuxième vecteur de la base de l'espace-solution

$$u_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(3) En posant $x_2 = x_4 = 0$ et $x_6 = 1$, on a un système sans inconnue libre

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_3 & - & x_5 & = & -3 \\ & & x_3 & + & 5x_5 & = & 1 \\ & & & & x_5 & = & -2. \end{array}$$

En résolvant-le par substitution, on trouve $x_1 = 3, x_3 = 11$ et $x_5 = -2$. Ceci donne le troisième vecteur de la base de l'espace-solution

$$u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 11 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En conclusion, on obtient une base de l'espace-solution du système original comme suit:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 11 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

4.4. Sous-espaces affines

On a étudié les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ dans la section précédente. Cette section a pour but d'étudier les sous-espaces affines de $\mathbb{R}^n$, un autre genre de sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$. On commence par la notion de coordonnées homogènes, ce qui est important en infographie.

4.4.1. Définition. Soit un vecteur

$$u = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Un vecteur

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

s'appelle *vecteur de coordonnées homogènes* de u si $x_{n+1} \neq 0$ et

$$\begin{pmatrix} \frac{x_1}{x_{n+1}} \\ \vdots \\ \frac{x_n}{x_{n+1}} \end{pmatrix} = u.$$

Remarque. (1) On peut retrouver u à partir de ses coordonnées homogènes.

(2) En particulier, u a pour vecteur de coordonnées homogènes

$$\hat{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ 1 \end{pmatrix},$$

appelé *vecteur des coordonnées homogènes normalisées* de u.

Exercice. (1) Trouver le vecteur $u \in \mathbb{R}^2$ dont

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

est un vecteur de coordonnées homogènes.

(2) Donner le vecteur des coordonnées homogènes normalisées du vecteur nul $\mathbf{0}$ de $\mathbb{R}^3$.

Solution. (1) Par définition, on a

$$u = \begin{pmatrix} \frac{2}{-3} \\ \frac{-1}{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

(2) Par définition, on a

$$\hat{\mathbf{0}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Remarquons que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

sont aussi des vecteurs de coordonnées homogènes de $\mathbf{0}$.

Le résultat suivant décrit l'ensemble des vecteurs de coordonnées homogènes d'un vecteur donné.

4.4.2. Lemme. Soit un vecetur

$$u = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

(1) Si $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ est un vecteur de coordonnées homogènes de u, alors $w \in \mathbb{R}^{n+1}$ est aussi un vecteur de coordonnées homogènes de u si, et seulement si, $w = av$ avec $a \neq 0$.

(2) L'ensemble des vecteurs de coordonnées homogènes de v est

$$\left\{ \begin{pmatrix} aa_1 \\ \vdots \\ aa_n \\ a \end{pmatrix} \mid 0 \neq a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice. Soient

$$v = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -15 \\ 9 \\ -21 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

(1) Vérifier que v, w sont des vecteurs de coordonnées homogènes du même vecteur.

(2) Écrire $w = av$ avec a non nul.

Solution. Par definition, v est un vecteur de coordonnées homogènes du vecteur

$$\begin{pmatrix} \frac{10}{2} \\ -\frac{6}{2} \\ \frac{14}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} =: u$$

et w est un vecteur de coordonnées homogènes du vecteur

$$\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{9}{3} \\ -\frac{21}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} = u.$$

En outre, on voit que $v = 2\hat{u}$ et $w = (-3)\hat{u}$. Par conséquent, $w = -\frac{3}{2}v$.

On définira la notion de dépendance affine de vecteurs en termes de la dépendance linéaire de leurs vecteurs de coordonnées homogènes normalisées.

4.4.3. Définition. Des vecteurs $u_1, \ldots, u_r \in \mathbb{R}^n$ sont dits

(1) *affinement dépendants*, ou bien, $\{u_1, \ldots, u_r\}$ est *affinement liée*, si $\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_r$ sont linéairement dépendants dans $\mathbb{R}^{n+1}$;

(2) *affinement indépendants*, ou bien $\{u_1, \ldots, u_r\}$ est *affinement libre*, si $\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_r$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

Remarque. Comme $\dim(\mathbb{R}^{n+1}) = n+1$, d'après le théorème 4.1.15(2), toute famille affinement libre de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ contient au plus $n+1$ vecteurs.

Exemple. D'après le lemme 4.1.9(1), toute famille d'un vecteur est affinement libre.

Exercice. Soient

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Déterminer si $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ est affinement liée ou affinement libre.

Solution. Le problème se ramène à déterminer si $\{\hat{u}_1,\ \hat{u}_2,\ \hat{u}_3,\ \hat{u}_4\}$ est liée ou libre dans $\mathbb{R}^4$. Pour ce faire, on échelonne

$$A = (\hat{u}_1\, \hat{u}_2\, \hat{u}_3\, \hat{u}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 8 \\ 7 & 6 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $\mathrm{rg}(A) = 3 < 4$, d'après le théorème 4.1.10(3), $\{\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3, \hat{u}_4\}$ est liée dans $\mathbb{R}^4$. Par définition, $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ est affinement liée dans $\mathbb{R}^3$.

4.4.4. Proposition. Soient $u_1, \ldots, u_r; u \in \mathbb{R}^n$ avec $\{u_1, \ldots, u_r\}$ affinement libre. Pour tous $c_1, \cdots, c_r \in \mathbb{R}$, on a que

$$u = c_1 u_1 + \cdots + c_r u_r \text{ et } c_1 + \cdots + c_r = 1$$

si, et seulement si,

$$\hat{u} = c_1\hat{u}_1 + \cdots + c_r\hat{u}_r.$$

Dans ce cas, u s'appelle *barycentre* de $u_1, \ldots, u_r$; et $c_1, \ldots, c_r$ s'appellent *coordonnées barycentriques* de u dans $\{u_1, \ldots, u_r\}$.

Remarque. Un vecteur u est un barycentre de $u_1, \ldots, u_r$ dans $\mathbb{R}^n$ si, et seulement si, $\hat{u}$ est une combinaison linéaire de $\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_r$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

Exercice. Soient

$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Vérifier que

(1) $\{u_1, u_2, u_3\}$ est affinement libre;

(2) u est un barycentre de u_1, u_2, u_3, en donnant les coordonnées barycentriques.

Solution. On devra résoudre l'équation suivante:

$$x_1\hat{u}_1 + x_2\hat{u}_2 + x_3\hat{u}_3 = \hat{u},$$

c'es-à-dire, le système

$$(\hat{u}_1\, \hat{u}_2\, \hat{u}_3)X = \hat{u}.$$

Comme

$$(\hat{u}_1\, \hat{u}_2\, \hat{u}_3 \mid \hat{u}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

on obtient

$$\hat{u} = \frac{3}{2}\hat{u}_1 - \hat{u}_2 + \frac{1}{2}\hat{u}_3.$$

Ainsi u est un barycentre de u_1, u_2, u_3, dont les coordonnées barycentriques sont $\frac{3}{2}, -1, \frac{1}{2}$. C'est-à-dire,

$$u = \frac{3}{2}u_1 - u_2 + \frac{1}{2}u_3 \ \text{ et } \ \frac{3}{2} + (-1) + \frac{1}{2} = 1.$$

On étudiera les sous-espaces affines. Pour ce but, on identifiera un vecteur de $\mathbb{R}^n$ avec son point d'arrivée.

4.4.5. Proposition. Si $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n$, alors $\{u_1, u_2\}$ est affinement libre si, et seulement si, $u_1 \neq u_2$; et dans ce cas, l'ensemble des barycentres de u_1, u_2 est

$$\{(1-t)u_1 + tu_2 \mid t \in \mathbb{R}\} =: D(u_1, u_2),$$

ce qui est la droite affine passant par u_1, u_2. En outre, le segment d'extrémités u_1, u_2 est donné par

$$\{(1-t)u_1 + tu_2 \mid 0 \le t \le 1\} =: \delta(u_1, u_2).$$

Exercice. Soit D la droite affine de $\mathbb{R}^2$ qui passe par les points suivants:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(1) Trouver une équation affine de D.
(2) Trouver les équations paramétriques de D.

Solution. On considère un vecteur quelconque

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

(1) On voit que $u \in D$ si, et seulement si, u est un barycentre de u_1, u_2 si, et seulement si, $\hat{u}$ est une combinaison linéaire de $\hat{u}_1, \hat{u}_2$ si, et seulement si, $\mathrm{rg}(\hat{u}_1\, \hat{u}_2) = \mathrm{rg}(\hat{u}_1\, \hat{u}_2 \mid \hat{u})$. Maintenant,

$$(\hat{u}_1\, \hat{u}_2 \mid \hat{u}) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & x \\ 1 & 5 & y \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|l} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & x-2 \\ 0 & 0 & 2x-y-3 \end{array}\right).$$

Par conséquent, $u \in D$ si, et seulement si,

$$2x - y - 3 = 0.$$

ce qui s'appelle *équation affine* de D.

(2) De l'autre côté, $u \in D$ si, et seulement si, $u = tu_1 + (1-t)u_2$, $t \in \mathbb{R}$. C'est-à-dire,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1-t)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t+2 \\ 4t+1 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}.$$

D'où,

$$\begin{array}{rcrcl} x & = & 2t & + & 2 \\ y & = & 4t & + & 1; \quad t \in \mathbb{R}, \end{array}$$

ce qui s'appellent *équations paramétriques* de D.

Exercice. Considérer les vecteurs

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Vérifier que u appartient à la droite affine passant par u_1, u_2, mais n'appartient pas au segment d'extrémités u_1, u_2.

Solution. Comme

$$(\hat{u}_1\,\hat{u}_2 \mid \hat{u}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

les coordonnées barycentriques de u dans $\{u_1, u_2\}$ sont $\{2, -1\}$. Ainsi, u appartient à la droite passant par u_1, u_2. Comme $2, -1$ ne sont pas compris entre 0 et 1, u n'appartient pas au segment d'extrémités u_1, u_2.

Maintenant, on étudiera l'indépendance affine de trois vecteurs.

4.4.6. Proposition. Si $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^n$, alors $\{u_1, u_2, u_3\}$ est affinement libre si, et seulement si, u_1, u_2, u_3 n'appartiennent pas à une même droite affine; et dans ce cas, l'ensemble des barycentres de u_1, u_2, u_3 est

$$\{(1-s-t)u_1 + su_2 + tu_3 \mid s, t \in \mathbb{R}\} =: P(u_1, u_2, u_3),$$

ce qui est le plan affine passant par u_1, u_2, u_3. En outre, le triangle de sommets u_1, u_2, u_3 est

$$\{(1-s-t)u_1 + su_2 + tu_3 \mid 0 \le s, t, s+t \le 1\} =: \Delta(u_1, u_2, u_3).$$

Exercice. Soient

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(1) Vérifier que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est affinement libre.

(2) Donner une équation affine du plan affine P passant par u_1, u_2, u_3.

(3) Trouver les équations paramétriques de P.

Solution. Soit un vecetur quelconque

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Pour les parties (1) et (2), on doit échelonner les matrices $(\hat{u}_1\,\hat{u}_2\,\hat{u}_3)$ et $(\hat{u}_1\,\hat{u}_2\,\hat{u}_3 \mid u)$. Pour ce faire, on échelonne la matrice $(\hat{u}_1\,\hat{u}_2\,\hat{u}_3 \mid u)$ comme suit:

$$(\hat{u}_1\,\hat{u}_2\,\hat{u}_3 \mid u) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & x \\ 3 & 7 & 4 & y \\ 7 & 6 & 7 & z \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|l} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & x-1 \\ 0 & 0 & 1 & x+z-8 \\ 0 & 0 & 0 & x+y+5z-39 \end{array}\right) \qquad (*)$$

(1) D'après $(*)$, on voit que $(\hat{u}_1\,\hat{u}_2\,\hat{u}_3)$ se réduit à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où, $\mathrm{rg}(\hat{u}_1\,\hat{u}_2\,\hat{u}_3) = 3$. Donc $\{\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3\}$ est libre dans $\mathbb{R}^4$. Par conséquent, $\{u_1, u_2, u_3\}$ est affinement libre dans $\mathbb{R}^3$.

(2) D'après $(*)$, on voit que $(\hat{u}_1\,\hat{u}_2\,\hat{u}_3 \mid \hat{u})$ se réduit à

$$\left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & x-1 \\ 0 & 0 & 1 & x+z-8 \\ 0 & 0 & 0 & x+y+5z-39 \end{array}\right)$$

Or $u \in P$ si, et seulement si, u est un barycentre de u_1, u_2, u_3 si, et seulement si, $\hat{u}$ est une combinaison linéaire de $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3$ si, et seulement si, $\mathrm{rg}(\hat{u}_1\,\hat{u}_2\,\hat{u}_3) = \mathrm{rg}(\hat{u}_1\,\hat{u}_2\,\hat{u}_3 \mid \hat{u})$ si et seulement si

$$x + y + 5z = 39,$$

ce qui est une équation affine de P.

(3) Soit un vecetur quelconque

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Alors u appartient à P si, et seulement si,

$$u = (1-s-t)u_1 + su_2 + tu_3;\; s, t \in \mathbb{R}.$$

C'est-à-dire,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+s-t \\ 3+4s+t \\ 7-s \end{pmatrix};\; s, t \in \mathbb{R}.$$

ou bien,

$$\begin{array}{rcll} x & = & s-t+1; & \\ y & = & 4s+t+3; & \\ z & = & -s+7; & \qquad s, t \in \mathbb{R}, \end{array}$$

ce qui sont les *équations paramétriques* de P.

On conclut cette section par une application de coordonnées barycentriques en imagerie, qui donne une méthode pour colorier un triangle d'une façon lisse.

4.4.7. Théorème. Soit Δ un triangle coloré de sommets u_1, u_2, u_3 auxquels les couleurs sont C_1, C_2, C_3 respectivement. Si $u \in \Delta$ dont les coordonnées barycentriques dans $\{u_1, u_2, u_3\}$ sont a_1, a_2, a_3 respectivement, alors la couleur C à u sera donnée par

$$C = a_1 C_1 + a_2 C_2 + a_3 C_3.$$

Exercice. Considérer

$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Soit Δ un triangle coloré de sommets u_1, u_2, u_3 auxquels les couleurs sont le magenta $\{1; 0; 1\}$, le magenta claire $\{1; 0,4; 1\}$, et le pourpre $\{0,6; 0; 1\}$ respectivement.

(1) Vérifier que $u \in \Delta$.

(2) Donner la couleur C à u.

Solution. (1) Il s'agit de vérifier que $\hat{u}$ est une combinaison linéaire de $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3$ à coefficients entre 0 et 1. Pour ce faire, on échelonne

$$(\hat{u}_1\, \hat{u}_2\, \hat{u}_3 \mid \hat{u}) = \left(\begin{array}{ccc|r} 3 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 3,5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

D'où,

$$u = \frac{1}{4} u_1 + \frac{1}{2} u_2 + \frac{1}{4} u_3.$$

Par conséquent, $u \in \Delta$ dont les coordonnées barycentrique dans $\{u_1, u_2, u_3\}$ sont $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$.
(2) D'après la proposition 4.4.7,

$$C = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0,4 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0,6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 \\ 0,2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire, C se compose 90% du rouge, 20% du vert, et 100% du bleu.

4.5. Exercices

1. Montrer qu'un espace vectoriel réel non nul contient une infinité de vecteurs.

2. Soit D une couleur obtenue en mélangeant 20% du blanc, 25% du magenta, 30% du gris et 10% du pourpre.

(1) Exprimer la colonne des coordonnées RVB de la couleur D comme combinaison linéaire des colonnes des coordonnées du blanc, du magenta, du gris et du pourpre.

(2) Donner les coordonnées RVB de la couleur D.

3. Considérer les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; u = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; v = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

À l'aide de la proposition 4.1.6 et du théorème 4.1.7, déterminer lequel de u et v est une combinaison linéaire de u_1, u_2, u_3; et donner une expression explicite dans le cas échéant.

4. Considérer les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants:

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ a \\ b \end{pmatrix}, \ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donner les valeurs réelles de a et b pour que u soit une combinaison linéaire de v_1 et v_2.

5. Considérer les vecteurs de $\mathbb{R}^5$ suivants:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 5 \\ 31 \\ 24 \\ -7 \\ 11 \end{pmatrix}; v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(1) Exprimer u, à l'aide de la proposition 4.1.6, comme une combinaison linéaire de u_1, u_2 et u_3.

(2) Déterminer, à l'aide du théorème 4.1.7, si v est une combinaison linéaire de u_1, u_2, u_3 ou non.

(3) Vérifier, à l'aide du théorème 4.1.10, que la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est libre.

(4) Vérifier, à l'aide de la partie (1) et de la définition 4.1.8, que $\{u_1, u_2, u_3, u\}$ est liée.

6. (1) Montrer qu'aucune des couleurs blanc, cyan et magenta ne peut être obtenue en mélangeant deux autres. *Indice*: Vérifier que leurs colonnes des coordonnées RVB sont linéairement indépendantes.

(2) Déterminer si l'on peut obtenir le pourpre en mélangeant le blanc, le cyan et le magenta.

(3) Déterminer si l'on peut obtenir le blanc en mélangeant le jaune, le magenta et le cyan; et si oui, donner l'intensité de chacune de ces trois couleurs?

7. Considérer les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; u = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -7 \\ a \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer si $\{u_1, u_2, u_3\}$ est liée ou libre.

(2) Donner la valeur réelle de a pour que u soit une combinaison linéaire de u_1, u_2, u_3; et dans ce cas, exprimer u comme une combinaison linéaire de u_1, u_2, u_3.

8. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont linéairement dépendants ou indépendants:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 4 \\ 23 \end{pmatrix}; \qquad (2) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

9. Considérer les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(1) Vérifier, à l'aide du théorème 4.1.10, que $\{u_1, u_2\}$ est libre.

(2) Montrer que $\{u_1, u_2\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$ en donnant, à l'aide du théorème 4.1.7(3), un vecteur qui n'est pas une combinaison linéaire de u_1, u_2.

10. Considérer les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(1) Vérifier, d'après la définition 4.1.12(1), que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. *Indice*: Appliquer les théorèmes 4.1.10(3) et 4.1.7(3).

(2) Donner la colonne des coordonnées de u dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$, en appliquant le lemme 4.1.6 pour exprimer u comme une combinaison linéaire de u_1, u_2, u_3.

11. Considérer les couleurs numériques suivantes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

(1) Vérifier que les vecteurs M, B, C forment une base de $\mathbb{R}^3$.

(2) Laquelle de A, D peut être obtenue en mélangeant M, B et C? Dans le cas échéant, donner l'intensité de chacune de ces trois couleurs.

12. Soit E un espace vectoriel réel avec des vecteurs linéairement indépendants u_1, u_2, u_3. Montrer, d'après la définition 4.1.8(2), que $\{v_1 = 3u_1,\ v_2 = 2u_1 - u_2, v_3 = u_1 + u_3\}$ est libre.

13. Soit $\{u_1, u_2, u_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$. Soient $v_1 = a_1u_1; v_2 = a_2u_2; v_3 = a_3u_3$ avec $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$.

(1) Donner la matrice des coordonnées de $\{v_1, v_2, v_3\}$ dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$.

(2) Donner, à l'aide du théorème 4.2.5, la condition pour que $\{v_1, v_2, v_3\}$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.

14. Considérer les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Donner, à l'aide du corollaire 4.2.6, la valeur réelle de a pour que $\{u_1, u_2, u_3\}$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.

15. Dans chacun des cas suivants déterminer, avec justification, si les vecteurs donnés forment une base de $\mathbb{R}^3$ ou non.

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$

(2) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix};$

(3) $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

16. Dans chacun des cas suivants déterminer, à l'aide du théorème 4.2.5, si la famille de vecteurs est une base de $\mathbb{R}^4$ ou non.

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix};$

(2) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ -2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$

17. Considérer les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; u = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Donner la matrice des coordonnées de $\{u_1, u_2, u_3\}$ dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$.

(2) Vérifier, à l'aide du théorème 4.2.5, que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(3) Donner le vecteur w dont les coordonnées dans $\{u_1, u_2, u_3\}$ sont $\{2, 3, -2\}$.

(4) Trouver, à l'aide de le théorème 4.2.9, la colonne des coordonnées de u dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$.

18. Considérer les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; u = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(1) En appliquant le théorème 4.2.5 à la matrice des coordonnées canoniques, vérifier que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(2) En utilisant la définition 4.2.1, trouver les coordonnées de u dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$.

(3) Donner $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ tels que la matrice des coordonnées de $\{v_1, v_2\}$ dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ est

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

19. Soit $\{u_1, u_2, u_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$.

(1) Trouver la colonne des coordonnées de $u_1 - u_3$ dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$.

(2) Trouver la matrice des coordonnées de $\{u_1, u_2\}$ dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$.

20. Considérer les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivants:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}; u = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}; v = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(1) Vérifier que $\{u_1, u_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

(2) Trouver, à l'aide de le théorème 4.2.9, la matrice des coordonnées de $\{u, v\}$ dans cette base.

21. Soit $\{u_1, u_2, u_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$. Dans chacun des cas suivants, trouver la matrice de passage de la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ à la base donnée:

(1) $\{u_1, u_2, u_3\}$; (2) $\{u_3, u_1, u_2\}$;

(3) $\{u_2, u_3, u_1\}$; (4) $\{u_3, u_2, u_1\}$.

22. Dans chacun de cas suivants, déterminer si le sous-ensemble donné de $\mathbb{R}^2$ est un sous-espace vectoriel ou non.

(1) $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid b = 2a \right\}$; (2) $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid b = a^2 \right\}$.

23. Donner des équations de la droite contenant le vecteur suivant:

$$u = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

24. Soit P le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par

$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Vérifier que P est un plan vectoriel.

(2) Trouver une équation de P.

25. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs suivants:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donner un vecteur $u \in \mathbb{R}^4$, qui n'appartient pas à F.

26. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs suivants:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Trouver une base de F et donner $\dim(F)$. *Indice*: Appliquer le théorème 4.3.10 à la matrice formée de ces vecteurs.

27. Soit D une droite vectorielle de $\mathbb{R}^n$. Si $u \in D$ est non nul, montrer que $\{u\}$ est une base de D.

28. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

et considérer ses vecteurs suivants:

$$v_1 = 2u_1 - u_2 + u_3,\ v_2 = u_1 - u_2 + u_3,\ v_3 = u_1 - u_3; u = 3u_1 - u_2 + 4u_3.$$

(1) Vérifier, à l'aide du lemme 4.3.6, que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de F.

(2) Donner la matrice des coordonnées de $\{v_1, v_2, v_3\}$ dans $\{u_1, u_2, u_3\}$;

(3) Vérifier, à l'aide du théorème 4.2.5, que $\{v_1, v_2, v_3\}$ est aussi une base de F.

29. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs suivants:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}; v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer si u appartient à F ou non.

(2) Donner la valeur réelle de a pour que v appartienne à F.

30. Dans chacun des cas suivants, calculer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs donnés:

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix};$ (2) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$

31. Considérer la matrice et les vecteurs suivants:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 5 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; u = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}; v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Donner une base de $\mathcal{C}(A)$.

(2) Déterminer le quel de u, v appartient à $\mathcal{C}(A)$. *Indice*: Pour les deux parties, il suffit d'échelonner $(A \mid u \mid v)$.

32. Trouver une base de $\mathcal{N}(A)$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 8 & -2 & 9 & 6 \\ -1 & 7 & 4 & 10 & 11 \\ 4 & 1 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

33. Trouver une base de l'espace-solution de chacun des systèmes homogènes suivants:

(1)
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & - & 3x_4 & + & 4x_5 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & - & 5x_3 & - & 5x_4 & + & 7x_5 & = & 0. \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & & & + & 2x_5 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & - & 3x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & - & 5x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\ 9x_1 & - & 9x_2 & + & 6x_3 & - & 16x_4 & + & 2x_5 & = & 0. \end{array}$$

34. Donner une base de la droite vectoriel ℓ définie par les équations :

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & 3y & + & z & = & 0. \end{array}$$

35. Donner une base du plan vectoriel P défini par l'équation :

$$2x - y + 5z = 0.$$

36. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les vecteurs donnés sont des coordonnées homgènes d'un même vecteur de $\mathbb{R}^3$; et si oui, donner ce vecteur.

(1) $\begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 14 \\ 21 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

37. Considérer

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(1) Vérifier que u_1, u_2, u_3, u_4 sont linéairement dépendants, mais affinement indépendants.

(2) Vérifier que tout vecteur u de $\mathbb{R}^3$ est un barycentre de u_1, u_2, u_3, u_4. *Indice*: Appliquer le théorème 4.1.15(1) à la famille $\{\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3, \hat{u}_4\}$.

38. Soient

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \; u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}; u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

(1) Vérifier que u_1, u_2, u_3 sont linéairement dépendants.

(2) Vérifier que u_1, u_2, u_3 sont affinement indépendants.

(3) Le quel de u, v est un barycentre de u_1, u_2, u_3? et dans le cas échéant, donner les coordonnées barycentriques de ce vecteur dans $\{u_1, u_2, u_3\}$.

39. Soient

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

(1) Donner l'équation de la droite affine D passant par u_1, u_2.

(2) Vérifier que u appartient à D, et donner ses coordonnées barycentriques dans $\{u_1, u_2\}$.

(3) Déterminer si u appartient au segment d'extrémités u_1 et u_2.

40. Soient

$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \; u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}; u = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(1) Vérifier que u_1, u_2, u_3 sont affinement indépendants.

(2) Trouver l'équation du plan affine P passant par u_1, u_2, u_3.

(3) Vérifier que u appartient au triangle de sommets u_1, u_2, u_3; et donner ses coordonnées barycentriques.

(4) Soit Δ un triangle coloré de sommets u_1, u_2, u_3, auxquels les couleurs sont le cyan, le jaune et le blanc respectivement. Donner la couleur à u.

Chapitre V: Applications linéaires

On a étudié des propriétés d'espaces vectoriels. Dans la plupart de cas, il est utile de relier un espace vectoriel réel à un autre par une application linéaire enter eux. Les applications linéaires jouent un rôle important dans beaucoup de branches de mathématiques ainsi que dans les sciences appliquées comme infographie.

5.1. Applications générales

Le but de cette section est d'étudier les applications entre deux ensembles généraux.

5.1.1. Définition. Soit X, Y deux ensembles. Une *application* T de X dans Y est une règle qui associe à chaque élément $x \in X$ un élément unique $T(x) \in Y$, notée

$$T : X \to Y : x \mapsto T(x).$$

On appelle X *domaine*; et Y, *codomaine*, de T. En outre, si $y = T(x)$, on appelle alors y *image* de x par T; et x, *pré-image* de y.

Exemple. (1) Pour tout ensemble X, on a l'*application identité* comme suit:

$$\mathbb{1}_X : X \to X : x \mapsto x.$$

Par exemple, l'application identité de $\mathbb{R}^2$ est comme suit:

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(2) À chaque vecteur de $\mathbb{R}^2$, on associe son vecteur des coordonnées homogènes normalisées. Cela donne une application comme suit:

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(3) Considérons l'ensemble

$$\mathcal{Z}_{\neq 0} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z \neq 0 \right\}.$$

À chaque vecteur $u \in \mathcal{Z}_{\neq 0}$, on associe le vecteur de $\mathbb{R}^2$, dont u est un vecteur de coordonnées homogènes. Cela donne une application comme suit:

$$T : \mathcal{Z}_{\neq 0} \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{z} \\ \frac{y}{z} \end{pmatrix}.$$

(4) Par contre, si l'on définit

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{z} \\ \frac{y}{z} \end{pmatrix},$$

alors il ne s'agit d'une application. En effet, l'image du vecteur nul $\mathbf{0}$ par T n'est pas bien défini.

5.1.2. Définition. Soit $T : X \to Y$ une application. Étant donné un sous-ensemble Z de X, son *image* par T est le sous-ensemble de Y tel que défini ci-dessous:

$$\{T(z) \mid z \in Z\} =: T(Z).$$

En particulier, $T(X)$ s'appelle *image* de T, noté $\mathrm{Im}(T)$.

Exercice. Considérons l'application suivante:

$$T : \mathcal{Z}_{\neq 0} \to \mathbb{R}^{(2)} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{z} \\ \frac{y}{z} \end{pmatrix}.$$

Calculer $T(D)$, où

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} \mid 0 \neq a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Solution. D'abord, étant donnés deux ensembles X et Y, on a que $X = Y$ si et seulement si $X \subseteq Y$ et $Y \subseteq X$. Or, pour tout

$$u = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} \in D, \qquad \text{où } a \neq 0,$$

on a

$$T(u) = \begin{pmatrix} \frac{a}{a} \\ \frac{a}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ceci signifie que

$$T(D) \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

De l'autre côté,

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in D$$

est tel que

$$T(v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1} \\ \frac{1}{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in T(D).$$

D'où,

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq T(D).$$

Par conséquent, on a

$$T(D) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

5.1.3. Définition. Une application $T : X \to Y$ est dite

(1) *injective* si tout élément $y \in Y$ admet au plus une pré-image $x \in X$;

(2) *surjective* si tout élément $y \in Y$ admet au moins une pré-image $x \in X$, c'est-à-dire, $\mathrm{Im}(T) = Y$;

(3) *bijective* si tout élément $y \in Y$ ademt exactement une pré-image $x \in X$, c'est-à-dire, T est surjective et injective.

Exercice. Vérifier que l'application suivante est injective et non surjective.

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Solution. Soient

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, u' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Si $u \neq u'$, alors $x \neq y$ ou $y \neq y'$. D'où,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire, $T(u) \neq T(u')$. Ainsi T est injective. En outre, considérons

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Pour tout

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

on a

$$T(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \neq w.$$

Ainsi, w n'a aucune pré-image dans $\mathbb{R}^2$. Donc, T n'est pas surjective.

Exercice. Vérifier que l'application suivante est surjective et non injective:

$$T : \mathcal{Z}_{\neq 0} \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{z} \\ \frac{y}{z} \end{pmatrix}.$$

Solution. On vérifiera que $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2$. D'abord, par définition, $\mathrm{Im}(T) \subseteq \mathbb{R}^2$. Pour tout

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

on voit que

$$\hat{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{Z}_{\neq 0}$$

est tel que $T(\hat{u}) = u$, et donc $u \in \mathrm{Im}(T)$. D'où, $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathrm{Im}(T)$. Par conséquent, $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2$. Ainsi, T est surjective. En outre,

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{Z}_{\neq 0}$$

sont distincts tels que

$$T(u_1) = \begin{pmatrix} \frac{2}{2} \\ \frac{2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$T(u_2) = \begin{pmatrix} \frac{3}{3} \\ \frac{3}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'où, $T(u_1) = T(u_2)$. Cela montre que T est non injective.

Exercice. Considérons le changement d'échelle suivant:

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x \\ 3y \end{pmatrix}.$$

Vérifier que T est bijectif.

Solution. Il s'agit de montrer que tout vecteur

$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

admet une et une seule pré-image par T.

D'abord,

$$u_0 = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{b}{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

est tel que

$$T(u_0) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{a}{2} \\ 3 \cdot \frac{b}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = v.$$

C'est-à-dire, u_0 est une pré-image de v par T.

De l'autre côté, supposons que

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

est une pré-image de v par T. Par définition, $T(u) = v$. C'est-à-dire,

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

D'où, $2x = a$ et $3y = b$, et donc,

$$x = \frac{a}{2};\ y = \frac{b}{3}.$$

C'est-à-dire,

$$u = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{b}{3} \end{pmatrix} = u_0.$$

En conlusion, u_0 est la seule pré-image de v par T. Par définition, T est bijectif.

5.1.4. Définition. Soient deux applications $T : X \to Y$ et $S : Y \to Z$. On définit *application composée* de T et S comme suit:

$$S \circ T : X \to Z : x \mapsto S(T(x)).$$

Remarque. Pour toute application $T : X \to Y$, on a

$$T \circ \mathbb{1}_X = T \text{ et } \mathbb{1}_Y \circ T = T.$$

Exercice. Calculer l'application composée des applications suivantes:

$$S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x \\ 3y \\ 1 \end{pmatrix}; \quad T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x + y - z.$$

Solution. Pour tout

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

on a

$$(T \circ S)(u) = T(S(u)) = T\left(\left(\begin{array}{c} 2x \\ 3y \\ 1 \end{array}\right)\right) = 2x + 3y - 1.$$

C'est-à-dire,

$$T \circ S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right) \mapsto 2x + 3y - 1.$$

5.1.5. Définition. Soit $T : X \to Y$ une application bijective. Alors tout $y \in Y$ a une et une seule pré-image $x \in X$, noté $x = T^{-1}(y)$. On définit *inverse* de T comme étant l'application

$$T^{-1} : Y \to X : y \mapsto T^{-1}(y).$$

Remarque. Si $T : X \to Y$ est bijective, alors $T^{-1} \circ T = \mathbb{1}_X$ et $T \circ T^{-1} = \mathbb{1}_Y$.

Exercice. Donner l'inverse T^{-1}, où T est le changement d'échelle suivant:

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{c} 2x \\ 3y \end{array}\right).$$

Solution. On a vu que T est bijectif. En outre, tout vecteur

$$v = \left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array}\right) \in \mathbb{R}^2$$

admet une préimage unique. Par définition, T^{-1} est l'application suivante:

$$T^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{c} \frac{a}{2} \\ \frac{b}{3} \end{array}\right).$$

5.2. Applications linéaires

Dès maintenant, on s'intérèsse à des applications entre deux espaces vectoriels réels, qui sont compatibles avec les opérations vectorielles.

Partout dans cette section, on fixe E, F deux espaces vectoriels réels.

5.2.1. Définition. Une application $T : E \to F$ est dite *linéaire* si, pour tous $u, v \in E$ et $a \in \mathbb{R}$, les conditions suivantes sont vérifiées:

(1) $T(u + v) = T(u) + T(v)$;
(2) $T(au) = a\,T(u)$.

Exemple. (1) L'*application nulle* suivante est linéaire:

$$\mathbf{0} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(2) L'application identité suivante est linéaire:

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Le résultat suivant donne en particulier une propriété importante d'une application linéaire.

5.2.2. Lemme. Soit $T : E \to F$ une application linéaire.
(1) $T(0_E) = 0_F$.
(2) Si $u_1, \ldots, u_r \in E$ et $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$, alors

$$T(a_1u_1 + \cdots + a_ru_r) = a_1\, T(u_1) + \cdots + a_r\, T(u_r),$$

Exemple. L'application suivante, appelée *translation*, n'est pas linéaire:

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

En effet, $T(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$.

Exercice. Donner une application linéaire $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ telle que

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ; T(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

où $\{e_1, e_2\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
Solution. Pour tout vecteur

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

on a $u = xe_1 + ye_2$. D'après le lemme 5.2.2(2), on a

$$T(u) = x \cdot T(e_1) + y \cdot T(e_2) = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x+y \\ 3x-y \end{pmatrix}.$$

Ainsi T est l'application suivante:

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ 2x+y \\ 3x-y \end{pmatrix}.$$

Le résultat suivant est un critère de la linéarité d'une application entre deux espaces vectoriels canoniques.

5.2.3. Théorème. Une application $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est linéaire si, et seulement si, T est définie par une matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ de la façon suivante:

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : u \mapsto Au.$$

Dans ce cas, $A = (T(e_1) \cdots T(e_n))$, où $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exercice. Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire définie par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Trouver sa formule en coordonnées canoniques.
Solution. Pour tout vecteur

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

d'après la définition, on a

$$T(u) = Au = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ 4x+5y+6z \end{pmatrix}.$$

Ceci donne la formule en coordonnées canoniques de T comme suit:

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ 4x+5y+6z \end{pmatrix}.$$

Exercice. Considérer l'application suivante:

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ 2x+2y-z \\ 3x+4y+2z \\ -x+z \end{pmatrix}.$$

Vérifier que T est linéaire et trouver la matrice qui définit T.

Solution. On voit aisément que

$$\begin{pmatrix} x+2y+3z \\ 2x+2y-z \\ 3x+4y+2z \\ -x+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Ainsi T est linéaire et définie par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple. Les applications suivantes ne sont pas linéaires:

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2 \\ x+y \end{pmatrix}$$

et

$$S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ xy+y \end{pmatrix}.$$

En effet, aucun de $T(u)$ et $S(u)$ n'est un produit de u multiplié par une matrice constante à gauche.

Le résultat suivant nous dit comment trouver l'application composée de deux applications linéaires.

5.2.4. Proposition. Soient deux applications linéaires

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : u \mapsto Au$$

et

$$S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p : v \mapsto Bv,$$

où $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{p\times m}(\mathbb{R})$. Alors $S \circ T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est linéaire, et définie par BA. C'est-à-dire,

$$S \circ T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p : u \mapsto (BA)u.$$

Exercice. Trouver la matrice qui définit l'application composée des applications linéaires

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x-3y \\ 3x+4y \end{pmatrix}$$

et

$$S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 2x+3y \end{pmatrix}.$$

Solution. On voit que T, S sont définies respectivement par les matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

D'après la proposition 5.2.4, $S \circ T$ est linéaire définie par

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -7 \\ 13 & 6 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire,

$$S \circ T : \; \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -7 \\ 13 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x+y \\ -x+7y \\ 13x+6y \end{pmatrix}.$$

On étudiera des propriétés d'applications linéaires. Le résultat suivant nous dit qu'une application linéaire envoie un sous-espace vectoriel à un sous-espace vectoriel.

5.2.5. Proposition. Soit $T : E \to F$ une application linéaire.
(1) Si G est un sous-espace vectoriel de E, alors $T(G)$ est un sous-espace vectoriel de F.
(2) En outre, si $G =< v_1, \ldots, v_r >$, alors $T(G) =< T(v_1), \ldots, T(v_r) >$.

Remarque. La proposition 5.2.5(1) n'est pas valide si T n'est pas linéaire.

Exemple. Soit une application

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \\ x \end{pmatrix}.$$

Considérons le sous-espace vectoriel nul de $\mathbb{R}^2$ suivant

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

On voit que

$$T(G) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

ce qui n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice. Considérons l'application linéaire suivante:

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y-z \\ x+y+z \end{pmatrix}.$$

Calculer l'image par T du plan vectoriel P de $\mathbb{R}^3$ engendré par

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Solution. Par définition, $P =< v_1, v_2 >$. Selon la formule de T en coordonnées canoniques, on trouve que

$$T(v_1) = \begin{pmatrix} 1+2+1 \\ 1+2-1 \\ 1+2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, T(v_2) = \begin{pmatrix} 2+1+1 \\ 2+1-1 \\ 1+2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

D'après la proposition 5.2.5(2), on a

$$T(P) =< T(v_1), T(v_2) >=< T(v_1) >,$$

où la deuxième equalité est valide car $T(v_2) = T(v_1)$. Ainsi, $T(P)$ est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$.

Le résultat suivant nous dt comment déterminer si une application linéaire est injective ou non.

5.2.6. Proposition. Soit $T : E \to F$ une application linéaire. Alors

$$\{u \in E \mid T(u) = 0_F\},$$

l'ensemble des pré-images de 0_F par T, est un sous-espace vectoriel de E, appelé *noyau* de T et noté $\mathcal{N}(T)$. En outre, T est injective si, et seulement si, $\mathcal{N}(T) = \{0_E\}$.

Exercice. Considérer la projection du plan sur l'axe des x suivante:

$$p_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que p_x est linéaire et trouver son noyau.

Solution. On voit aisément que

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

D'où, p_x est l'application linéaire définie par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Maintenant, pour tout

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

on a

$$u \in \mathcal{N}(p_x) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = p_x(u) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow x = 0.$$

Ainsi,

$$\mathcal{N}(p_x) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\},$$

ce qui est l'axe des y de $\mathbb{R}^2$.

Le résultat suivant nous dit comment trouver l'image et le noyau d'une application linéaire à l'aide de sa matrice.

5.2.7. Théorème. Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une application linéaire définie par une matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, alors

(1) $\mathrm{Im}(T) = \mathcal{C}(A)$. En particulier, $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A)$;

(2) $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(A)$. En particulier, $\dim(\mathcal{N}(T)) = n - \mathrm{rg}(A)$.

Exercice. Soit une application linéaire:

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 2x + 4y - z \\ 3x + 6y + 2z \\ -x - 2y + 4z \end{pmatrix}.$$

Trouver une base pour chacun de $\mathrm{Im}(T)$ et $\mathcal{N}(T)$.

Solution. On voit aisément que T est définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = (A_1\, A_2\, A_3) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} := B.$$

(1) D'après le théorème 5.2.7(1), $\mathrm{Im}(T) = \mathcal{C}(A)$. Comme les pivots de B se trouve dans les colonnes 1 et 3, d'après le théorème 4.3.10, $\mathrm{Im}(T)$ a pour base

$$\left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

(2) D'après le théorème 5.2.7(2), $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(A)$, l'espace-solution du système homogène $AX = 0$. Comme A se réduit à B, ce dernier système est équivalent au système homogène $BX = 0$, c'est-à-dire,

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ & & & & z & = & 0 \\ & & & & 0z & = & 0 \\ & & & & 0z & = & 0, \end{array}$$

dont l'inconnue libre est y. Posant $y = 1$, on obtient une base de $\mathcal{N}(T)$ comme suit:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Le résultat suivant nous donne un critère pour une application linéaire soit injective et soit surjective.

5.2.8. Corollaire. Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est linéaire définie par $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, alors
(1) T est injective si, et seulement si, $\mathrm{rg}(A) = n$.
(2) T est surjective si, et seulement si, $\mathrm{rg}(A) = m$.

Exercice. Déterminer si l'application linéaire suivante est injective ou surjective.

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ 2x+y \\ x-3y \end{pmatrix}.$$

Solution. On voit aisément que T est définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $\mathrm{rg}(A) = 2$, d'après le corollaire 5.2.8, T est injective, mais non surjective.

Le résultat suivant donne des propiétés importantes d'applications linéaires injectives, qui sera utile en infographie. On identifiera un vecteur avec son point d'arrivée.

5.2.9. Proposition. Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est linéaire injective, alors T envoie
(1) un segment d'extrémités u_1, u_2 au segment d'extrémités $T(u_1), T(u_2)$;
(2) un triangle de sommets u_1, u_2, u_3 au triangle de sommets $T(u_1)$, $T(u_2), T(u_3)$.

Exercice. Soit Δ le triangle de sommets

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Trouver l'image de Δ par l'application linéaire suivante:

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+3y \\ y \end{pmatrix}.$$

Solution. On voit que T est définie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $\mathrm{rg}(A) = 2$, d'après le corollaire 5.2.8(1), T est injective. On calcule

$$T(u_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ T(u_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, T(u_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'après la proposition 5.2.9(2), $T(\mathit{\Delta})$ est le triangle de sommets

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5.3. Transformations linéaires

Le but de cette section est d'étudier les applications linéaires d'un espace vectoriel dans lui-même.

Partout dans cette section, on fixe E un espace vectoriel réel.

5.3.1. Définition. (1) Une application linéaire $T : E \to E$ s'appelle *transformation linéaire*.

(2) Une transformation linéaire bijective de E s'appelle *automorphisme* de E.

Exemple. (1) L'application nulle

$$\mathbf{0} : E \to E : u \mapsto 0_E$$

est une transformation linéaire de E.

(2) L'application identité

$$\mathbb{1} : E \to E : u \mapsto u$$

est un automorphisme de E.

(3) La projection de $\mathbb{R}^2$ sur l'axe des x

$$p_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

est une transformation linéaire de $\mathbb{R}^2$. En outre, on a deux vecteurs distincts

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

tels que

$$p_x(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = p_x(v).$$

Ainsi, p_x n'est pas injective. En particulier, p_x n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Comme d'habitude, la théorie des matrices est très utile pour étudier les transformations linéaires.

5.3.2. Définition. Soit T une transformation linéaire de E. Soit $\{u_1, \ldots, u_n\}$ une base de E. Comme $T(u_1), \ldots, T(u_n) \in E$, on obtient une matrice des coordonnées

$$P_{\{u_1,\ldots,u_n\}}^{\{T(u_1),\ldots,T(u_n)\}},$$

appelée *matrice* de T dans la base $\{u_1, \ldots, u_n\}$, et notée $[T]_{\{u_1,\ldots,u_n\}}$.

Remarque. D'après la définition de matrice des coordonnées, on a

$$(T(u_1), \cdots, T(u_n)) = (u_1, \cdots, u_n)\, [T]_{\{u_1,\ldots,u_n\}}.$$

Ceci est illustré par

$$\{u_1, \cdots, u_n\} \xrightarrow{[T]_{\{u_1,\ldots,u_n\}}} \{T(u_1), \cdots, T(u_n)\}.$$

Exercice. Considérons la projection de $\mathbb{R}^2$ sur l'axe des x suivante:

$$p_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donner sa matrice dans la base suivante:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Solution. Par définition, on a

$$[p_x]_{\{u_1,u_2\}} = P_{\{u_1,u_2\}}^{\{p_x(u_1),p_x(u_2)\}}.$$

On voit que

$$\begin{array}{rcccccc} p_x(u_1) & = & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & = & \frac{1}{2}u_1 & + & \frac{1}{2}u_2, \\ p_x(u_2) & = & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & = & \frac{1}{2}u_1 & + & \frac{1}{2}u_2 \end{array}$$

D'où

$$[p_x]_{\{u_1,u_2\}} = P_{\{u_1,u_2\}}^{\{p_x(u_1),p_x(u_2)\}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

5.3.3. Lemme. Soit une transformation linéaire

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : u \mapsto Au.$$

Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors

$$[T]_{\{e_1,\ldots,e_n\}} = A.$$

Remarque. Le lemme 5.3.3 dit que toute transformation linéaire de $\mathbb{R}^n$ est définie par sa matrice dans la base canonique.

Exercice. Considérons la projection de $\mathbb{R}^2$ sur l'axe des y suivante:

$$p_y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}.$$

Trouver la matrice de p_y dans la base canonique $\{e_1, e_2\}$.

Solution. On voit aisément que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x + 0 \cdot y \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire, p_y est la transformation linéaire suivante:

$$p_y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

D'après le lemme 5.3.3,

$$[p_y]_{\{e_1,e_2\}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le résultat suivant nous dit comment utiliser la matrice d'une transformation linéaire pour caculer l'image d'un vecteur.

5.3.4. Théorème. Soit T une transformation linéaire de E. Soit $\{u_1, \ldots, u_n\}$ une base de E avec $[T]_{\{u_1,\ldots,u_n\}} = A$. Pour tout $u \in E$, on a

$$P_{\{u_1,\ldots,u_n\}}^{\{T(u)\}} = AP_{\{u_1,\ldots,u_n\}}^{\{u\}}.$$

Autrement, T est de la forme suivante:

$$T : E \longrightarrow E : \quad (u_1, \ldots, u_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \longmapsto (u_1, \ldots, u_n)A\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Exercice. Considérons les vecteurs suivants

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}; u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

où u_1, u_2 forment une base de $\mathbb{R}^2$. Soit T une transformation linéaire de $\mathbb{R}^2$ telle que $T(u_1) = u_1$ et $T(u_2) = -u_2$. Trouver les coordonnées de $T(u)$ dans la base $\{u_1, u_2\}$.

Solution. D'après le théorème 5.3.4, on a

$$P_{\{u_1,u_2\}}^{\{T(u)\}} = [T]_{\{u_1,u_2\}} P_{\{u_1,u_2\}}^{\{u\}}.$$

On a vu que

$$[T]_{\{u_1,u_2\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} := A.$$

Remarquons que la matrice de passage de $\{e_1, e_2\}$ à $\{u_1, u_2\}$ est

$$P_{\{e_1,e_2\}}^{\{u_1,u_2\}} = (u_1 u_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} := P \text{ et } P_{\{e_1,e_2\}}^{\{u\}} = u.$$

D'après le théorème 4.2.9, on a

$$P_{\{u_1,u_2\}}^{\{u\}} = P^{-1}u = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} := B.$$

Ainsi

$$P_{\{u_1,u_2\}}^{\{T(u)\}} = AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire, $T(u) = 7 \cdot u_1 - 5 \cdot u_2$.

La matrice d'une transformation linéaire change si l'on change la base. Ce changement est décrit dans le résultat suivant, ce qui découle du théorème 5.3.4.

5.3.5. Théorème. Soit T une transformation linéaire de E. Si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ et $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sont deux bases de E, alors

$$[T]_{\{v_1,\ldots,v_n\}} = P^{-1}[T]_{\{u_1,\ldots,u_n\}} P,$$

où P est la matrice de passage de $\{u_1, \ldots, u_n\}$ à $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Ceci est illustré par le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
\{u_1, \ldots, u_n\} \arrow[r, "{[T]_{\{u_1,\ldots,u_n\}}}"] \arrow[d, "P"'] & \{T(u_1), \ldots, T(u_n)\} \arrow[d, "P"] \\
\{v_1, \ldots, v_n\} \arrow[r, "{[T]_{\{v_1,\ldots,v_n\}}}"] & \{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}.
\end{tikzcd}$$

Exercice. Considérons la base de $\mathbb{R}^2$ suivante:

$$\left\{u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}.$$

Soit T une transformation linéaire de $\mathbb{R}^2$ telle que $T(u_1) = u_1$ et $T(u_2) = -u_2$. Trouver sa formule en coordonnées canoniques.

Solution. On veut trouver $[T]_{\{e_1,e_2\}}$. Par l'hypothèse, on a

$$\begin{array}{rcrcr} T(u_1) & = & 1 \cdot u_1 & + & 0 \cdot u_2 \\ T(u_2) & = & 0 \cdot u_1 & + & (-1) \cdot u_2. \end{array}$$

Ainsi,

$$[T]_{\{u_1,u_2\}} = P_{\{u_1,u_2\}}^{\{T(u_1),T(u_2)\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} := P.$$

Comme P est la matrice de passage de $\{e_1, e_2\}$ à $\{u_1, u_2\}$, d'après le théorème 5.3.4,

$$[T]_{\{u_1,u_2\}} = P^{-1}[T]_{\{e_1,e_2\}}P.$$

D'où,

$$[T]_{\{e_1,e_2\}} = P[T]_{\{u_1,u_2\}}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Donc, la formule en coordonnées canoniques de T est donnée par

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ -4x - 3y \end{pmatrix}.$$

Le résultat suivant est une conséquence de la proposition 5.2.4.

5.3.6. Proposition. Soient T et S des transformations linéaires de $\mathbb{R}^n$. Alors $S \circ T$ est aussi une transformation linéaire de $\mathbb{R}^n$. En outre, pour toute base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, on a

$$[S \circ T]_{\{u_1,\ldots,u_n\}} = [S]_{\{u_1,\ldots,u_n\}}\,[T]_{\{u_1,\ldots,u_n\}}.$$

Exercice. Soit T la transformation linéaire de $\mathbb{R}^2$ suivante:

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - y \\ 2x + 4y \end{pmatrix}.$$

Soit S une transformation linéaire de $\mathbb{R}^2$ telle que $S(u_1) = u_1$ et $S(u_2) = -u_2$, où

$$\left\{u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}.$$

Trouver la formule de $S \circ T$ en coordonnées canoniques.

Solution. D'après le lemme 5.3.3, $S \circ T$ est définie par $[S \circ T]_{\{e_1,e_2\}}$. D'après la proposition 5.3.6,

$$[S \circ T]_{\{e_1,e_2\}} = [S]_{\{e_1,e_2\}}[T]_{\{e_1,e_2\}}.$$

Maintenant, d'après l'hypothèse, on a

$$[T]_{\{e_1,e_2\}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

et on a déjà trouvé que

$$[S]_{\{e_1,e_2\}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$[S \circ T]_{\{e_1,e_2\}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -10 & -8 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire, $S \circ T$ est de la forme:

$$S \circ T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 7x + 5y \\ -10x - 8y \end{pmatrix}.$$

Le résultat suivant nous dit comment déterminer si une transformation linéaire est un automorphisme ou non; et si oui, comment trouver son inverse.

5.3.7. Théorème. Soit T une transformation linéaire de E. Pour toute base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de E, les trois conditions suivantes sont équivalentes.

(1) T est un automorphisme de E.

(2) $[T]_{\{u_1,\ldots,u_n\}}$ est inversible.

(3) $\{T(u_1), \ldots, T(u_n)\}$ est aussi une base de E.

Dans ce cas, $[T]_{\{u_1,\ldots,u_n\}}$ est la matrice de passage de $\{u_1, \ldots, u_n\}$ à $\{T(u_1), \ldots, T(u_n)\}$, et T^{-1} est aussi un automorphisme de E avec

$$[T^{-1}]_{\{u_1,\ldots,u_n\}} = \left([T]_{\{u_1,\ldots,u_n\}}\right)^{-1}.$$

Exercice. Considérons l'application linéaire suivante:

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 3y \\ y \end{pmatrix}.$$

(1) Vérifier que T est un automorphisme et donner T^{-1}.

(2) Trouver la matrice de passage de $\{u_1, u_2\}$ à $\{T(u_1), T(u_2)\}$, où

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Solution. (1) D'après le lemme 5.3.3, on voit que

$$[T]_{\{e_1,e_2\}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} := A.$$

Comme A est inversible, d'après le théorème 5.3.7, T est un automorphisme et

$$[T^{-1}]_{\{e_1,e_2\}} = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire, T^{-1} est de la forme:

$$T^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - 3y \\ y \end{pmatrix}.$$

(2) D'après le théorème 5.3.7, la matrice de passage de $\{u_1, u_2\}$ à $\{T(u_1), T(u_2)\}$ est $[T]_{\{u_1,u_2\}}$. Comme la matrice de passage de $\{e_1, e_2\}$ à $\{u_1, u_2\}$ est

$$P = (u_1\, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème 5.3.6, on a

$$[T]_{\{u_1,u_2\}} = P^{-1}[T]_{\{e_1,e_2\}}P = \begin{pmatrix} 19 & 27 \\ -5 & -7 \end{pmatrix},$$

ce qui est la matrice de passage de $\{u_1, u_2\}$ à $\{T(u_1), T(u_2)\}$. C'est-à-dire,

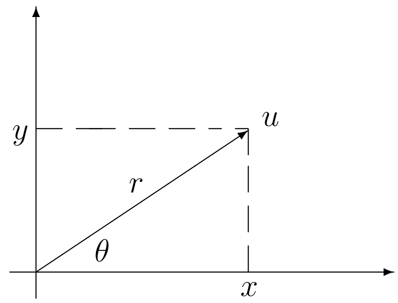
$$\begin{aligned} T(u_1) &= 19u_1 - 5u_2; \\ T(u_2) &= 27u_1 - 7u_2. \end{aligned}$$

5.4. Rotations du plan

Cette section a pour but d'étudier un type spécial d'automorphismes du plan, c'est-à-dire, les rotations en 2D. On commence par un petit rappel de la trigonométrie. Étant donné un vecteur non nul

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

la *longueur* de u est $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, et un *argument* θ de u est un angle de l'axe des abscisses positifs à u. Dans ce cas, u est représenté par le vecteur du plan suivant:



Maintenant, on définit

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Ceci nous donne

$$u = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix},$$

appelé *forme géométrique* de u. En particulier, on voit aisément que le cercle unitaire se compose des vecteurs suivants:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \ \theta \in [0, 2\pi].$$

Le tableau suivant donne les valeurs de sinus et de cosinus de certains angles spéciaux dans le premier quadrant.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

5.4.1. Proposition. Si θ, ϕ sont des angles, alors
(1) $\cos(2\pi+\theta) = \cos\theta$;
(2) $\sin(2\pi+\theta) = \sin\theta$;
(3) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$;
(4) $\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi$;
(5) $\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi$.

Exemple. D'après la proposition 5.4.1(4) et (5), on a

$$\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}+\theta) \\ \sin(\frac{\pi}{2}+\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos\theta - \sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin\theta) \\ \sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\theta + \cos\frac{\pi}{2}\cdot\sin\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Exercice. Considérons la matrice suivante:

$$A_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Vérifier que A_θ est inversible et $A_\theta^{-1} = A_\theta^T$.
Preuve. On vérifie que

$$\begin{aligned} A_\theta A_\theta^T &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta + \sin^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De même, on a $A_\theta^T A_\theta = I_2$.

En appliquant la proposition 5.4.1(4) et (5), on obtient le résultat suivant, ce qui nous permet de trouver le sinus et le cosinus des angles spéciaux dans les autres quadrants.

5.4.2. Proposition. Si θ est un angle, alors

(1) $\begin{pmatrix} \cos(\pi-\theta) \\ \sin(\pi-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} \cos(\pi+\theta) \\ \sin(\pi+\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} \cos(2\pi-\theta) \\ \sin(2\pi-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$.

Exercice. Trouver la forme géométrique de

$$u = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Solution. D'abord, $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$.
Soit θ un argument de u. Alors

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{y}{r} = -\frac{1}{2}.$$

On commence par un angle $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que

$$\cos\phi = |\cos\theta| = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin\phi = |\sin\theta| = \frac{1}{2}.$$

D'après le tableau, $\phi = \frac{\pi}{6}$. Maintenant, comme $x < 0$ et $y < 0$, le vecteur u est dans le troisième quadrant. Ainsi

$$\theta = \pi + \phi = \tfrac{7\pi}{6}.$$

D'où

$$u = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\frac{7\pi}{6} \\ 2\sin\frac{7\pi}{6} \end{pmatrix}.$$

Maintenant, on définira les rotations du plan.

5.4.3. Définition. Soit θ un angle fixe. L'application

$$\rho_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} r\cos(\phi+\theta) \\ r\sin(\phi+\theta) \end{pmatrix}$$

s'appelle *rotation* du plan d'un angle θ.

Exemple. Comme

$$e_1 = \begin{pmatrix} \cos 0 \\ \sin 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}.$$

D'apprès la définition, on a

$$\rho_\theta(e_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad \rho_\theta(e_2) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}+\theta) \\ \sin(\frac{\pi}{2}+\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Le résultat nous donne la formule en coordonnées canoniques d'une rotation.

5.4.4. Théorème. La rotation ρ_θ du plan d'un angle θ est un automorphisme de la forme

$$\rho_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

dont l'inverse est de la forme suivante:

$$\rho_\theta^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Exercice. Soit ρ la rotation de $\mathbb{R}^2$ d'un angle $\frac{2\pi}{3}$. Calculer $\rho(u)$, où

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Solution. Remarquons que $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$. D'après le théorème 5.4.4,

$$[\rho]_{\{e_1,e_2\}} = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3} \\ \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & -\cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} := A.$$

D'où

$$\rho(u) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{pmatrix}.$$

5.5. Transformations affines et calibration de caméra

Le but de cette section est d'étudier deux genres de transformations non linéaires de $\mathbb{R}^n$, qui ne sont pas représentables par la multiplication par une matrice si l'on utilise les coordonnées canoniques. Cependant, elles sont représentables par la multiplication par une matrice si l'on utilise les coordonnées homogènes. On commence par les transformations affines.

5.5.1. Définition. Étant donné un vecteur $B \in \mathbb{R}^n$, l'application

$$T_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : u \mapsto u + B$$

s'appelle *translation* de la direction B.

Remarque. Une translation de la direction B est bijective; et elle est linéaire si, et seulement si, B est nul.

Exemple. La translation de $\mathbb{R}^2$ de la direction

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

est l'application suivante:

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+3 \\ y-4 \end{pmatrix}.$$

Rappelons que toute transformation linéaire de $\mathbb{R}^n$ est de la forme

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : u \mapsto Au,$$

où $A \in M_n(\mathbb{R})$.

5.5.2. Définition. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{R}^n$, alors l'application

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : u \mapsto Au + B$$

s'appelle *transformation affine* de $\mathbb{R}^n$.

Remarque. (1) La transformation affine T est le composé de la transformation linéaire définie par A et la translation de la direction B.

(2) Si $A = I_n$, alors T est la translation de la direction B.

(3) Si B est nul, alors T est une transfomration linéaire.

Exercice. Soit

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - y + 1 \\ 3y - 2z + 2 \\ x - z + 1 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que T est une transformation affine.

Démonstration. On voit aisément que

$$\begin{pmatrix} 2x - y + 1 \\ 3y - 2z + 2 \\ x - z + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ 3y - 2z \\ x - z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi T est une transformation affine de la forme

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le résultat suivant dit qu'une transofrmation affine sera donnée aussi par la multiplication à gauche par une matrice lorsqu'on utilise les coordonnées hommogènes au lieu de coordonnées canoniques.

5.5.3. Théorème. Soit une transformation affine suivante:

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : u \mapsto Au + B,$$

où $A = (a_{ij})_{n\times n}$ et $B = (b_i)_{n\times 1}$. Si $u \in \mathbb{R}^n$, alors $\widehat{T(u)} = \hat{A}\hat{u}$, où

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

appelée *matrice en coordonnées homogènes* de T.

Exemple. Considérer la transformation affine $T = T_B \circ \rho_{\frac{\pi}{3}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, où

$$B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}; v = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

(1) Donner la formule en coordonnées canoniques de T.

(2) Calculer $T(v)$, en utilisant la matrice en coordonnées homogènes de T.

Solution. (1) D'après le théorème 5.4.4, la rotation $\rho_{\frac{\pi}{3}}$ est définie par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Pour tout $u \in \mathbb{R}^2$, on a

$$T(u) = T_B(\rho_{\frac{\pi}{3}}(u)) = T_B(Au) = Au + B.$$

D'où, T est de la forme

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x-\sqrt{3}y+6}{2} \\ \frac{\sqrt{3}x+y+10}{2} \end{pmatrix}.$$

(2) D'après le théorème 5.5.3, la matrice en coordonnées homogènes de T est

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 3 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$\widehat{T(v)} = \hat{A}\hat{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 3 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3\sqrt{3} \\ 8-\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire,

$$T(v) = \begin{pmatrix} 2-3\sqrt{3} \\ 8-\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Dans le traitement d'image, on utilise la *calibration de caméra* (ou bien, la *projection perspective*), pour modéliser le processus de formation des images. Dans ce modèle, l'espace $\mathbb{R}^3$ sera repéré par un *repère caméra* tel que défini ci-dessous:

(1) l'origine est le centre optique de la caméra;

(2) l'axe des z pointe vers les objets;

(3) l'axe des y pointe vers le haut;

(4) l'axe des x est parallèle à la base de la caméra et pointe vers la gauche (en face des objets).

Dans la prise d'une photo, un vecteur (ou bien un point) de $\mathbb{R}^3$ est projeté sur le plan image défini par $z = -d$, où d est la distance focale (c'est-à-dire, la distance entre le point optique et le plan image) de la caméra. On note

$$\mathcal{Z}_d = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ d \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \text{ et } \mathcal{Z}_{\neq 0} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z \neq 0 \right\}.$$

5.5.4. Définition. La *projection perspective* de centre $\mathbf{0}$ sur un plan affine $\mathscr{Z}_d$, avec $d \neq 0$, est l'application définie par

$$\mathscr{P}_d : \mathscr{Z}_{\neq 0} \to \mathscr{Z}_d : u \mapsto u^*,$$

où u^* est le point d'intersection de $\mathscr{Z}_d$ et la droite vectorielle passant par u et l'origine $\mathbf{0}$.

Le résultat suivant nous dit comment calculer la projection perspective en utilisant les coordonnées homogènes.

5.5.5. Théorème. Soit $\mathscr{P}_d$ la projection perspective de centre $\mathbf{0}$ sur $\mathscr{Z}_d$, où $d \neq 0$. Pour tout $u \in \mathscr{Z}_{\neq 0}$, son image $\mathscr{P}_d(u)$ a pour coordonnées homogènes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 \end{pmatrix} \hat{u}\,,$$

où la matrice s'appelle *matrice en coordonnées homogènes* de $\mathscr{P}_d$.

Exercice. Donner la matrice en coordonnées homogènes de la projection perspective $\mathscr{P}_{-2}$ et calculer l'image par cette projection du vecteur

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Solution. D'après le théorème 5.5.5, la matrice en coordonnées homogènes de $\mathscr{P}_{-2}$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} := A.$$

D'après le théorème 5.5.5, $\mathscr{P}_{-2}(u)$ a pour vecteur de coordonnées homogènes le produit

$$A \cdot \hat{u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire,

$$\mathscr{P}_{-2}(u) = \begin{pmatrix} 1 \div (-\frac{3}{2}) \\ 2 \div (-\frac{3}{2}) \\ 3 \div (-\frac{3}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ -2 \end{pmatrix}.$$

5.6. Exercices

1. Considérer l'application du déterminant

$$\det : M_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} : A \mapsto \det(A).$$

(1) Déterminer, avec justification, si cette application est injective ou non.

(2) Déterminer, avec justification, si cette application est surjective ou non.

(3) Déterminer, avec justification, si cette application est bijective ou non.

2. Considérer l'application suivante

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-3 \\ y+3 \end{pmatrix}$$

(1) Vérifier que T est bijective et trouve son inverse T^{-1}.

(2) Trouver l'image par T du triangle Δ de sommets

$$u_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

3. Considérer l'application suivante:

$$T : M_{3\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 3}(\mathbb{R}) : A \mapsto A^T + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

(1) Vérifier que T est une application bijective.

(2) Donner l'inverse T^{-1}.

4. Considérer l'application suivante

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ x + y^2 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer $T(e_1)$ et $T(e_2)$, avec $\{e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

(2) Trouver un vecteur spéficique u de $\mathbb{R}^2$ tel que $T(u) \neq Au$, où A est la matrice formée par $T(e_1)$ et $T(e_2)$.

(3) Déterminer, à l'aide du théorème 5.2.3, si T est linéaire ou non.

5. Dans chacun des cas suivants, vérifier que l'application T est non linéaire.

(1) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+7 \\ y-5 \end{pmatrix}.$

(2) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ y^2 \end{pmatrix}.$

6. Dans chacun des cas suivants, trouver la matrice qui définit l'application linéaire T.

$$(1) \quad T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 7x \\ -5y \end{pmatrix}.$$

$$(2) \quad T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 7x \\ 9y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$(3) \quad T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - y + 3z \\ x - 5y + z \end{pmatrix}.$$

7. Soit $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire. Si $T(u_1) = v_1$ et $T(u_2) = v_2$, calculer $T(u)$, où

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Indice: D'abord, à l'aide de la proposition 4.1.6, exprimer $u = a_1u_1 + a_2u_2$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$; et ensuite, utiliser la linéairité de T.

8. Considérer l'application linéaire suivante:

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5x \\ 7y \end{pmatrix}.$$

(1) Donner la matrice qui définit T.

(2) Donner l'image par T du disque unitaire

$$\mathcal{S}^1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

9. Considérer les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants:

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \ v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

(1) Vérifier que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(2) Donner la matrice de passage de $\{u_1, u_2, u_3\}$ à la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

(3) À l'aide de la partie (2), trouver l'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ telle que

$$T(u_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T(u_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T(u_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

10. Considérons l'application linéaire

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x \\ 3y \end{pmatrix}$$

et l'application linéaire $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ telle que

$$S(e_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, S(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(1) Donner la matrice qui définit l'application composée $S \circ T$.

(2) Donner la formule de $S \circ T$ en coordonnées canoniques.

11. Considérer l'application linéaire suivante:

$$T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_3 + x_4 \\ x_1 - x_2 + x_4 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \end{pmatrix}.$$

(1) Donner la matrice qui définit T.

(2) Donner une base de $\mathrm{Im}(T)$.

(3) Donner une base de $\mathcal{N}(T)$.

12. Soit $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire telle que

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad T(e_4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

où $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

(1) Trouver, à l'aide du théorème 5.2.3, la matrice qui définit T.

(2) Donner la dimension de $\mathrm{Im}(T)$ et déterminer si T est surjective ou non.

(3) Donner la dimension de $\mathcal{N}(T)$ et déterminer si T est injective ou non.

13. Dans chacun des cas suivants, trouver une base pour chacun de $\mathcal{N}(T)$ et $\mathrm{Im}(T)$.

$$(1) \qquad T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 2x + 4y + 6z \\ -3x - 6y - 9z \end{pmatrix};$$

$$(2) \qquad T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 \end{pmatrix}.$$

14. Considérer l'application linéaire $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 : u \mapsto Au$, où

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad\qquad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans chacun des cas ci-dessus, trouver la dimension de $\mathcal{N}(T)$ et celle de $\mathrm{Im}(T)$, et en déterminer si T est injective et si T est surjective.

15. Considérer l'application linéaire suivante:

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2y \\ 3x \\ x - y \end{pmatrix}.$$

(1) Trouver la matrice qui définit T.

(2) Vérifier, à l'aide du corollaire 5.2.8, que T est injective.

(3) À l'aide de la proposition 5.2.9, donner l'image par T du triangle $\mathit{\Delta}$ de sommets

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

16. Donner une application linéaire $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ qui envoie le segment d'extrémités

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en le segment d'extrémités

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

17. Dans chacun des cas suivants, trouver la transformation linéaire $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ est la matrice donnée.

(1) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; (2) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

(3) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

18. Considérer la transformation linéaire suivante:

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 3y + z \\ 2x - y + 2z \\ 3x + 2y + 3z \end{pmatrix}.$$

(1) Trouver la matrice de T dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
(2) Donner une base pour chacun de $\mathcal{N}(T)$ et $\mathrm{Im}(T)$.
(3) Donner la valeur de a pour que $u \in \mathrm{Im}(T)$, où

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(4) Donner la valeur de b pour que $v \in \mathcal{N}(T)$, où

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}.$$

19. Dans chacun des cas suivants, trouver la dimension de chacun de $\mathrm{Im}(T)$ et $\mathcal{N}(T)$, et en déterminer si T est un automorphisme ou non.

(1) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

(2) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ linéaire telle que

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, T(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, T(e_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, T(e_4) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

20. Considérer la projection de $\mathbb{R}^2$ sur l'axe des y comme suit:

$$p_y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}.$$

(1) Donner, à l'aide du théorème 5.3.4, la matrice de p_y dans la base suivante:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(2) Posant $u = 2u_1 - 5u_2$, à l'aide du théorème 5.3.4, trouver les coordonnées de $T(u)$ dans $\{u_1, u_2\}$. **Attention**: Les coordonnées de u dans $\{u_1, u_2\}$ sont déjà données.

21. Considérer la transformation linéaire suivante:

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - 3y + z \\ 3x + y - z \\ 2x - y + z \end{pmatrix}.$$

(1) Trouver la matrice de T dans la base de $\mathbb{R}^3$ suivante:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Indice: D'abord, trouver la matrice de T dans la base canonique à l'aide du lemme 5.3.3; et ensuite, appliquer le théorème 5.3.5.

(2) Donner les coordonnées de $T(u)$ dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$, où

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Indice: D'abord, trouver les coordonnées de u dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ à l'aide du théorème 4.2.9, et ensuite; appliquer le théorème 5.3.4.

22. Trouver la transformation linéaire T de $\mathbb{R}^2$ telle que $T(u_1) = -u_1$ et $T(u_2) = u_2$, où

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Indice: Vérifier que $\{u_1, u_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

23. Trouver une transformation linéaire T de $\mathbb{R}^3$ telle que $T(u_1) = 2u_1$, $T(u_2) = 3u_2$, et $T(u_3) = 4u_3$, où

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Indice: D'abord, vérifier que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et trouver la matrice de T dans cette base; et ensuite, trouver la matrice de T dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ à l'aide du théorème 5.3.5.

24. Dans chacun des suivants, déterminer si la transformation linéaire T est un automorphisme ou non; et si oui, trouver son inverse T^{-1}.

(1) $\quad T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix};$

(2) $\quad T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix}.$

25. Considérer la transformation linéaire suivante:

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ x + 3y - z \\ 4x + 5y + 2z \end{pmatrix}.$$

(1) Vérifier que T est un automorphisme.

(2) Calculer T^{-1}, l'inverse de T.

(3) Donner la matrice de T dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$, où

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(4) Donner la matrice de passage de la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ à la base $\{T(u_1), T(u_2), T(u_3)\}$.

26. Dans chacun des cas suivants, trouver les valeurs de a pour que T soit un automorphisme.

(1) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : u \mapsto Au$, où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ a & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est linéaire satisfaisant à la condition suivante:

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ T(e_2) = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ T(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix},$$

avec $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

27. Calculer

(1) $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$; (2) $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$;

(3) $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$; (4) $\cos\frac{17\pi}{12}$ et $\sin\frac{17\pi}{12}$.

28. Dans chacun des cas suivants, trouver un argument du vecteur donné.

$$(1)\ \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad (2)\ \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}; \quad (3)\ \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}; \quad (4)\ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

29. Pour tout angle θ, on pose

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Vérifier, pour tous angles θ, ψ, que $A_\theta A_\psi = A_{\theta+\psi}$.

30. Soit ρ la rotation du plan d'un angle $\frac{2\pi}{3}$. Soit T la transformation linéaire de $\mathbb{R}^2$ telle que

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

avec $\{e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

(1) Trouver la matrice de $\rho \circ T$ et celle de $T \circ \rho$ dans $\{e_1, e_2\}$.

(2) Calculer l'image de u par $\rho \circ T$ et celui par $T \circ \rho$, et en déterminer si $\rho \circ T = T \circ \rho$ ou non, où

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

31. Considérer la projection perspective $\mathscr{P}_{-3}$ de centre $\mathbf{0}$ sur le plan affine $\mathscr{Z}_{-3}$. Soit Δ le triangle de sommets

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer $v_i = \mathscr{P}_{-3}(p_i)$, pour $i = 1, 2, 3$.

(2) Vérifier que l'image de Δ par $\mathscr{P}_{-3}$ est le triangle de sommets v_1, v_2, v_3.

Indice: D'après la proposition 4.4.6, tout $u \in \Delta$ s'écrit

$$u = (1 - s - t)u_1 + su_2 + tu_3; 0 \leq s, t, 1 - s - t \leq 1.$$

D'abord, calculer $\mathscr{P}_{-3}(u)$ à l'aide de la matrice en coordonnées homogènes de $\mathscr{P}_{-3}$.
Pour la partie (1), spécifier les valeurs $(s,t) = (0,0)$; $(s,t) = (1,0)$ et $(s,t) = (0,1)$.
Pour la partie (2), vérifier que $\mathscr{P}_{-3}(u) = (1 - s - t)v_1 + sv_2 + tv_3$.

Chapitre VI: Diagonalisation

Comme on a déjà vu, une transformation linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie est complètement déterminée par sa matrice dans une base. Le but de ce chapitre est d'étudier quand on peut trouver une base dans laquelle la matrice de la transformation linéaire est diagonale. On dira que deux matrices carrées A, B sont *semblables* s'il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$. D'après le théorème 5.3.5, les matrices d'une transformation linéaire dans deux bases sont semblables. Ainsi, le probléme se ramène à celui quand une matrice carrée est semblable à une matrice diagonale. Pour ce faire, on a besoin de notions de valeurs propres et de vecteurs propres. En tant qu'une autre application de valeurs propres en informatique, on parlera de l'algorithme PageRank.

6.1. Diagonalisation de matrices et de transformations linéaires

6.1.1. Définition. Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite *diagonalisable* s'il existe une matrice inversible $P \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

Remarque. Toute matrice diagonale est diagonalisable.

Les notions suivantes sont essentielles pour étudier la diagonalisation de matrices carrées.

6.1.2. Définition. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On dit que $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ est *valeur propre* de A s'il existe un vecteur non nul $u_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $Au_0 = \lambda_0 u_0$; et dans ce cas, u_0 s'appelle *vecteur propre* associé à λ_0.

Remarque. (1) Un vecteur propre est toujours non nul, mais une valeur propre peut être nulle.

(2) Si u_0 est un vecteur propre de A associé à une valeur propre λ_0, alors au_0 l'est aussi pour tout nombre réel non nul a.

Exemple. Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

On voit aisément que

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et

$$A\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $2, 3$ sont des valeurs propres de A avec

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

des vecteurs propres associés à 2 et à 3, respectivement.

Le résultat suivant dit qu'une matrice carrée est diagonalisable si elle possède assez de vecteurs propres linéairement indépendants.

6.1.3. Théorème. Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable si, et seulement si, A admet n vecteurs propres linéairement indépendants $u_1, \ldots, u_n$. Dans ce cas, $P = (u_1 \cdots u_n)$ est inversible telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

où λ_i est la valeur propre à laquelle u_i est associé.

Exemple. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

On a vu que A a deux vecteurs propres associés à 2 et 3 respectivement comme suit:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Comme $\{u_1, u_2\}$ est libre,

$$P = (u_1 u_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

est inversible. Maintenant

$$AP = (Au_1 \, Au_2) = (2u_1 \; 3u_2) = (u_1 \, u_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

D'où, on a

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On étudiera comment trouver les valeurs propres et les vecteurs propres associés. Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$ et λ une variable. Alors $A - \lambda I_n$ est une matrice carrée dont les termes sont des polynômes à λ. De la même façon qu'on définit le déterminant d'une matrice carrée de nombres réels, on définit le déterminant d'une matrice carrée de polynômes réels à λ, ce qui est un polynôme réel à λ.

6.1.4. Proposition. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, alors

$$\det(A - \lambda I_n) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

est un polynôme, appelé *polynôme caractéristique* de A et noté $\chi_{_A}(\lambda)$.

Remarque. Pour calculer le déterminant d'une matrice carrée de polynômes, on peut effectuer des opérations élémentaires habituelles **sauf que**

(1) multiplier ou diviser une ligne (ou colonne) par un polynôme non constant;

(2) additionner à une ligne (ou une colonne) le quotient d'une autre ligne (ou colonne) divisé par un polynôme non constant.

Exercice. Calculer $\chi_A(\lambda)$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Solution. On a

$$\chi_{_A}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \overset{L_1+L_2}{=} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3-\lambda \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_2-C_1}{=} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda).$$

De l'autre côté, on a vu que A a pour valeurs propres 2 et 3.

Voici le résultat pour trouver les valeurs propres d'une matrice carrée.

6.1.5. Théorème. Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Les énoncés suivants sont équaivalents.

(1) λ_0 est une valeur propre de A.

(2) λ_0 est une racine de $\chi_{_A}(\lambda)$.

(3) $\mathrm{rg}(A - \lambda_0 I_n) < n$.

Remarque. Comme $\chi_{_A}(\lambda)$ est de degré n, A a au plus n valeurs propres réelles.

Exercice. Trouver les valeurs propres réelles des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -9 \\ -2 & 6 & -6 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution. (1) On calcule le polynôme charactéristique comme suit:

$$\begin{aligned}
\chi_{_A}(\lambda) &= \begin{vmatrix} 7-\lambda & -6 & -9 \\ -2 & 6-\lambda & -6 \\ -1 & -2 & 7-\lambda \end{vmatrix} \overset{L_1-(L_2+L_3)}{=} \begin{vmatrix} 10-\lambda & \lambda-10 & \lambda-10 \\ -2 & 6-\lambda & -6 \\ -1 & -2 & 7-\lambda \end{vmatrix} \\
&\overset{C_2+C_1, C_3+C_1}{=} \begin{vmatrix} 10-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 4-\lambda & -8 \\ -1 & -3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (10-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & -8 \\ -3 & 6-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (10-\lambda)(\lambda^2 - 10\lambda + 24 - 24) = (10-\lambda)^2(0-\lambda).
\end{aligned}$$

D'où, les valeurs propres de A sont 10 et 0.

(2) On a

$$\chi_{_B}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1,$$

ce qui n'a aucune racine réelle. Par conséquent, B n'a aucune valeur propre réelle.

Le résultat suivant nous dit comment trouver les vecteurs propres d'une matrice carrée associés à une valeur propre donnée.

6.1.6. Théorème. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ dont λ_0 est une valeur propre. Les énoncés suivants sont équivalents pour un vecteur $u_0 \in \mathbb{R}^n$.

(1) u_0 est un vecteur propre de A associé à λ_0;

(2) u_0 est une solution non nulle du système homogène $(A - \lambda_0 I_n)X = 0$;

(3) u_0 est un vecteur non nul de $\mathcal{N}(A - \lambda_0 I_n)$.

Remarque. On appelle $\mathcal{N}(A - \lambda_0 I_n)$ *espace propre* de A associé à λ_0.

(1) Une base de $\mathcal{N}(A - \lambda_0 I_n)$ est une famille libre maximale de vecteurs propres associés à λ_0.

(2) $\dim\mathcal{N}(A - \lambda_0 I_n)$ est le plus grand nombre de vecteurs propres linéairement indépendants associés à λ_0, appelé *multiplicité géométrique* de λ_0 et notée $\mathrm{mg}(\lambda_0)$.

(3) D'après le théorème 4.3.12, $\mathrm{mg}(\lambda_0) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda_0 I_n)$.

Exercice. On a vu que 10 est une valeur propre de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -9 \\ -2 & 6 & -6 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

(1) Donner la multiplicité géométrique de la valeur propre 10.

(2) Donner une famille libre maximale de vecteurs propres associés à 10.

Solution. (1) D'après la définition, $\mathrm{mg}(10) = 3 - \mathrm{rg}(A - 10I_3)$. On échelonne

$$A - 10I_3 = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -9 \\ -2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où, $\mathrm{mg}(10) = 2$.

(2) Il s'agit de trouver une base de $\mathcal{N}(A - \lambda_1 I_3)$, c'est-à-dire, l'espace-solution du système homogène $(A - 10I_3)X = 0$. Ce dernier est équivalent au système homogène échelonné

$$x + 2y + 3z = 0,$$

dont les inconnues libres sont y, z. Posant $y = 1, z = 0$; et $y = 0, z = 1$, on obtient une base de $\mathcal{N}(A - \lambda_1 I_3)$ comme suit

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Il s'agit d'une famille libre maximale de vecteurs propres de A associés à 10.

On est prêt de donner un critère pour qu'une matrice carrée soit diagonalisable et une méthode pour la diagonaliser si c'est possible.

6.1.7. Théorème. Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont vérifiées.

(1) $\chi_{_A}(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_1} \cdots (\lambda_s - \lambda)^{n_s}$, où $n_i > 0$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}$ avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ lorsque $i \neq j$.

(2) $\mathrm{mg}(\lambda_i) = n_i$, pour $i = 1, \ldots, s$.

Dans ce cas, si $\mathcal{B}_i$ est une base de $\mathcal{N}(A - \lambda_i I_n)$, pour $i = 1, \ldots, s$, alors

$$\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_s$$

est une base de $\mathbb{R}^n$ composée de vecteurs propres de A, qui forme une matrice inversible P telle que

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}\left\{ \overbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}^{n_1}, \ldots, \overbrace{\lambda_s, \ldots, \lambda_s}^{n_s} \right\} := D$$

où la j-ième colonne de P est un vecteur propre de A associé à la j-ième valeur propre de la diagonale de D, pour $j = 1, \ldots, n$.

Exercice. Donner une décomposition $A = PDP^{-1}$ avec P inversible et D diagonale, où

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -9 \\ -2 & 6 & -6 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Solution. Le problème est de diagonaliser A. On a trouvé $\chi_{_A}(\lambda) = (10 - \lambda)^2(0 - \lambda)$. Donc, A admet deux valeurs propres $\lambda_1 = 10$ et $\lambda_2 = 0$.

(1) *Base de* $\mathcal{N}(A - \lambda_1 I_3)$. On a déjà trouvé une base de $\mathcal{N}(A - \lambda_1 I_3)$ comme suit:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(2) *Base de* $\mathcal{N}(A - \lambda_2 I_3)$. Comme

$$A - \lambda_2 I_3 = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -9 \\ -2 & 6 & -6 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

le système homogène $(A - \lambda_2 I_3)X = 0$ est équivalent au système homogène échelonné

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 7z & = & 0 \\ & & y & - & 2z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0, \end{array}$$

dont l'inconnue libre est z. Posant $z = 1$, on a une base de $\mathcal{N}(A - \lambda_1 I_3)$ comme suit:

$$u_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ceci donne une base $\{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ composée de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $10, 10, 0$ repectivelement. On pose

$$P = (u_1 u_2 u_3) = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

ce qui est inversible telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} := D.$$

Ceci donne une décomposition $A = PDP^{-1}$.

On conclut cette section avec la diagonalisation de transformation linéaire.

6.1.8. Définition. Une transformation linéaire T de $\mathbb{R}^n$ est dite *diagonalisable* s'il existe une base $\{u_1, \cdots, u_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que

$$[T]_{\{u_1, \cdots, u_n\}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire, $T(u_i) = \lambda_i u_i$, pour $i = 1, \ldots, n$. Si les λ_i sont tous non nuls, on dit que T est un *changement d'échelle*.

Exemple. La projection p_x de $\mathbb{R}^2$ sur l'axe des x

$$p_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable. En effet, d'après le lemme 5.3.3, on voit que

$$[p_x]_{\{e_1, e_2\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ce qui est diagonale.

Voici le critère et le procédé de la diagonalisation d'une transformation linéaire.

6.1.9. Théorème. Une transformation linéaire T de $\mathbb{R}^n$ est diagonalisable si, et seulement si, sa matrice A dans la base canonique est diagonalisable. Dans ce cas, si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ composée de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, respectivement, alors

$$[T]_{\{u_1,\ldots,u_n\}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Exercice. Diagonaliser la transformation linéaire suivante:

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - 3y + 3z \\ 3x - 5y + 3z \\ 6x - 6y + 4z \end{pmatrix}.$$

Solution. D'abord,

$$[T]_{\{e_1,e_2,e_3\}} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} := A.$$

D'après le théorème 6.1.9, on doit diagonaliser la matrice A. Pour ce faire, on calcule

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} \overset{L_1-L_2}{=} \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2+\lambda & 0 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+2) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_2+C_1}{=} (\lambda+2) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2-\lambda & 3 \\ 6 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+2)(-1) \begin{vmatrix} -2-\lambda & 3 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)^2(4-\lambda).
\end{aligned}$$

D'où, les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = 4$.

(1) *Base de* $\mathcal{N}(A - \lambda_1 I_3)$. On échelonne

$$A - (-2)I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette dernière matrice représente le système homogène échelonné

$$x - y + z = 0,$$

dont les inconnues libres sont y, z. Posant $y = 1, z = 0$; et $y = 0, z = 1$, on obtient une base de $\mathcal{N}(A - \lambda_1 I_3)$ comme suit:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(2) *Base de* $\mathcal{N}(A - \lambda_2 I_3)$. On échelonne

$$A - 4I_3 = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette dernière représente le système homogène échelonné

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & 2y & - & z & = & 0, \end{array}$$

dont z est la seule inconnue libre. Posant $z = 2$, on trouve une base de $\mathcal{N}(A - \lambda_2 I_3)$ comme suit:

$$\left\{ u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

D'après le théorème 6.2.9, $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$[T]_{\{u_1, u_2, u_3\}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

6.2. Algorithme PageRank

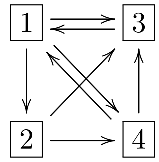
Un réseau de pages web se compose d'un nombre fini de pages et des liens entre eux. Un moteur de recherche affiche des pages web selon leur importance de sorte que la page la plus importante apparaît en premier. Le PageRank, inventé par Larry Page, est l'algorithme utilisé par Google pour classer les pages web. Pour établir le modèle mathématique, on doit représenter un réseau de pages web par un graphe orienté.

6.2.1. Définition. Un réseau de n pages web est représenté par un graphe orienté tel que défini ci-dessous:

(1) Les pages sont représentées par les entiers $1, 2, \ldots, n$.

(2) Un lien de la page i vers la page j sera représenté par une flèche $i \to j$.

Exemple. Le graphe orienté suivant représente un réseau de 4 pages web et 8 liens.



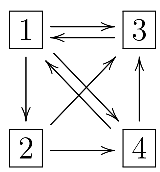
6.2.2. Définition. Soit W un réseau des pages web $1, 2, \ldots, n$. Soit l_j le nombre de liens sortant de la page j, pour $j = 1, 2, \ldots, n$. On définit *matrice des liens* de W comme suit:

$$L = (l_{ij})_{n\times n},$$

où

$$l_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{l_j}, & \text{s'il existe un lien de la page } j \text{ vers la page } i; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple. Soit W le réseau de pages web représenté par le graphe suivant:



Comme $l_1 = 3$, $l_2 = 2$, $l_3 = 1$ et $l_4 = 2$, la matrice des liens de W est donnée par

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'algorithme PageRank attribue à chaque page une valeur comprise entre 0 et 1, appelée *score d'importance*, selon le principal suivant: le score d'importance d'une page est d'autant plus grand qu'elle a un grand nombre de pages importantes la référençant.

6.2.3. Définition. Soit W un réseau des pages web $1, \ldots, n$. Soit l_j le nombre de liens sortant de la page j, pour $j = 1, \ldots, n$. À chaque page i, on donne une valeur a_i avec $0 < a_i < 1$, appelée *score d'importance* de la page i, de sorte que

(1) $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$;

(2) $a_i = \sum_{\exists\, j\to i} \frac{a_j}{l_j} = \sum_{j=1}^{n} l_{ij} a_j$, pour $i = 1, \ldots, n$.

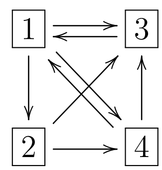
Dans ce cas,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

s'appelle *vecteur des scores d'importance* pour W.

Remarque. Chaque la page j distribue un l_j-ième de son score à chacune des pages vers lesquelles elle a un lien. La définition 6.2.3(2) dit que le score de la page i est à égal la somme des scores qu'elle a reçu des autres pages.

Exemple. Considérons le réseau de pages web suivant:



On voit que $l_1 = 3$, $l_2 = 2$, $l_3 = 1$ et $l_4 = 2$; et la matrice des liens est

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si x_1, x_2, x_3, x_4 sont les scores d'importance des pages $1, 2, 3, 4$ respectivement, alors

$$\begin{array}{rclllllll} x_1 & = & & & & & \frac{x_3}{1} & + & \frac{x_4}{2} \\ x_2 & = & \frac{x_1}{3} & & & & & & \\ x_3 & = & \frac{x_1}{3} & + & \frac{x_2}{2} & & & + & \frac{x_4}{2} \\ x_4 & = & \frac{x_1}{3} & + & \frac{x_2}{2} & & & & \end{array}$$

D'où

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire, le vecteur des scores d'importance est un vecteur propre de la matrice des liens associé à la valeur propre 1.

6.2.4. Proposition. Soit W un réseau de pages web dont la matrice des liens est L. Un vecteur des scores d'importance de W est un vecteur propre de L associé à la valeur propre 1 dont les termes sont strictement positifs et somment à 1.

On étudiera quand un réseau de pages web admet un seul vecteur des scores d'importance.

6.2.5. Définition. Un réseau de pages web est dit *fortement connexe* si son graphe orienté admet un cycle orienté passant par toutes les pages.

Remarque. Si W est fortement connexe, alors toutes les deux pages i, j peuvent être rejointes par un chemin comme suit:

$$i \longrightarrow j_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow j_s \longrightarrow j.$$

Exemple. Le réseau de pages web suivant est fortement connexe:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{1} \arrow[r, shift left] \arrow[d] \arrow[dr, shift left] & \boxed{3} \arrow[l, shift left] \\
\boxed{2} \arrow[r] \arrow[ur] & \boxed{4} \arrow[u] \arrow[ul, shift left]
\end{tikzcd}$$

En effet, on trouve un cycle orienté comme suit:

$$\boxed{1} \longrightarrow \boxed{2} \longrightarrow \boxed{4} \longrightarrow \boxed{3} \longrightarrow \boxed{1}.$$

6.2.6. Théorème. Soit W un réseau de pages web dont L est la matrice des liens. Si W est fortement connexe, alors L admet un vecteur propre u_0 associé à la valeur 1 tel que

$$v = \frac{1}{a}\, u_0$$

est le seul vecteur des scores d'importance pour W, où a est la somme des termes de u_0.

Exercice. Trouver le vecteur des scores d'importance du réseau de pages web suivant:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{1} \arrow[r, shift left] \arrow[d] \arrow[dr, shift left] & \boxed{3} \arrow[l, shift left] \\
\boxed{2} \arrow[r] \arrow[ur] & \boxed{4} \arrow[u] \arrow[ul, shift left]
\end{tikzcd}$$

Solution. On voit que ce réseau est fortement connexe et sa matrice des liens est

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'abord, on cherche un vecteur propre de L associé à la valeur propre 1, c'est-à-dire, une solution non nulle du système homogène $(L - I_4)X = 0$. Comme

$$L - I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -6 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Cette dernière matrice représente le système homogène suivant

$$\begin{array}{rrrrcl} x_1 & & & - \ 2x_4 & = & 0 \\ & 3x_2 & & - \ 2x_4 & = & 0 \\ & & 2x_3 & - \ 3x_4 & = & 0, \end{array}$$

dont l'inconnue libre est x_4. Posant $x_4 = 6$, on obtient $x_3 = 9$, $x_2 = 4$ et $x_1 = 12$. Ceci donne un vecteur propre strictement positif de L associé à 1 comme suit:

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Comme $12 + 4 + 9 + 6 = 31$, on voit que

$$\frac{1}{31} \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

est le vecteur des scores d'importance de W. C'est-à-dire, les scores d'importance des pages sont donnés par

$$a_1 = \frac{12}{31},\ a_2 = \frac{4}{31},\ a_3 = \frac{9}{31},\ a_4 = \frac{6}{31}.$$

6.3. Exercices

1. Considérer la matrice réelle suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que la valeur 2 est une valeur propre de A; et calculer sa multiplicité géométrique.

2. Dans chacun des cas suivants, trouver la valeur réelle de a pour que la valeur 3 soit une valeur propre, et dans ce cas, calculer la multiplicité géométrique de 3.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ a & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Montrer qu'une matrice carrée A est inversible si, et seulement si, la valeur 0 n'est pas valeur propre A.

4. Soit A une matrice inversible. Montrer que si λ_0 est une valeur propre de A, alors $\dfrac{1}{\lambda_0}$ est une valeur propre de A^{-1}.

5. Diagonaliser, si possible, la matrice suivante:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Vérifier que la transformation linéaire suivante est un changement d'échelle :

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + y \\ 2x + 3y \end{pmatrix}.$$

7. Diagonaliser la transformation linéaire suivante :

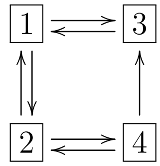
$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -4x - 4y - 8z \\ 4x + 6y + 4z \\ 6x + 4y + 10z \end{pmatrix}.$$

8. (**MATLAB**) Considérer la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(1) Trouver le polynôme caractéristique de A.
(2) Trouver les valeurs propres de A.
(3) Donner une décomposition $A = PDP^{-1}$, avec P inversible et D diagonale.

9. Soit W un réseau de pages web représenté par le graphe suivant:

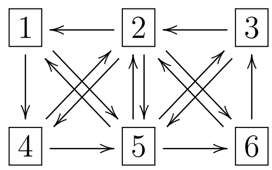


(1) Donner la matrice des liens L de W.

(2) Vérifier que W est fortement connexe.

(3) Donner le vecteur des scores d'importance de W.

10. (**MATLAB**) Donner le vecteur des scores d'importance du réseau des pages web suivant:



Chapitre VII: Espaces euclidiens

Outre la structure d'espace vectoriel réel, le plan admet une géométrie euclidienne qui mesure la longueur, la distance, et l'angle de vecteurs. Le but de ce chapitre est de généraliser ces notions aux espaces vectoriels réels de dimensions supérieures.

7.1. Produit scalaire

La géométrie euclidienne de $\mathbb{R}^n$ est basée sur la notion de produit scalaire tel que défini ci-dessous.

7.1.1. Théorème. Le *produit scalaire* sur $\mathbb{R}^n$ est, par définition, la fonction de deux variables suivante:

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (u, v) \mapsto u^T v := \langle u, v\rangle,$$

qui est bilinéaire, symétrique et défini positif, c'est-à-dire, pour $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ et $a, b \in \mathbb{R}$,

(1) $\langle au + bv, w\rangle = a\langle u, w\rangle + b\langle v, w\rangle$; $\langle u, av + bw\rangle = a\langle u, v\rangle + b\langle u, w\rangle$;

(2) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$;

(3) $\langle u, u\rangle$ est strictement positif pour tout $u \neq \mathbf{0}$.

Remarque. Muni du produit scalaire, l'espace réel $\mathbb{R}^n$ s'appelle *espace euclidien.*

Exemple. Si

$$u = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

alors

$$\langle u, v\rangle = u^T v = -2 + 3 - 6 = -5.$$

On généralise la notion de la longueur d'un vecteur du plan comme suit.

7.1.2. Définition. Pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, on définit *longueur* de u comme étant

$$||u|| := \sqrt{\langle u, u\rangle} \in \mathbb{R}^+.$$

En outre, un vecteur de longueur 1 est dit *unitaire.*

Le résultat suivant est évident.

7.1.3. Lemme. Soient $u \in \mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}$.
(1) $||au|| = |a| \cdot ||u||$.

(2) $u \neq \mathbf{0}$ si, et seulement si, $||u|| \neq 0$.
(3) Si $u \neq \mathbf{0}$, alors $\frac{u}{||u||}$ est unitaire, appelé le vecteur unitaire de *même direction* que u.

Exercice. Donner le vecteur unitaire de même direction que le vecteur suivant:

$$u = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Solution. Comme $||u|| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{29}$, le vecteur

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{29}} \\ -\frac{2}{\sqrt{29}} \\ \frac{3}{\sqrt{29}} \end{pmatrix}$$

est le vecteur unitaire de même direction que u.

7.1.4. Définition. Pour tous $u, v \in \mathbb{R}^n$, on définit *distance* entre u et v comme étant

$$d(u, v) := ||u - v||.$$

Exercice. Calculer la distance entre les vecteurs suivants:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Solution. D'après la définition, on a

$$d(u, v) = ||u - v|| = \sqrt{(1-3)^2 + (2-2)^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{2}.$$

La longueur de vecteur satisfait à une inégalité importante énoncées ci-dessous.

7.1.5. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Si $u, v \in \mathbb{R}^n$, alors

$$|\langle u, v\rangle| \leq ||u|| \cdot ||v||.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz nous permet de généraliser la notion d'un angle non orienté dans le plan.

7.1.6. Définition. Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$ tous non nuls. Comme

$$\frac{|\langle u, v\rangle|}{||u|| \cdot ||v||} \leq 1,$$

il existe un unique angle $\theta \in [0, \pi]$ tel que

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{||u|| \cdot ||v||}.$$

On appelle θ *angle non orienté* entre u et v.

Remarque. Selon la définition 7.1.6, on a

$$\langle u, v\rangle = ||u|| \cdot ||v|| \cdot \cos\theta.$$

Exercice. Trouver l'angle non-orienté θ entre les vecteurs suivants:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Solution. Par définition, on a

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{||u|| \cdot ||v||} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

D'où, $\theta = \frac{\pi}{4}$.

7.2. Orthogonalité

7.2.1. Définition. Deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^n$ sont dits *orthogonaux*, noté $u \perp v$, si $\langle u, v\rangle = 0$.

Remarque. (1) Si $u \in \mathbb{R}^n$, alors $u \perp \mathbf{0}$.

(2) Deux vecteurs non nuls $u, v \in \mathbb{R}^n$ sont orthogonaux si, et seulement si, l'angle non orienté entre eux est $\frac{\pi}{2}$.

Exemple. Les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$ sont orthogonaux:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

7.2.2. Lemme. Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, alors

$$F^{\perp} := \{u \in \mathbb{R}^n \mid u \perp v, \text{ pour tout } v \in F\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, appelé *orthogonal* de F.

Exercice. Vérifier que $\mathbf{0}^\perp = \mathbb{R}^n$, où $\mathbf{0} = \{0\}$ est le sous-espace vectoriel nul de $\mathbb{R}^n$.

Preuve. Par définition, $\mathbf{0}^\perp \subseteq \mathbb{R}^n$. De l'autre côté, soit $u \in \mathbb{R}^n$. Comme $u \perp 0_{n\times 1}$, on a $u \in \mathbf{0}^\perp$. D'où, $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbf{0}^\perp$. Ceci montre que $\mathbf{0}^\perp = \mathbb{R}^n$.

Exercice. Soit D_x l'axe des x de $\mathbb{R}^3$. Vérifier que $D_x^\perp = P_{y,z}$, le plan des y, z.

Démonstration. D'abord, tout $v \in P_{y,z}$ s'écrit

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Pour tout

$$u = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in D_x,$$

on a $\langle u, v\rangle = 0$. Ainsi $v \in D_x^\perp$. D'où $P_{y,z} \subseteq D_x^\perp$. Réciproquement, soit

$$w = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in D_x^\perp.$$

Comme $e_1 \in D_x$, par définition,

$$0 = \langle w, e_1\rangle = a.$$

Donc, $w \in P_{y,z}$. Par conséquent, $D_x^\perp \subseteq P_{y,z}$. Cela donne $D_x^\perp = P_{y,z}$. En outre, on remarque

$$\dim(D_x) + \dim(D_x^\perp) = 1 + 2 = \dim(\mathbb{R}^3).$$

Le résulat suivant nous dit en particulier comment calculer l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel lorsqu'un ensemble des générateurs est connu.

7.2.3. Théorème. Soit F un sous-espavce vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

(1) $\dim(F) + \dim(F^\perp) = n$.

(2) $(F^\perp)^\perp = F$.

(3) Si F est engendré par $v_1, \ldots, v_r$, alors

$$F^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n \mid u \perp v_i, i = 1, \ldots, r\}.$$

Exercice. Vérifier que $(\mathbb{R}^n)^\perp = \mathbf{0}$.

Preuve. On a vu que $\mathbf{0}^\perp = \mathbb{R}^n$. D'après le théorème 7.2.3(2), on a

$$(\mathbb{R}^n)^\perp = (\mathbf{0}^\perp)^\perp = \mathbf{0}.$$

Exercice. Trouver une base de $\ell^\perp$, où ℓ est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$2x - y = 0.$$

Solution. Par hypothèse, ℓ est l'espace-solution du système homogène

$$2x - y = 0,$$

dont l'inconnue libre est y. Posant $y = 2$, on obtient une base de ℓ comme suit:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

En particulier, ℓ est engendrée par u_1. Pour tout

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

d'après le théorème 7.2.3(3), $v \in \ell^\perp$ si, et seulement si, $\langle v, u_1 \rangle = 0$ si, et seulement si, $x + 2y = 0$. C'est-à-dire, $\ell^\perp$ est l'espace-solution du système homogène

$$x + 2y = 0.$$

Posant $y = 1$, on trouve une base de $\ell^\perp$ comme suit:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Plus généralement, on a la notion suivante.

7.2.4. Définition. Une famille $\{u_1, \ldots, u_r\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est dite
(1) *orthogonale* si $\langle u_i, u_j \rangle = 0$, pour tous $1 \le i, j \le r$ avec $i \neq j$;
(2) *orthonormée* si, pour tous $1 \le i, j \le r$, on a

$$\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j; \\ 1, & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Remarque. Une famille orthonormée est une famille orthogonale de vecteurs unitaires.

Exemple. (1) Pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, la famille $\{u\}$ est orthogonale.
(2) Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, la famille

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

est orthogonale, mais non orthonormée. En outre, la famille

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

est orthonormée.

Le résultat suivant est pratique pour déterminer une famille de vecteurs est orthogonale ou orthonormée.

7.2.5. Proposition. Si $A = (A_1 \cdots A_n) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ est partagée en colonnes, alors
(1) $\{A_1, \ldots, A_n\}$ est orthogonale si, et seulement si, $A^T A$ est diagonale;
(2) $\{A_1, \ldots, A_n\}$ est orthonormée si, et seulement si, $A^T A = I_n$.

Exercice. Vérifier que la famille

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

est orthogonale, mais non orthonormée.
Démonstration. Posons

$$A = (u_1\, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme

$$A^T A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix},$$

d'après la proposition 7.2.5, $\{u_1, u_2\}$ est orthogonale, mais non orthonormée.

Le résultat suivant nous dit, en particulier, comment obtenir une famille orthonormée à partir d'une famille orthogonale.

7.2.6. Lemme. Soit $\{u_1, \ldots, u_r\}$ une famille orthogonale de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Si $u_1, \ldots, u_r$ sont tous non nuls, alors $\{u_1, \ldots, u_r\}$ est libre, et on a une famille orthonormée

$$\left\{ \frac{u_1}{||u_1||}, \ldots, \frac{u_r}{||u_r||} \right\}.$$

Remarque. En générale, une famille orthogonale n'est pas nécessairement libre. Cependant, une famille orthonormée est toujours libre.

Exemple. Considérons la famille

$$\left\{ u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Comme $\langle u, v \rangle = 0$, elle est orthogonale. Comme u, v sont tous non nuls, elle est libre. En outre, les vecteurs

$$\frac{u}{||u||} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad \frac{v}{||v||} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

forment une famille orthonormée.

7.2.7. Définition. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Une base de F est dite *orthogonale* ou *orthonormée* si elle est une famille orthogonale ou orthonormée, respectivement.

Exemple. La base canonique $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormée.

Exercice. Vérifier que le plan

$$P_{x,y} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

a pour base orthonormée

$$\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Démonstration. Comme $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$ et $||e_1|| = ||e_2|| = 1$, on voit que $\{e_1, e_2\}$ est une famille orthonormée. En particulier, elle est libre. En suite, tout

$$u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \in P_{x,y}$$

s'écrit $u = ae_1 + be_2$. Ainsi $\{e_1, e_2\}$ est une base, et donc, une base orthonormée, de $P_{x,y}$.

7.2.8. Définition. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, dont $\{u_1, \ldots, u_r\}$ est une base orthonormée. Pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, on définit sa *projection orthogonale* sur F par

$$\mathrm{proj}_F v = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \cdots + \langle v, u_r \rangle u_r.$$

Exemple. Soit P_{xy} le plan des x, y de $\mathbb{R}^3$, dont $\{e_1, e_2\}$ est une base orthonormée. Pour tout

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

on voit que

$$\operatorname{proj}_{P_{x,y}} v = \langle v, e_1\rangle e_1 + \langle v, e_2\rangle e_2 = xe_1 + ye_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le résultat suivant ramasse des propriétés de projection orthogonale.

7.2.9. Théorème. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, dont $\{u_1, \ldots, u_r\}$ est une base orthonormée. Si $v \in \mathbb{R}^n$, alors

(1) $v - \operatorname{proj}_{_F} v \in F^{\perp}$;

(2) $v \in F$ si, et seulement si, $v = \operatorname{proj}_{_F} v$, c'est-à-dire,

$$v = \langle v, u_1\rangle u_1 + \cdots + \langle v, u_r\rangle u_r.$$

Remarque. Le théorème 7.2.9(1) explique cette projection est orthogonale.

(2) Le théorème 7.2.9(2) donne une méthode facile à trouver les coordonnées d'un vecteur de F dans la base orthonormée $\{u_1, \ldots, u_r\}$.

Exercice. Considérer les vecteurs suivants:

$$u_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}; v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

(1) Vérifier que $\{u_1, u_2\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$.

(2) Trouver les coordonnées de v dans $\{u_1, u_2\}$.

Solution. (1) Posns

$$A = (u_1\, u_2) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On voit aisément que

$$A^T A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après la proposition 7.2.5(2), la famille $\{u_1, u_2\}$ est orthonormée, et donc, libre.

Comme $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, d'après le théorème 4.1.15, $\{u_1, u_2\}$ est une base, et donc, une base orthonormée, de $\mathbb{R}^2$.

(2) Comme $v \in \mathbb{R}^2$, d'après le théorème 7.2.9(2), on a

$$v = \operatorname{proj}_{_{\mathbb{R}^2}} v = \langle v, u_1\rangle u_1 + \langle v, u_2\rangle u_2 = \frac{5}{\sqrt{2}}\, u_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\, u_2.$$

Ainsi

$$P_{\{u_1,u_2\}}^{\{v\}} = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

On étudiera comment trouver une base orthonormée d'un sous-espace vectoriel. On commencera par des droites vectorielles. Le résultat suivant est une conséquence immédiate du lemme 7.2.6.

7.2.10. Lemme. Soit D une droite vectorielle de $\mathbb{R}^n$. Si u est un vecteur non nul de D, alors

$$\left\{ \frac{u}{||u||} \right\}$$

est une base orthonormée de D.

Exemple. Si D est la droite vectorielle passant par

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

alors D a pour base orthonormée

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

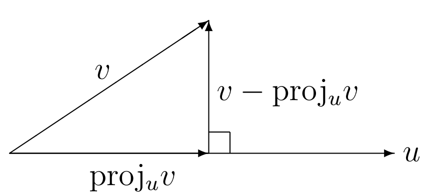
Utilisant une base ornomrée d'une droite vectorielle ci-haut mentionnée, on peut calculer facilement la projection orthogonale d'un vecteur sur celle-ci.

7.2.11. Proposition. Soit D une droite vectorielle de $\mathbb{R}^n$ engendrée par un vecteur u. Si $v \in \mathbb{R}^n$, alors

(1) $\text{proj}_{_D} v = \frac{\langle v,u \rangle}{\langle u,u \rangle}\, u$;

(2) $v - \text{proj}_{_D} v \in D^{\perp}$.

Remarque. On écrit $\text{proj}_{_u} v = \text{proj}_{_D} v$, appelé *projection orthogonale* de v sur u. Ceci est illustrée par le diagramme suivant:



Exercice. Considérer les vecteurs de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ suivants:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \; v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $(v - \text{proj}_u v) \perp u$.

Solution. Par définition, on a

$$\text{proj}_u v = \frac{\langle v, u\rangle}{\langle u, u\rangle} u = \frac{2}{6} u = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} ; \; v - \text{proj}_u v = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

On calcule

$$\langle v - \text{proj}_u v, u\rangle = \frac{1}{3} \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \rangle = 0.$$

Le résultat suivant donne la méthode pour trouver une base orthonormée d'un sous-espace vectoriel général de $\mathbb{R}^n$.

7.2.12. Procédé de Gram-Schmidt. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, dont $\{u_1, \ldots, u_r\}$ est une base. Si l'on pose successivement

$$\begin{array}{rcl}
v_1 & = & u_1; \\
v_2 & = & u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1; \\
v_3 & = & u_3 - \frac{\langle u, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2; \\
& \vdots & \\
v_i & = & u_r - \frac{\langle u_i, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 - \frac{\langle u_i, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2 - \cdots - \frac{\langle u_i, v_{r-1}\rangle}{\langle v_{i-1}, v_{i-1}\rangle} v_{i-1}; \\
& \vdots & \\
v_r & = & u_r - \frac{\langle u_r, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 - \frac{\langle u_r, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2 - \cdots - \frac{\langle u_r, v_{r-2}\rangle}{\langle v_{r-2}, v_{r-2}\rangle} v_{r-2} - \frac{\langle u_r, v_{r-1}\rangle}{\langle v_{r-1}, v_{r-1}\rangle} v_{r-1},
\end{array}$$

alors $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ est une base orthogonale de F, et donc

$$\left\{ \frac{v_1}{||v_1||}, \frac{v_2}{||v_2||}, \cdots, \frac{v_r}{||v_r||} \right\}$$

est une base orthonormée de F.

Exercice. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Donner une base orthonormée de $\mathcal{C}(A)$.
(2) Calculer $\text{proj}_{\mathcal{C}(A)} v$.
(3) Déterminer si $v \in \mathcal{C}(A)$ ou non.

Solution. Comme $\text{rg}(A) = 3$, d'après la proposition 4.3.9(3), $\mathcal{C}(A)$ a pour base

$$\left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(1) Posons $B_1 = A_1$, et calculons

$$\langle B_1, B_1 \rangle = 2,\ \langle A_2, B_1 \rangle = 1,\ \langle A_3, B_1 \rangle = 0.$$

(2) Posons

$$B_2 = A_2 - \frac{\langle A_2, B_1 \rangle}{\langle B_1, B_1 \rangle} B_1 = A_2 - \frac{1}{2} B_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

et calculons

$$\langle B_2, B_2 \rangle = \frac{5}{2},\ \langle A_3, B_2 \rangle = 1.$$

(3) Posons

$$B_3 = A_3 - \frac{\langle A_3, B_1 \rangle}{\langle B_1, B_1 \rangle} B_1 - \frac{\langle A_3, B_2 \rangle}{\langle B_2, B_2 \rangle} B_2 = A_3 - \frac{2}{5} B_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix},$$

et calculons

$$\langle B_3, B_3 \rangle = \frac{3}{5}.$$

Cela nous donne une base orthogonale $\{B_1, B_2, B_3\}$ de $\mathcal{C}(A)$. Posant

$$C_1 = \frac{B_1}{||B_1||} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ C_2 = \frac{B_2}{||B_2||} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ C_3 = \frac{B_3}{||B_3||} = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix},$$

d'après le lemme 7.2.6, $\{C_1, C_2, C_3\}$ est une base orthonormée de $\mathcal{C}(A)$.

Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ de rang n. D'après la proposition 4.3.9, les colonnes de A forment une base de $\mathcal{C}(A)$. En appliquant le procédé de Gram-Schmidt à cette base, on obtient une base orthonormée de $\mathcal{C}(A)$. En vue de la construction du Gram-Schmidt, on obtient le résultat suivant.

7.2.13. Théorème. Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ de rang n. Soit $\{C_1, \ldots, C_n\}$ la base orthonormée de $\mathcal{C}(A)$ obtenue en appliquant Gram-Schmidt aux colonnes de A. Si l'on pose $Q = (C_1 \cdots C_n) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, alors
(1) $Q^T Q = I_n$;
(2) $R = Q^T A \in M_n(\mathbb{R})$ est triangulaire supérieure;
(3) $A = QR$, appelée *décomposition QR* de A.

Exercice. Donner une décomposition QR de la matrice suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution. On a trouvé, à l'aide du procédé de Gram-Schmidt aux colonnes de A, une base orthonormée de $\mathcal{C}(A)$ suivante:

$$\left\{ C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ C_3 = \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Posons

$$Q = (C_1\, C_2\, C_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{15}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{15}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{15}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{10}} & -\frac{2}{\sqrt{15}} \end{pmatrix}$$

Alors

$$R = Q^T A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{15}} & -\frac{1}{\sqrt{15}} & \frac{3}{\sqrt{15}} & -\frac{2}{\sqrt{15}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{10}} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{15}} \end{pmatrix}$$

est triangulaire supérieure telle que

$$A = QR = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{15}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{15}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{15}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{10}} & -\frac{2}{\sqrt{15}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{10}} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{15}} \end{pmatrix}.$$

7.3. Géométrie analytique

Le but de cette section est d'appliquer les résultats de la section précédante pour étudier la géométrie de l'espace $\mathbb{R}^3$. Considérons un plan vectoriel P de $\mathbb{R}^3$. D'après le théorème 7.2.3(1), $P^\perp$ est de dimension 1, c'est-à-dire, une droite vectorielle engendré par un vecteur non nul. Cette observation conduit à la notion suivante.

7.3.1. Définition. Soit P un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Un vecteur non nul de $P^\perp$ s'appelle *vecteur normal* à P.

Le résultat suivant sera utile pour trouver l'équation d'un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

7.3.2. Proposition. Un plan vectoriel P de $\mathbb{R}^3$ est défini par l'équation

$$ax + by + cz = 0$$

si, et seulement si,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

est un vecteur normal à P.

On va donner une méthode pour trouver un vecteur normal à un plan vectoriel, en utilisant la notion du produit vectoriel tel que défini ci-dessous.

7.3.3. Définition. Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Pour

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

on définit le *produit vectoriel* de u et v par

$$u \wedge v := (y_1 z_2 - y_2 z_1)e_1 - (x_1 z_2 - x_2 z_1)e_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)e_3 \in \mathbb{R}^3,$$

c'est-à-dire,

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & e_1 \\ y_1 & y_2 & e_2 \\ z_1 & z_2 & e_3 \end{vmatrix},$$

un déterminant formel développé suivant la dernière colonne.

Exemple.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & e_1 \\ 2 & 1 & e_2 \\ 3 & 1 & e_3 \end{vmatrix} = -e_1 + 2e_2 - e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On rassemble des propriétés élémentaires du produit vectoriel dans le résultat suivant.

7.3.4. Proposition. Soient u, v des vecteurs non co-linéaires de $\mathbb{R}^3$. On sait que le sous-espace vectoriel P de $\mathbb{R}^3$ engendré par u, v est un plan vectoriel.
(1) $u \wedge v$ est un vecteur normal à P.
(2) $\det(u, v, u \wedge v) = ||u \wedge v||^2 > 0$.
(3) $u \wedge v = -(v \wedge u)$.

Exercice. Donner une équation du plan vectoriel P engendré par

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Solution. On a vu que

$$u \wedge v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

ce qui est normal à P d'après la proposition 7.3.4. Ainsi, P est défini par l'équation suivante:

$$-x + 2y - z = 0.$$

En conséquence de la proposition 7.3.4, on obtient une méthode suivante pour plonger un vecteur non nul dans une base orthogonale.

7.3.5. Corollaire. Soit L une droite vectorielle engendrée par un vecteur u. On prend un vecteur non nul $v \in \mathbb{R}^3$ avec $\langle u, v \rangle = 0$ et pose $w = u \wedge v$. Alors
(1) $\{v, w\}$ est une base orthogonale de $L^\perp$.
(2) $\{u, v, w\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ avec $\det(u,\, v,\, w) > 0$.

Exercice. Plonger u en une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$, où

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Solution. Les vecteurs orthogonaux à u sont les solutions de l'équation suivante:

$$x + y + z = 0.$$

Posant $y = 1$ et $z = 0$, on trouve $x = -1$. Ceci donne un vecteur

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $\langle v, u\rangle = 0$. Maintenant, calculons

$$w = u \wedge v = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ceci nous donne une base orthogonale $\{u, v, w\}$ de $\mathbb{R}^3$. En outre, $\det(u\,v\,w) = 6$.

On conclut cette section par la notion d'un angle orienté entre deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

7.3.6. Définition. Soit P un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ auquel w est un vecteur normal. Si $u, v \in P$ sont non nuls, alors un angle de u à v *orienté par* w est un angle θ tel que

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{||u|| \cdot ||v||} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{\det(u, v, w)}{||u|| \cdot ||v|| \cdot ||w||}.$$

Exercice. Donner un angle θ de u à v orienté par $v \wedge u$, où

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Solution. D'abord, $\langle u, v\rangle = -1$, $||u|| = \sqrt{2}$ et $||v|| = \sqrt{2}$. D'où

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{||u|| \cdot ||v||} = -\frac{1}{2}.$$

En suite,

$$w = v \wedge u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

avec $||w|| = \sqrt{3}$. Comme

$$\det(u, v, w) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3,$$

on a

$$\sin\theta = \frac{\det(u, v, w)}{||u|| \cdot ||v|| \cdot ||w||} = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Pour trouver θ, on commence par un angle $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que

$$\cos\phi = |\cos\theta| = \frac{1}{2}; \qquad \sin\phi = |\sin\theta| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Selon le tableau, on voit que $\phi = \frac{\pi}{3}$. Comme $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sont tous négatifs, θ se trouve dans le troisième quadrant. Ainsi,

$$\theta = \pi + \phi = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

7.4. Matrices orthognales

Le but de cette section est d'étudier une classe importante de matrices, appelées *matrice orthogonales*. En appliquant la proposition 7.2.5(2), le lemme 7.2.6 et le corollaire 4.2.6, on a le résultat suivant.

7.4.1. Théorème. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, dont les colonnes sont $A_1, \ldots, A_n$. Les conditions suivantes sont équivalentes:
(1) A est inversible avec $A^{-1} = A^T$.
(2) $A^TA = I_n$.
(3) $\{A_1, \ldots, A_n\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
Dans ce cas, on dit que A est *orthogonale*.

Remarque. Soit A une matrice orthogonale.
(1) Si l'on permute des colonnes de A, la matrice résultante est orthogonale.
(2) Si l'on multiplie une colonne de A par -1, la matrice résultante est orthogonale.

Exemple. (1) Une matrice identité est orthogonale.
(2) Pour tout angle θ, les matrices suivantes sont orthogonales:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

On ramasse des propriétés de matrices orthogonales dans le résultat suivant.

7.4.2. Proposition. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.
(1) Si A est orthogonale, alors A^T est orthogonale.
(2) Si A, B sont orthogonales, alors AB est orthogonale.

Remarque. Lorsqu'on permute des lignes d'une matrice orthogonale, la matrice résultante est orthogonale.

Exemple. Pour tout angle θ, les matrices suivantes sont orthogonales:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le résultat suivant est un cas particulier du théorème 7.2.13.

7.4.3. Corollaire. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible, alors

$$A = QR,$$

où Q est orthogonale et R est triangulaire supérieure.

En vertu des théorèmes 4.2.9 et 4.2.10 et la proposition 7.4.2, on obtient le résultat suivant, qui nous dit comment calculer les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée et comment trouver la matrice de passage entre deux bases orthonormées.

7.4.4. Théorème. Soit $\{u_1, \ldots, u_n\}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
(1) Pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^n$, on a

$$P_{\{u_1,\ldots,u_n\}}^{\{u\}} = (u_1 \ \cdots \ u_n)^T u.$$

(2) Des vecteurs $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ forment une base orthonormée si, et seulement si, $P_{\{u_1,\ldots,u_n\}}^{\{v_1,\ldots,v_n\}}$ est orthogonale; et dans ce cas,

$$P_{\{u_1,\ldots,u_n\}}^{\{v_1,\ldots,v_n\}} = (u_1 \ \cdots \ u_n)^T (v_1 \ \cdots \ v_n).$$

Exercice. Considérons deux bases orthonormées de $\mathbb{R}^2$ suivantes:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right\} \text{ et } \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \right\}.$$

(1) Donner les coordonnées de u dans la base $\{u_1, u_2\}$, où

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(2) Donner la matrice de passage de $\{u_1, u_2\}$ à $\{v_1, v_2\}$.

Solution. (1) D'après la proposition 7.4.4(1), on a

$$P_{\{u_1,u_2\}}^{\{u\}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

(2) D'après le théorème 7.4.4(2), la matrice de passage de $\{u_1, u_2\}$ à $\{v_1, v_2\}$ est

$$(u_1\, u_2)^T(v_1\, v_2) = \frac{\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{3}+1 & -\sqrt{3}-1 \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

ce qui est orthogonale.

7.5. Matrices symétriques

Le but de cette section est la diagonalisation d'une matrice symétrique par une matrice orthogonale, qui sera utile dans la mécanique quantique.

7.5.1. Proposition. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique, alors

(1) $\chi_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda)$, avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$;

(2) deux vecteurs propres de A associés à deux valeurs propres distinctes respectives sont orthogonaux.

Voici le procédé de la diagonalisation d'une matrice symétrique par une matrice orthogonale.

7.5.2. Théorème de l'axe principal. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique, alors il existe une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP = P^TAP$ est diagonale, où P est trouvée de la façon suivante.

(1) On factorise $\chi_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_1}\cdots(\lambda_s - \lambda)^{n_s}$ avec $n_i > 0$ et $\lambda_i \neq \lambda_j$ lorsque $i \neq j$.

(2) Pour chaque $i = 1, \ldots, s$, on trouve

- (i) une base $\mathcal{B}_i$ de $\mathcal{N}(A - \lambda_i I_n)$, en résolvant $(A - \lambda_i I_n)X = 0$.
- (ii) une base orthonormée $\mathcal{O}_i$ de $\mathcal{N}(A - \lambda_i I_n)$, en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à $\mathcal{B}_i$.

(3) Cela donne une base orthonormée $\mathcal{O}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{O}_s$ de $\mathbb{R}^n$, dont les vecteurs forment une matrice orthogonale P telle que

$$P^{-1}AP = P^TAP = \mathrm{diag}\left\{\overbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}^{n_1}, \ldots, \overbrace{\lambda_s, \ldots, \lambda_s}^{n_s}\right\}.$$

Exercice. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Donner une décomposition $A = PDP^T$, où P est orthogonale et D est diagonale.

Solution. En effectuant $L_1 - L_3$ et $C_3 + C_1$ à partir de $A - \lambda I_3$, on trouve

$$\begin{aligned}\chi_{_A}(\lambda) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1+\lambda \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & 4 \\ 4 & 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1-\lambda)\,(\lambda^2 - 7\lambda - 8) = (-1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-8) = (1+\lambda)^2(8-\lambda).\end{aligned}$$

Ainsi, A a deux valeurs propres -1 et 8.

(a) *Base orthonormée de* $\mathcal{N}(A - (-1)I_3) = \mathcal{N}(A + I_3)$.

$$A + I = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice représente un système homogène échelonné

$$2x \;+\; y \;+\; 2z \;=\; 0,$$

dont les inconnues sont y et z.

Posant $y = 2$ et $z = 0$, on obtient $x = -1$.

Posant $y = 0$ et $z = 1$, on obtient $x = -1$.

Ceci donne une base de $\mathcal{N}(A + I_3)$ suivante:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

On appliquera le procédé de Gram-Schmidt à cette base.

(i) Posons $v_1 = u_1$ et calculons $\langle v_1, v_1 \rangle = 5$ et $\langle u_2, v_1 \rangle = 1$.

(ii) Posons

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = u_2 - \frac{1}{5} u_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

et calculons $\langle v_2, v_2 \rangle = \frac{9}{5}$.

Alors, $\{v_1, v_2\}$ est une base orthogonale de $\mathcal{N}(A + I_3)$. Posons

$$w_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = \frac{1}{\sqrt{5}} v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \frac{v_2}{||v_2||} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Ceci donne une base orthonormée $\{w_1, w_1\}$ de $\mathcal{N}(A + I_3)$.

(b) *Base orthonormée de* $\mathcal{N}(A-8I_3)$.

$$A-8I=\begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette dernière matrice représente un système homogène échelonné

$$\begin{array}{rcrcl} x & & -\ z & = & 0 \\ & 2y & -\ z & = & 0. \end{array}$$

Posant $z=2$, on obtient $y=1$ et $x=2$. Ceci donne une base de $\mathcal{N}(A-8I_3)$ suivante:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\},$$

ce qui est orthogonale. En la normalisant, on obtient une base orthonormée de $\mathcal{N}(A-8I_3)$:

$$\left\{ w_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right\}.$$

Enfin, on obtient une matrice orthogonale

$$P=(w_1\, w_2\, w_3)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

telle que

$$P^TAP=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ceci donne une décomposition

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{5}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

7.6. Transformations orthogonales

Le but de cette section est d'étudier une classe spéciale d'automorphismes de $\mathbb{R}^n$, soit les transformations orthogonales telles que définies ci-dessous.

7.6.1. Définition. Une transformation linéaire T de $\mathbb{R}^n$ est dite *orthogonale* si

$$\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle,$$

pour tous vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^n$.

Exemple. L'application identité

$$\mathbb{1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : u \mapsto u$$

est évidemment orthogonale.

Voici des propriétés des transformations orthogonales.

7.6.2. Proposition. Soit T une transformation orthogonale de $\mathbb{R}^n$.
(1) Si $u \in \mathbb{R}^n$, alors $||T(u)|| = ||u||$.
(2) Si $u, v \in \mathbb{R}^n$, alors $d(T(u), T(v)) = d(u, v)$.
(3) Si $u, v \in \mathbb{R}^n$ sont non nuls, alors l'angle non orienté entre $T(u)$, $T(v)$ est égal à celui entre u, v.

Remarque. Une transformation orthogonale de $\mathbb{R}^n$, avec $2 \leq n \leq 3$, transforme les rectangle en rectangles, et les carrés en carrés.

Le résultat suivant donne une méthode pour vérifier si une transformation linéaire est orthogonale ou non.

7.6.3. Théorème. Soit T une transformation linéaire de $\mathbb{R}^n$. Si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, alors les conditions suivantes sont équivalentes.
(1) T est une transformation orthogonale.
(2) $[T]_{\{u_1,\ldots,u_n\}}$ est une matrice orthogonale.
(3) $\{T(u_1), \ldots, T(u_n)\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Remarque. Une transformation orthogonale est un automorphisme.

Exemple. La rotation ρ_θ d'un angle θ du plan est orthogonale. En effet, $\{e_1, e_2\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ telle que

$$[\rho]_{\{e_1,e_2\}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

ce qui est orthogonale. D'après le théorème 7.6.3(2), ρ_θ est orthogonale.

On définira les rotations de $\mathbb{R}^3$, qui sont orthogonales.

7.6.4. Définition. Soit L une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendrée par un vecteur u. Posons $P = L^\perp$, un plan vectoriel auquel u est normal. On définit la *rotation* $\rho_{\theta,u}$ *autour de*

L *d'angle θ orienté par u* comme étant la transformation linéaire de $\mathbb{R}^3$ satisfaisant les deux conditions suivantes:

(1) Si $v \in L$, alors $\rho_{\theta,u}(v) = v$.

(2) Si $v \in P$, alors $\rho_{\theta,u}(v) = v' \in P$, le vecteur tel que

(a) $||v|| = ||v'||$;

(b) l'angle de v à v' orienté par u est θ.

Remarque. En bref, on appelle $\rho_{\theta,u}$ la rotation d'angle θ autour de u.

Le résulat suivant nous dit comment calculer les rotations de $\mathbb{R}^3$.

7.6.5. Théorème. Soit L une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendrée par un vecteur u. Si $\{u, v, w\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ avec $\det(u\,v\,w) > 0$, alors

$$\left\{ u_1 = \frac{u}{||u||},\ u_2 = \frac{v}{||v||},\ u_3 = \frac{w}{||w||} \right\}$$

est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$[\rho_{\theta,u}]_{\{u_1,u_2,u_3\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

En particulier, toute rotation de $\mathbb{R}^3$ est orthogonale.

Exercice. Trouver la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'angle θ autour de e_1.

Solution. On sait que $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ avec $\det(e_1\,e_2\,e_3) = 1$. D'après le théorème 7.6.5, on a

$$[\rho_{\theta,e_1}]_{\{e_1,e_2,e_3\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire, la formule en coordonées canoniques de ρ_{θ,e_1} est la suivante:

$$\rho_{\theta,e_1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Exercice. Donner la rotation ρ_{θ,e_2} de $\mathbb{R}^3$ d'angle θ autour

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Solution. La droite vectorielle L engendrée par e_2 est l'axe des y, dont $\{e_2\}$ est une base orthonormée. Or $L^\perp$ est le plan des x, z, dont $\{e_1, e_3\}$ est une base orthonormée. Comme $\det(e_2, e_1, e_3) = -1$, on doit considérer la base orthonormée $\{e_3, e_1\}$ de $L^\perp$. Maintenant, $\{e_2, e_3, e_1\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ avec $\det(e_2, e_3, e_1)\rangle 0$. D'après le théorème 7.6.5, on a

$$[\rho_{\theta,e_2}]_{\{e_2,e_3,e_1\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire,

$$\rho_{\theta,e_2}(e_2) = (e_2, e_3, e_1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\cdot e_2 + 0\cdot e_3 + 0\cdot e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\rho_{\theta,e_2}(e_3) = (e_2, e_3, e_1)\begin{pmatrix} 0 \\ \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = 0e_2 + (\cos\theta)e_3 + (\sin\theta)e_1 = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

$$\rho_{\theta,e_2}(e_1) = (e_2, e_3, e_1)\begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = 0e_2 + (-\sin\theta)e_3 + (\cos\theta)e_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ -\sin\theta \end{pmatrix}.$$

D'où

$$[\rho_{\theta,e_2}]_{\{e_1,e_2,e_3\}} = P_{\{e_1,e_2,e_3\}}^{\{\rho_{\theta,e_2}(e_1),\,\rho_{\theta,e_2}(e_2),\,\rho_{\theta,e_2}(e_3)\}} = (\rho_{\theta,e_2}(e_1)\;\rho_{\theta,e_2}(e_2)\;\rho_{\theta,e_2}(e_3)) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire, ρ_{θ,e_2} est de la forme

$$\rho_{\theta,e_2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Voici un procédé pour calculer une rotation de $\mathbb{R}^3$, ce qui est une conséquence du lemme 7.2.6, le corollaire 7.3.5, le théorème 7.6.5, et le théorème 5.3.4.

7.6.6. Théorème. Soit L une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendrée par un vecteur u. On veut calculer la rotation ρ autour de L d'un angle θ orienté par u.
(1) On trouve $v \in \mathbb{R}^3$ non nul avec $\langle u, v\rangle = 0$.
(2) On calcule $w = u \wedge v$.

(3) On obtient une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ suivante:

$$\left\{u_1 = \frac{u}{||u||},\ u_2 = \frac{v}{||v||},\ u_3 = \frac{w}{||w||}\right\}.$$

(4) D'après le théorème 7.6.5, on a

$$[\rho]_{\{u_1,u_2,u_3\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} =: A.$$

(5) La matrice de passage de la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ à la base orthnormée $\{u_1, u_2, u_3\}$ est $P = (u_1 u_2 u_3)$, ce qui est orthogonale telle que

$$[\rho]_{\{e_1,e_2,e_3\}} = PAP^T.$$

Exercice. Soit L la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendrée par

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Trouver la rotation ρ autour de L d'un angle $\frac{\pi}{3}$ orienté par u.

Solution. Les vecteurs orthogonaux à u sont les solutions de l'équation suivante:

$$x + y + z = 0.$$

Posant $y = 1$ et $z = 0$, on trouve $x = -1$. Ceci donne un vecteur

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $\langle v, u \rangle = 0$. Maintenant, calculons

$$w = u \wedge v = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On pose

$$u_1 = \frac{u}{||u||} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ u_2 = \frac{v}{||v||} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ u_3 = \frac{w}{||w||} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Alors $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$[\rho]_{\{u_1,u_2,u_3\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} =: A.$$

Posant

$$P = (u_1\, u_2\, u_3) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

on obtient

$$\begin{aligned}
[\rho]_{\{e_1,e_2,e_3\}} &= PAP^T \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \tfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -2\sqrt{3} & 4 \\ 2\sqrt{2} & 0 & -4 \\ 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

C'est-à-dire, la formule en coordonnées canonique de ρ est donnée par

$$\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x - y + 2z \\ 2x + 2y - z \\ -x + 2y + 2z \end{pmatrix}.$$

On conclut cette section par une application dans la stéréovision.

7.6.7. Théorème. Soit M un objet à la position

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

dans un repère caméra initial de $\mathbb{R}^3$. Si l'on tourne la caméra d'un angle θ autour d'un vecteur non nul u, alors M est à la position

$$B^T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

dans le nouveau repère caméra de $\mathbb{R}^3$, où B est la matrice de $\rho_{\theta,u}$ de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique.

Démonstration. Par l'hypothèse, la colonne des coordonnées de M dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Étant orthogonale, $\rho_{\theta,u}$ transforme $\{e_1, e_2, e_3\}$ en une base orthonormée $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$, où $e'_i = \rho_{\theta,u}(e_i)$, $i = 1, 2, 3$. D'après le théorème 5.3.7, B est la matrice de passage de $\{e_1, e_2, e_3\}$ à $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$. D'après le théorème 7.4.4, la colonne des coordonnées de M dans la base $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ est

$$B^T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

ce qui est la position de M dans le nouveau repère caméra.

Exercice. Dans un repère caméra initial de $\mathbb{R}^3$, un objet M est situé à la position

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

On tourne la caméra d'angle $\frac{\pi}{3}$ autour du vecteur

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Trouver la position de M dans le nouveau repère caméra de $\mathbb{R}^3$.

Solution. Désignons par ρ la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'angle $\frac{\pi}{3}$ autour de u. On a vu que

$$[\rho]_{\{e_1,e_2,e_3\}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} =: B.$$

D'après le théorème 7.6.7, dans le nouveau repère caméra, M est à la position suivante:

$$B^T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

7.7. Méthode des moindres carrés

La méthode des moindres carrés, indépendamment élaborée par Legendre en 1805 et par Gauss en 1809, permet de comparer des données expérimentales à un modèle mathématique censé décrire ces données.

7.7.1. Définition. Soit un système d'équations linéaires

$$AX = B, \text{ où } A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}).$$

Un vecteur $S \in \mathbb{R}^n$ s'appelle *solution à moindres carrés* de ce système si

$$||AS - B|| \leq ||Au - B||$$

pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^n$.

Remarque. Si le système $AX = B$ est compatible, alors une solution à moindres carrés est une solution exacte.

Le résultat suivant nous donne une méthode très pratique pour trouver les solutions à moindres carrés d'un système d'équations linéaires.

7.7.2. Théorème. Soit un système d'équations linéaires

$$AX = B, \text{ où } A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}).$$

Un vecteur $S \in \mathbb{R}^n$ est une solution à moindres carrés de ce système si, et seulement si, S est une solution exacte du système compatible suivant:

$$(A^T A)X = A^T B.$$

Exercice. Trouver une solution à moindres carrés du système suivant:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & & & = & 1 \\ x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ -2x & + & 4y & + & 2z & = & 3. \end{array}$$

Solution. D'abord, on a que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On calcule

$$C = A^T A = \begin{pmatrix} 6 & -8 & -2 \\ -8 & 18 & 10 \\ -2 & 10 & 8 \end{pmatrix} \text{ et } D = A^T B = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Or $(C|D)$ s'échelonne à la matrice suivante:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -4 & -4 \\ 0 & 11 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Posant $z = 0$, on obtient une solution à moindres carrés du système original suivante:

$$S = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 94 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire,

$$AS = -\frac{4}{11}\begin{pmatrix} 21 \\ 26 \\ -34 \end{pmatrix}$$

est la projection orthogonale de B sur $\mathcal{C}(A)$.

Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ est de rang n, alors A^TA est définie positive. En particulier, A^TA est inversible. Cette observation nous donne le résultat suivant.

7.7.3. Corollaire. Soit un système d'équations linéaires

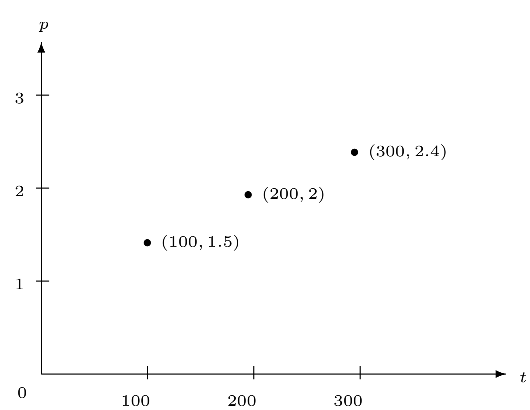
$$AX = B, \text{ où } A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}).$$

Si $\mathrm{rg}(A) = n$, alors le système admet une seule solution à moindres carrés donnée par

$$S = (A^TA)^{-1}A^TB.$$

Dans la pratique, on décrira la relation entre deux variables x et y selon des données observées. Ces données observées sont représentées par des points du plan. S'ils ont tendance à former une droite, on peut trouver une droite qui correspond le mieux à ces points.

Exercice. En enregistrant la pression (en atm) d'un gaz à température (en Celsius) différente, on obtient les données suivantes:



Donner l'estimation de la pression du gaz à 400 degrés Celsius.

Solution. Comme les points ont tendance à former une droite, on va trouver une droite qui correspond le mieux les données observées. Supposons que $p = at + b$, où $a, b \in \mathbb{R}$. D'après les données observées, on considère le système suivant:

$$\begin{array}{rcccl} 100a & + & b & = & 1,5 \\ 200a & + & b & = & 2 \\ 300a & + & b & = & 2,4. \end{array}$$

Ceci nous donne

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 1 \\ 200 & 1 \\ 300 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2 \\ 2,4 \end{pmatrix}.$$

Comme les colonnes de A sont linéairement indépendantes, la matrice

$$A^T A = \begin{pmatrix} 14 \times 10^4 & 6 \times 10^2 \\ 6 \times 10^2 & 3 \end{pmatrix}$$

est inversible, d'après le corollaire 7.7.3, le système a une seule solution à moindres carrés

$$S = (A^T A)^{-1}(A^T B) = \frac{1}{6 \times 10^4} \begin{pmatrix} 3 & -6 \times 10^2 \\ -6 \times 10^2 & 14 \times 10^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12,7 \times 10^2 \\ 5,9 \end{pmatrix} = \frac{1}{6 \times 10^4} \begin{pmatrix} 2,7 \times 10^2 \\ 6,4 \times 10^4 \end{pmatrix}.$$

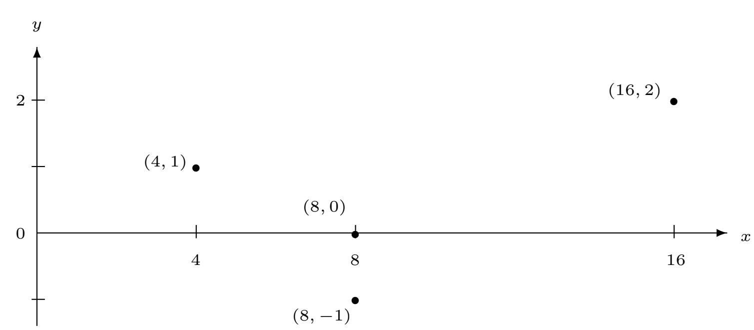
C'est-à-dire, la droite cherchée est définie par l'équation

$$p = \frac{2,7}{600} t + \frac{3,2}{3}.$$

Ainsi la pression sera environ 2,86 atm à la température 400 degrés Celsius.

Lorsque les points représentant des données expérimentales ont tendance à former une courbe, on peut trouver une fonction polynomiale qui correspond le mieux à ces points.

Exercice. Étant données des données expérimentales suivantes:



Donner une fonction polynomiale quadratique qui correspond le mieux à ces données.

Solution. On cherche une fonction $x = a + by + cy^2$. D'après les données observées, on obtient le système suivant:

$$\begin{array}{ccccccc} a & - & b & + & c & = & 8 \\ a & & & & & = & 8 \\ a & + & b & + & c & = & 4 \\ a & + & 2b & + & 4c & = & 16. \end{array}$$

Ceci donne

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$A^T A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{pmatrix} \text{ et } A^T B = \begin{pmatrix} 36 \\ 28 \\ 76 \end{pmatrix}.$$

Comme les colonnes de A sont linéairement indépendantes, $A^T A$ est inversible. D'après le corollaire 7.7.3, le système admet une seule solution à moindres carrés suivante:

$$S = (A^T A)^{-1}(A^T B) = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 11 & 3 & -5 \\ 3 & 9 & -5 \\ -5 & -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 36 \\ 28 \\ 76 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire, la function polynomiale quadratique cherchée est définie par l'équation

$$x = 5 - y + 3y^2.$$

7.8. Exercices

1. Trouver le vecteur unitaire de même direction que le vecteur suivant:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Dans chacun des cas suivants, calculer la distance entre u et v.

$$(1) \quad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (2) \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \; v = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Dans chacun des cas suivants, calculer l'angle non orienté entre u et v.

$$(1) \quad u = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}; \quad (2) \quad u = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4. Donner une base de $F^{\perp}$, où F est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

5. À l'aide du théorème 7.2.3(3), donner une base de $\mathcal{C}(A)^{\perp}$, où

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \qquad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Considérer la matrice suivante:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

   Déterminer, à l'aide de la proposition 7.2.5, si les colonnes de A forment une base orthonormée ou non de $\mathcal{C}(A)$.

7. Vérifier, à l'aide de la proposition 7.2.5, que les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathcal{C}(A)$, où

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Soient

$$A = (A_1\, A_2) = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{11}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}; \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad v = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1) En calculant $A^T A$, vérifier que A_1, A_2 forment une base orthonormée de $\mathcal{C}(A)$.

(2) En calculant la projection orthogonale de v sur $\mathcal{C}(A)$, vérifier que $v \in \mathcal{C}(A)$.

(3) Donner la projection orthogonale de u sur $\mathcal{C}(A)$, et en déterminer si u appartient à $\mathcal{C}(A)$ ou non.

9. Considérer les vecteurs de l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$ suivants:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Donner une base orthonormée du sous-espace vectoriel F engendré par u.

(2) Calculer la projection orthogonale de v sur F.

10. Déterminer si les vecteurs suivants forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ ou non:

$$u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \ u_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

11. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par u_1, u_2, u_3, où

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Vérifier que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base orthogonale de F.

(2) Donner, à l'aide du lemme 7.2.6 une base orthonormée de F.

(3) Donner la projection orthogonale de v sur F.

12. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par u_1, u_2, u_3, u_4, où

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1) À l'aide du théorème 4.3.10, donner une base de F.

(2) En appliquant le procédé de Gram-Schmidt, donner une base orthonormée de F.

(3) Calculer $\text{proj}_F v$; et en déterminer si v appartient au F ou non.

13. Considérer la matrice suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Vérifier que les colonnes de A forment une base de $\mathcal{C}(A)$;

(2) En appliquant le procédé de Gram-Schmidt aux bases trouvées en (1), donner une base orthonormée de $\mathcal{C}(A)$.

14. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Vérifier que les colonnes de A forment une base de $\mathcal{C}(A)$;

(2) Donner une base orthonormée de $\mathcal{C}(A)$;

(3) Donner une décomposition QR de A.

15. Considérer les vecteurs de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ suivants:

$$u_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{9}{25} \\ \frac{12}{25} \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \; u_3 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{12}{25} \\ \frac{16}{25} \end{pmatrix}; u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Vérifier, à l'aide du théorème 7.4.1, que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

(2) Trouver, à l'aide du théorème 7.4.4(1), la colonne des ccordonnées de u dans $\{u_1, u_2, u_3\}$.

16. Trouver les valeurs de a, b, c telles que la matrice suivante soit orthogonale.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & a \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & b \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{3}{\sqrt{14}} & c \end{pmatrix}.$$

17. Donner une décomposition QR de la matrice inversible suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

18. Considérer la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$. Calculer les produits vectoriels $e_1 \wedge e_2$, $e_2 \wedge e_3$ et $e_3 \wedge e_1$.

19. Dans chacun des cas suivants, à l'aide de la proposition 7.3.4(2), trouver un vecteur normal au plan P engendré par u, v, et en donner une équation pour P.

$$(1)\ \ u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad (2)\ \ u = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

20. Considérer les vecteurs de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ suivants:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Donner l'angle θ de u à v orienté par $u \wedge v$.

(2) Donner l'angle ϕ de u à v orienté par $v \wedge u$.

21. Dans chacun des cas suivants, diagonaliser la matrice symétrique donnée par une matrice orthogonale.

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(3)\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad (4)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

22. Déterminer si la transformation linéaire suivante est orthogonale ou non:

$$T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \end{pmatrix}.$$

23. Dans chacun des cas suivants, trouver la matrice de la transformation linéaire T dans la base canonique; déterminer si T est orthogonale ou non; et si oui, donner son inverse en spécifiant la formule sous les coordonnées canoniques.

(1) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a - 2b + 2c \\ 2a - 2b + c \\ -2a + b + 2c \end{pmatrix};$

(2) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b + \frac{2}{3}c \\ \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b - \frac{1}{3}c \\ -\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}c \end{pmatrix}.$

24. Soit ρ la rotation du plan d'angle $\frac{7\pi}{6}$.

(1) Donner la matrice de ρ dans la base canonique $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$.

(2) Calculer l'image par ρ du rectangle de sommets

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}; \ u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ u_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

25. Donner la rotation de $\mathbb{R}^3$ autour de l'axe des z d'angle $\frac{2\pi}{3}$ orienté par e_3.

26. Soit ρ la rotation de $\mathbb{R}^3$ autour de l'axe des x d'angle $\frac{5\pi}{3}$ orienté par le vecteur

$$u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Donner la matrice de ρ dans base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

(2) Calculer l'image par ρ du vecteur suivant

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

27. Soit L la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur suivant:

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) Calculer la rotation ρ de $\mathbb{R}^3$ autour de L d'angle $\frac{5\pi}{6}$ orienté par v, c'est-à-dire, donner la matrice de ρ dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$.

(2) Dans un repère caméra initial de $\mathbb{R}^3$, un objet M est situé à la position

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On tourne la caméra d'angle $\frac{5\pi}{6}$ autour du vecteur v. Trouver la position de M dans le nouveau repère caméra de $\mathbb{R}^3$. *Indice*: Utiliser le résultat de la partie (1).

28. Dans chacun des cas suivants, trouver la solution à moindres carrés du système:

(1)
$$\begin{array}{rcrcrcl} x & & & - & z & = & 6 \\ 2x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ x & + & y & & & = & 9 \\ x & + & y & - & z & = & 3; \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & & & - & z & = & 0 \\ x & - & 2y & + & 2z & = & 6 \\ 2x & - & y & & & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 6. \end{array}$$

29. Trouver une solution à moindres carrés de chacun des systèmes suivants:

(1)
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & + & 2x_4 & = & 2 \\ x_1 & & & - & x_3 & & & = & 5 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 6 \\ -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 6; \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 4x_1 & & & + & x_3 & + & 5x_4 & = & 9 \\ x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \\ 6x_1 & + & x_2 & & & + & 7x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & - & 5x_4 & = & 0. \end{array}$$

30. Trouver la droite $y = a + bx$, qui correspond le mieux les données observées suivantes:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

31. Trouver la courbe quadratique $y = a + bx + cx^2$, qui correspond le mieux les données observées suivantes:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix}.$$